Л. И. Камынин

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА I

Л. И. Камынин

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том I

2-е издание, исправленное и дополненное

Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 510100 «Математика» и специальности 010100 «Математика»

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
2001

УДК 517
ББК 22.161
К18

Федеральная программа книгоиздания России

Рецензенты:
академик РАН *Ю. Г. Решетняк*,
доктор физико-математических наук *Н. Н. Фельдман*,
доктор физико-математических наук *В. И. Буренков*

Камынин Л. И.

К18 Курс математического анализа. Т. 1.– 2-е изд., испр. и доп. – М.: Изд-во МГУ, 2001.– 432 с.

ISBN 5-211-04483-5 (Т. 1)

ISBN 5-211-01941-5

Учебник написан на основе лекций, читаемых автором на механико-математическом факультете Московского университета. В книге отражены следующие темы: теория пределов и дифференциальное исчисление функций одного переменного, интегральное исчисление функций одного переменного, дифференциальное исчисление функций многих переменных, ряды, бесконечные произведения и несобственные интегралы, кратные интегралы Римана и интегрирование дифференциальных форм. Материал излагается на современном уровне, теоретические положения иллюстрируются примерами, допускающими простое наглядное истолкование.

Для студентов математических специальностей вузов.

УДК 517
ББК 22.161

ISBN 5-211-04483-5(Т. 1)
ISBN 5-211-01941-5

© Издательство Московского университета, 2001

ПРЕДИСЛОВИЕ

Математический анализ — основа математического образования. В том или ином объеме эта дисциплина изучается практически во всех учебных заведениях, и ей посвящено большое количество книг, адресованных различному кругу читателей.

Естественно, наиболее основательно предмет математического анализа изучается в университетах и институтах, по уровню математической подготовки близких к ним.

Тем не менее местом, где выдерживается эталон преподавания этой дисциплины, являются механико-математические (математические) факультеты университетов. На них возложена особая роль — сохранить лучшие традиции в подходах к изучению, восходящие ещё к Ньютону и Лейбницу, выработать новый взгляд, развить новый современный математический язык, обогатить этот предмет новыми идеями и дидактическими находками. Именно на ученых, закончивших университеты, работающих в них или связанных с ними, ложится также задача создания новых учебников по математическому анализу.

У нас имеется много первоклассных учебников по математическому анализу, каждый из них — большое достояние высшей школы. Поэтому создание нового учебника — трудная и ответственная задача.

Предлагаемый читателю двухтомный учебник «Курс математического анализа» профессора Л. И. Камынина — удачная попытка создать хороший учебник по университетскому курсу.

Автор этого двухтомника — профессор кафедры математического анализа механико-математического факультета Московского университета — многие годы читал этот курс на механико-математическом факультете МГУ, издал его ранее в виде четырех ротапринтных выпусков.

Этот учебник характеризуют прежде всего глубина и основательность изложения. В некотором смысле в нем есть все, что может понадобиться студенту при изучении предмета. А с другой стороны, этот материал реально прочитывается за два года обучения студентам, т. е. это практически лекции профессора Л. И. Камынина.

Строгость изложения, современный язык, полная логическая «замкнутость» изложения — стиль учебника.

В учебнике имеется очень много находок в подходах к изложению материала, в том числе тех, которые иногда позволяют и по-новому взглянуть на целый раздел классической дисциплины.

Нет нужды перечислять разделы и главы учебника, можно только с уверенностью сказать, что, изучив этот учебник, найдет для себя много полезного и начинающий штудировать математический анализ, и уже знакомый с этим курсом, и профессионал в этой области.

Ректор
Московского государственного
университета,
академик РАН *В. А. Садовничий*

Часть I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава 1

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Некоторые понятия теории множеств и математической логики

Понятие множества на совокупности объектов является одним из самых фундаментальных в математике. Множества определяются некоторым свойством $\mathfrak{A}$, которым должен или обладать, или не обладать каждый из рассматриваемых объектов: те объекты, которые обладают свойством $\mathfrak{A}$, образуют множество A.

Пример. Пусть рассмотрены совокупность целых чисел $\mathbf{Z}$ и свойство $\mathfrak{A}$, заключающееся в том, чтобы «быть простым числом». Тогда соответствующее свойству $\mathfrak{A}$ множество A состоит из всех простых чисел $2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots$

Основным в математическом исследовании множеств является то, что множества, комбинируясь между собой в результате выполнения некоторых операций, образуют новые множества – так же, как числа, комбинируясь между собой с помощью операций сложения и умножения, образуют новые числа (например, $2 + 3 = 5$, $2 \cdot 3 = 6$ и т.д.). Изучение операций над множествами приводит к «алгебре множеств», которая имеет много общего с обычной числовой алгеброй, хотя кое в чем и отличается от нее.

Будем в дальнейшем рассматривать множества, входящие в некоторое определенное «универсальное» множество объектов E, и обозначать через A, B, C, X, Y и т.д. некоторые подмножества из E.

Пример. Пусть $\mathbf{N}_0$ – множество всех неотрицательных целых чисел $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$. Пусть тогда $\mathbf{N}$ – множество положительных целых чисел $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$, A – множество всех простых чисел, B – множество всех четных чисел $2, 4, 6, \ldots$, C – множество всех нечетных чисел $1, 3, 5, 7, \ldots$

Пример. Пусть E – совокупность всех точек на плоскости и A

– множество точек, лежащих внутри какого-либо круга, а B – множество точек, лежащих внутри некоторого треугольника.

Объекты, из которых состоит данное множество A (т. е. объекты, обладающие свойством $\mathfrak{A}$), называются элементами множества A (или его точками) и обозначаются a, b, c. Запись $a = b$ означает, что элементы a и b совпадают. Запись $a \neq b$ означает, что эти элементы различны. Если a – элемент множества A, то пишут $a \in A$ (элемент a принадлежит множеству A) или $A \ni a$ (множество A содержит элемент a). Запись $a \notin A$ или $a \bar{\in} A$ означает, что элемент a не принадлежит множеству A (т. е. не обладает свойством $\mathfrak{A}$).

Пример. Если $\mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел, а A – множество всех простых чисел, то $3 \in A$, но $10 \bar{\in} A$.

Определение. *Если A есть множество элементов $a \in E$, обладающих свойством $\mathfrak{A}$, то пишут* $A = \{a \in E | \mathfrak{A}\}$.

Пример. Если $E = \mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел, то множество X всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам $-1 < x < 3$, записывается в виде $X = \{x \in \mathbf{R} | -1 < x < 3\}$.

Определение. *Если A и B – множества из E и каждый элемент a множества A принадлежит множеству B, то множество A называется подмножеством множества B.* Символически это записывается в виде $A \subset B$ или $B \supset A$, где знак $\subset$ называется символом включения.

Замечание. Отношение $A \subset B$ означает, что в A нет элементов, не принадлежащих B.

Пример. Пусть $E = \mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел, A – множество целых чисел, делящихся на 10, а B – множество всех целых чисел, делящихся на 5, тогда A есть подмножество B, т. е. $A \subset B$.

Пример. Пусть A – подмножество E и $a \in A$ – элемент из A. Тогда множество $\{a\}$, состоящее из одного элемента a, есть подмножество A, т. е. $\{a\} \subset A$.

Определение. *Если множество A не сдержится во множестве B, то пишут $A \not\subset B$.*

Замечание. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то множества A и B содержат одни те же элементы и тогда пишут $A = B$.

Отношения включения $A \subset B$ между множествами напоминает отношение $a \leq b$ между действительными числами. Отношение включения обладает следующими свойствами, непосредственно вытекающими из определения операции включения $\subset$:

1) $A \subset A$ (т. е. всякое множество A есть подмножество самого себя);

2) если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$;

3) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность отношения включения).

З а м е ч а н и е. В силу свойств 1)–3) отношение включения $A \subset B$ иногда называют отношением порядка. Основное отличие рассматриваемого отношения $A \subset B$ от отношения $a \leq b$ из теории чисел заключается в том, что между любыми двумя заданными действительными числами $a \in \mathbf{R}$ и $b \in \mathbf{R}$ непременно осуществляется хотя бы одно из отношений $a \leq b$ или $b \leq a$, тогда как для отношения $A \subset B$ аналогичное утверждение неверно, например, при $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$ не имеет места ни отношение $A \subset B$, ни $B \subset A$. Множество E называется поэтому частично упорядоченным отношением $A \subset B$, в отличие от множества $\mathbf{R}$ действительных чисел, являющегося, как говорят, вполне упорядоченным отношением $a \leq b$.

Рассмотрим множество объектов из универсального множества E, обладающих свойством $a \neq a$. Такое множество, очевидно, не содержит ни одного элемента и называется пустым множеством. Пустое множество обозначается символом $\varnothing$. Итак, по определению $\varnothing = \{a \in E | a \neq a\}$. Далее заметим, что само универсальное множество E может быть определено как множество объектов, обладающих свойством $a = a$, т. е. $E = \{a \in E | a = a\}$.

З а м е ч а н и е. Если $A \neq \varnothing$, то это означает, что множество A не пусто, т. е. содержит хотя бы один элемент из E.

П р и м е р. Пусть $E = \mathbf{R}$ – множество действительных чисел, тогда $A = \{x \in \mathbf{R} | x < 2, x > 5\} = \varnothing$, но $B = \{x \in \mathbf{R} | x < 2\} \neq \varnothing$.
Отметим свойства:

4) $\varnothing \subset A$ для любого множества A из E.

В самом деле, если бы отношение $\varnothing \subset A$ не имело места, то это означало бы, что в множестве $\varnothing$ существует элемент a, не принадлежащий множеству A, но $\varnothing$ пусто, а поэтому вообще не содержит никаких элементов. Противоречие.

5) $A \subset E$ для любого множества A из E.

З а м е ч а н и е. Согласно свойству 1) всякое множество A есть подмножество самого себя, а в силу свойства 4) пустое множество также является подмножеством A. Множества A и $\varnothing$ называются несобственными подмножествами множества A, остальные подмножества множества A называются собственными подмножествами A. Таким образом, B есть собственное подмножество A, если $B \neq \varnothing$, $B \subset A$ и $B \neq A$.

Определим теперь две операции над множествами, формально обладающие многими алгебраическими свойствами сложения и умножения чисел, хотя по своему внутреннему содержанию совершенно отличные от этих арифметических операций.

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – множества из E. Объединением (или суммой) $A \cup B$ множеств A и B называется множество всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A и B, т. е. $x \in A \cup B$, если $x \in A$, но $x \in B$, или $x \in B$,*

но $x \overline{\in} A$, или, наконец, $x \in A$ и $x \in B$.

Таким образом, $A \cup B = \{x \in E | x \in A$ *или* $x \in B\}$.

Пример. Пусть $E = \mathbf{N}$ – множество натуральных чисел и $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример. Пусть $E = \mathbf{Z}$ – множество всех целых чисел, тогда $N = A \cup B$, где $\mathbf{N}$ – множество всех натуральных чисел, A – множество всех четных натуральных чисел, B – множество всех нечетных натуральных чисел.

Обобщение. Если $\{A_\alpha\}$ – совокупность множеств A_α из E, то $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ есть объединение всех A_α, так что $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha = \{x \in E | x \in A_\alpha$ хотя бы для одного $\alpha\}$, $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \{x \in E | x \in A_1,$ или $x \in A_2, \ldots,$ или $x \in A_n, \ldots\}$.

Определение. *Пусть A и B – множества из E. Пересечением $A \cap B$ множеств A и B называется множество всех элементов, каждый из которых принадлежит и A и B, т. е. $x \in A \cap B$, если одновременно $x \in A$ и $x \in B$. Таким образом,*

$A \cap B = \{x \in E | x \in A$ *и* $x \in B\}$.

Замечание. Если у множества A или B нет общих элементов, то $A \cap B = \varnothing$.

Пример. Если $E = \mathbf{N}$ и $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$, то $A \cap B = \{2, 3\}$.

Обобщение. Если $\{A_\alpha\}$ – совокупность множеств из E, то $\bigcap\limits_\alpha A_\alpha = \{x \in E | x \in A_\alpha$ при каждом $\alpha\}$, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \{x \in E | x \in A_n$ для любого $n \in \mathbf{N}\}$.

Пример. Пусть $E = \mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел и Q_n – множество всех рациональных чисел, абсолютные величины которых $< \dfrac{1}{n}$, т. е. $Q_n = \left\{q \in \mathbf{Q} \,|\, |q| < \dfrac{1}{n}\right\}$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} Q_n = \{0\}$.

Пример. Пусть $E = \mathbf{Q}$ и $Q_n^+ = \left\{q \in \mathbf{Q} | q > 0, q < \dfrac{1}{n}\right\}$. Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} Q_n^+ = \varnothing$.

Операции объединения и пересечения обладают следующими алгебраическими свойствами:

6) $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность объединения);

7) $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность пересечения);

8) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$ (ассоциативность объединения);

9) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (ассоциативность пересечения);

10) $A \cup A = A$; 11) $A \cap A = A$; 12) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ и вообще $(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha) \cap B = \bigcup\limits_{\alpha}(A_\alpha \cap B)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения);

13) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ и вообще $(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) \cup C = \bigcap\limits_{\alpha}(A_\alpha \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения);

14) $A \cup \varnothing = A$; 15) $A \cap E = A$;

16) $A \cup E = E$; 17) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

18) отношение $A \subset B$ эквивалентно каждому из двух отношений $A \cup B = B$, $A \cap B = A$.

Проверка этих свойств проводится с помощью элементарной логики. Приведем в качестве примеров доказательств свойств 10) и 12).

Доказательство свойства 10) $A \cup A = A$. Пусть $x \in A \cup A$, тогда $x \in A$ или $x \in A$, т. е. $x \in A$. Таким образом,

$$A \cup A \subset A. \tag{1.1}$$

Пусть теперь $x \in A$. Тогда, очевидно, $x \in A \cup A$, т. е. имеет место включение

$$A \subset A \cup A. \tag{1.2}$$

Из (1.1) и (1.2) вытекает свойство 10) $A \cup A = A$.

Доказательство свойства 12). Обозначим левую и правую части равенства 12) через F и G соответственно. Пусть $x \in F$. Тогда $x \in C$ и $x \in A \cup B$, т. е. $x \in A$ или $x \in B$ (или то и другое), поэтому $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$ так, что $x \in G$. Но тогда имеем включение

$$F \subset G. \tag{1.3}$$

Пусть теперь $x \in G$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$, т. е. $x \in C$ и $x \in A \cup B$ так, что $x \in F$. Поэтому имеем

$$G \subset F. \tag{1.4}$$

Из (1.3) и (1.4) следует $F = G$, чем свойство 12) доказано.

Задание. Провести самостоятельно доказательство остальных свойств 1)–18).

Замечание. Свойства 6)–9) и 12) внешне тождественны с хорошо известными свойствами коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности операций сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ в обычной алгебре чисел. Отсюда вытекает, что все правила обычной алгебры чисел имеют место и в алгебре множеств. С другой стороны, свойства 10), 11) и 13) не имеют аналогов в обычной алгебре и они придают алгебре множеств более простую структуру. Например, вместо формулы «квадрата суммы» $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ из обычной алгебры чисел в алгебре множеств в силу свойства 11) имеем более простое

равенство $(A \cup B) \cap (A \cup B) = A \cup B$. Свойства 14), 15) и 17) говорят о том, что свойства множеств $\varnothing$ и E по отношению к операциям объединения $\cup$ и пересечения $\cap$ весьма похожи на свойства нуля 0 и единицы 1 по отношению к операциям сложения $(+)$ и умножения $(\cdot)$ в числовой алгебре.

З а м е ч а н и е. Утверждения 1)–18) обладают замечательным свойством двойственности в следующем смысле: если в одном из законов 1)–18) символы ($\subset$ и $\supset$), ($\varnothing$ и E), ($\cup$ и $\cap$) переставляются между собой (поскольку они встречаются), то в результате получается опять один из тех законов, а именно свойство 1) переходит в 1*) $A \supset A$, свойство 2) переходит в свойство 2*): если $A \supset B$ и $B \supset A$, то $A = B$, свойство 3) переходит в свойство транзитивности включения $\supset$, свойство 4) переходит в свойство 5), а 5) переходит в 4); закон коммутативности объединения $\cup$ 6) переходит в закон коммутативности пересечения $\cap$ 7) и, наоборот, 7) переходит в 6); закон ассоциативности объединения $\cup$ 8) переходит в закон ассоциативности пересечения 9) и обратно, 9) переходит в 8); свойство 10) переходит в 11), а 11) переходит в 10); закон дистрибутивности пересечения $\cap$ относительно объединения $\cup$ 12) переходит в закон 13), а 13) переходит в 12); 14) переходит в 15), а 15) переходит в 14); 16) переходит в 17), а 17) переходит в 16); наконец, закон 18) переходит в «двойственный» закон 18*), отношение $A \supset B$ эквивалентно одному из отношений $A \cap B = B$, $A \cup B = A$.

З а м е ч а н и е. Из двойственности законов 1)–18) вытекает, что каждой теореме, которая может быть выведена из законов 1)–18), соответствует другая «двойственная теорема», получающаяся из первой указанными выше перестановками символов. (В самом деле, поскольку доказательство первой теоремы состоит в последовательном применении некоторых законов 1)–18), то, применяя на соответствующих этапах «двойственные законы», получаем доказательство двойственной теоремы.)

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – множества из E. Разностью $A \setminus B$ множеств A и B называется множество всех элементов, принадлежащих A, но не принадлежащих B, т. е. $x \in A \setminus B$, если $x \in A$, но $x \overline{\in} B$. Таким образом,*

$$A \setminus B = \{x \in E | x \in A \quad и \quad x \overline{\in} B\}.$$

З а м е ч а н и е. В определении разности $A \setminus B$, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$.

П р и м е р. Пусть $E = \mathbf{N}$ и $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Тогда $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4, 5\}$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть A – множество из E. Дополнением CA множества A (относительно E) называется множество $E \setminus A$. Очевидно, что $CA = \{x \in E | x \overline{\in} A\}$. Символ C называется символом операции дополнения.*

П р и м е р. Пусть $E = \mathbf{N}$ и A – множество всех простых чисел, тогда $\mathrm{C}A$ есть множество, состоящее из всех составных чисел и числа 1.

Операция перехода от A к $\mathrm{C}A$, для которой нет аналога в обычной алгебре чисел, обладает следующими свойствами:

19) $A \cup \mathrm{C}A = E$; 20) $A \cap \mathrm{C}A = \varnothing$; 21) $\mathrm{C}\varnothing = E$;

22) $\mathrm{C}E = \varnothing$; 23) $\mathrm{C}\mathrm{C}A = A$; 24) отношение $A \subset B$, эквивалентное отношение $\mathrm{C}B \subset \mathrm{C}A$;

25) $\mathrm{C}(A \cup B) = \mathrm{C}A \cap \mathrm{C}B$ и вообще $\mathrm{C}(\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha) = \bigcap\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$;

26) $\mathrm{C}(A \cap B) = \mathrm{C}A \cup \mathrm{C}B$ и вообще $\mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$.

Докажем для примера формулу 26) $\mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) = \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$.

Пусть $x \in \mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$, тогда x не может принадлежать всем A_α, т. е. $x \in \mathrm{C}A_\alpha$ хотя бы для одного α, но тогда $x \in \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$, откуда имеем $\mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha) \subset \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$. Пусть теперь $x \in \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha$, т. е. $x \in \mathrm{C}A_\alpha$ хотя бы для одного α, но тогда $x \overline{\in} \bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$, т. е. $x \in \mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$, откуда $\bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}A_\alpha \subset \mathrm{C}(\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha)$, но тем самым формула 26) доказана.

З а д а н и е. Доказать остальные свойства 19)–25) самостоятельно.

З а м е ч а н и е. Законы 19)–26), как и законы 1)–18), обладают «двойственностью» относительно указанных ранее перестановок символов.

З а м е ч а н и е. Для операции вычитания можно отметить следующие свойства:

$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$;

$A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$; $\quad A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$.

Если $A \subset B$, то $A \cap \mathrm{C}B = \varnothing$. (Доказательство этих свойств провести самостоятельно.)

Пусть A и B – множества (из E) и $a \in A$, $b \in B$ – элементы этих множеств. Рассмотрим упорядоченную пару $c = (a, b)$. Тогда равенство $(a, b) = (a', b')$ означает, что $a = a'$ и $b = b'$; в частности, равенство $(a, b) = (b, a)$ приводит к $a = b$. Первый (соответственно второй) элемент упорядоченной пары $c = (a, b)$ называется первой (соответственно второй) проекцией пары c и обозначается символом $a = \mathrm{pr}_1 c$ (соответственно $b = \mathrm{pr}_2 c$).

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – множества из E. Тогда декартовым произведением множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$.* Таким образом, $A \times B = \{c = (a, b) | a \in A \text{ и } b \in B\}$.

Из определения декартова произведения вытекают следующие его свойства:

1) отношение $A \times B = \varnothing$ эквивалентно отношению $A = \varnothing$ или $B = \varnothing$;

2) если $A \times B \neq \varnothing$ (это означает, что $A \neq \varnothing$ и $B \neq \varnothing$), то отношение $A' \times B' \subset A \times B$ эквивалентно отношению $A' \subset A$ и $B' \subset B$;

3) $(A \times B) \cup (A' \times B) = (A \cup A') \times B$;

4) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$.

Докажем, например, равенство 4). Введем обозначения

$F = (A \times B) \cap (A' \times B'), \quad G = (A \cap A') \times (B \cap B')$.

Пусть $z = (x, y) \in F$, тогда включение $z \in A \times B$ дает $x \in A$ и $y \in B$, а включение $z \in A' \times B'$ дает $x \in A'$ и $y \in B'$, поэтому $x \in A \cap A'$ и $y \in B \cap B'$, откуда $z \in G$, т. е.

$$F \subset G. \tag{1.5}$$

Далее, пусть $z = (x, y) \in G$, тогда $x \in A \cap A'$ и $y \in B \cap B'$. Но из $x \in A$ и $y \in B$ имеем $z \in A \times B$, а из $x \in A'$ и $y \in B'$ имеем $z \in A' \times B'$, откуда $z \in F$ и поэтому

$$G \subset F. \tag{1.6}$$

Из включений (1.5) и (1.6) имеем равенство 4).

Пример. Пусть $A = \{1, 2, 3\} \subset \mathbf{N}$ и $B = \{1, 2\} \subset \mathbf{N}$. Тогда $(1, 2) \neq (2, 1)$, так как $a_1 = 1 \neq 2 = a_2$, $b_1 = 2 \neq 1 = b_2$, $(1, 2) \neq (1, 1)$, так как хотя $a_1 = 1 = a_2$, но $b_1 = 2 \neq 1 = b_2$, $(2, 2) = (2, 2)$.

Пример. Пусть XOY – декартова двумерная плоскость, где OX – ось абсцисс, а OY – ось ординат. Пусть $A = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \in \mathbf{R} | 0 \leq y \leq 1\}$. Тогда множество $A \times B = \{(x, y) \in XOY | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ есть квадрат на плоскости XOY.

Обобщение. Декартовым произведением множеств A_1, A_2, ..., A_n называется множество (обозначаемое символом $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$) всех упорядоченных систем из n элементов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, ..., $a_n \in A_n$, т. е. $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) | a_i \in A_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$. Если $c = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то $a_i = \mathrm{pr}_i c$ есть i-я проекция элемента c.

Рассмотрим некоторые понятия математической логики. Любая теорема, доказываемая в математике, состоит в том, что задается некоторое свойство A, называемое условием, и из него с помощью логических рассуждений выводится свойство B, называемое заключением. Отметим некоторые логические операции, не вдаваясь в их математическое обоснование, поскольку это будет серьезно рассмотрено в курсе математической логики.

1. Логическая операция импликация. Обозначение $\Rightarrow$. $A \Rightarrow B$ означает, что свойство A влечет свойство B.

Пример. Пусть $x \in \mathbf{R}$. Рассмотрим свойства $A : x < 3$ и B: $x < 4$. Тогда $A \Rightarrow B$.

Замечание. Если $A \Rightarrow B$, то обратная теорема записывается в виде $B \Rightarrow A$.

Из приведенного выше примера следует, что обратная теорема, вообще говоря, может и не быть справедливой. Далее, пусть $X = \{x \in \mathbf{R}|A\}$ и $Y = \{y \in \mathbf{R}|B\}$, тогда $A \Rightarrow B$ соответствует отношению $X \subset Y$.

Замечание. Операция импликации $\Rightarrow$ вполне аналогична операции включения $\subset$ из алгебры множеств.

2. Логическая операция тождество. Обозначение $\Leftrightarrow$. Если для данной теоремы $A \Rightarrow B$ справедлива и обратная теорема $B \Rightarrow A$, то свойства A и B эквивалентны, что и записывается в виде $A \Leftrightarrow B$, а словами выражается в форме: «для того чтобы было справедливо A, необходимо и достаточно выполнения B».

Замечание. Логическая операция тождества $\Leftrightarrow$ вполне аналогична операции $=$ в алгебре множеств.

3. Логическая операция отрицание. Обозначение $\bar{}$ или $\neg$. Утверждение, противоположное некоторому свойству A, записывается в виде «не A» или $\overline{A}$, или $\neg A$.

Пример. Пусть $x \in \mathbf{R}$. Рассмотрим свойство A: $x < 3$. Тогда свойство $\neg A = \overline{A} : x \geq 3$. Вводя множества $X = \{x \in \mathbf{R}|A\}$, $Y = \{x \in \mathbf{R}|\overline{A}\}$, видим, что $Y = CX = \mathbf{R} \setminus X$. Вообще, если $x \in E$ и $X \subset E$, то свойству $A : x \in X$ соответствует $\neg A : x \overline{\in} X$.

Замечание. Логическая операция отрицания вполне аналогична операции дополнения C в алгебре множеств.

Замечание. Всегда справедливо утверждение: не не $A \Leftrightarrow A$, т. е. $\neg\neg A = A$, $\overline{(\overline{A})} = A$.

Замечание. Имеет место принцип исключенного третьего, т. е. для любого свойства A справедливо утверждение: «или A или не A».

Теорема. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$.

Доказательство. 1. Пусть имеет место $A \Rightarrow B$ и пусть при этом имеет место $\neg B$. Тогда в силу принципа исключенного третьего должно быть справедливо $\neg A$ (иначе, в силу $A \Rightarrow B$, было бы справедливо B, а не $\neg B$), т. е. $\neg B \Rightarrow \neg A$.

2. Пусть имеет место $\neg B \Rightarrow \neg A$. Тогда по доказанному выше имеем $\neg(\neg A) \Rightarrow \neg(\neg B)$, т. е. $A \Rightarrow B$.

4. Логическая операция «или». Обозначение $\vee$. Если некоторый объект обладает свойством A или свойством B, то пишут что оно удовлетворяет «A или B» и иначе в символическом виде $A \vee B$. Отметим, что утверждение «A или B» вовсе не исключает одновременного выполнения и A и B.

Пример. Пусть $x \in \mathbf{R}$ и $A : -1 \leq x \leq 0$, $B : 0 \leq x \leq 3$. Тогда $A \vee B : -1 \leq x \leq 3$. Заметим, что если $X = \{x \in \mathbf{R}|A\}$ и $Y = \{x \in \mathbf{R}|B\}$, то $X \bigcup Y = \{x \in \mathbf{R}|A \vee B\}$.

З а м е ч а н и е. Операция $\vee$ вполне аналогична операции объединения $\bigcup$ из алгебры множеств.

5. Логическая операция «и». Обозначение $\wedge$ (&). Если имеют место одновременно свойства A и B, то это записывается в виде $A \wedge B$ или же «A и B», или же $A\&B$.

З а м е ч а н и е. Операция логического «и» вполне аналогична операции пересечения $\bigcap$ в алгебре множеств.

Докажите самостоятельно следующие свойства введенных выше логических операций:

$$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B},\ \overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

или

$$\overline{A \vee B} = \overline{A}\&\overline{B},\ \overline{A\&B} = \overline{A} \vee \overline{B}.$$

Будем в дальнейшем использовать знакомые по школьному курсу кванторы $\exists$ и $\forall$. Квантор существования $\exists$ означает выражение «существует» или «существуют». Квантор общности $\forall$ заменяет слова «для любого», «для каждого».

Пусть дано множество X и свойство $A(x)$ (где $x \in X$). Тогда символическая запись $(\forall x \in X)\ (A(x))$ означает: для любого элемента x, принадлежащего множеству X, имеет место $A(x)$ (т. е. выполнено свойство A). Символическая запись $(\exists x \in X)\ (A(x))$ означает: существует элемент x из множества X, для которого выполнено свойство A.

Используя операцию отрицания, имеем

$$\overline{(\forall x \in X)(A(x))} \Leftrightarrow (\exists x \in X)(\overline{A}(x)),$$

а также

$$\overline{(\exists x \in X)(A(x))} \Leftrightarrow (\forall x \in X)(\overline{A}(x)).$$

§ 2. Понятия отображения и функции

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – два непустых множества. Отображением A в B или функцией, определенной на A со значениями в B, называется соответствие f, которое каждому элементу $x \in A$ соотносит (ставит в соответствие) единственный элемент $y \in B$, обозначаемый через $f(x)$.*

Обозначения для отображения (функции): $A \xrightarrow{f} B$; $f : A \to B$; $f : y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$; $f : x \in A$, $f(x) \in B$; $y = f(x)$, $x \in A$, $y \in B$; $x \to f(x)$. Элемент $f(x)$ при отображении $x \to f(x)$ называется значением функции $f(x)$, принимаемым в точке x. Множество A при отображении $f : A \to B$ называется областью определения или областью существования отображения (функции) f. Множество всех значений функции f называется ее областью значений (или множеством значений). Таким образом, если Y – множество значений функции $f : A \to B$, то $Y = \{y \in B | \exists x \in A$ такое, что $f(x) = y\}$. Следует различать отображение f и элемент $f(x)$, соответствующий x при этом отображении.

Примеры. 1. Равенство $y = x^2$ ставит в соответствие любому $x \in \mathbf{R}$ единственное число $y \in \mathbf{R}$. Например, если $x = 2$, то $y = 4$, если $x = -3$, то $y = 9$. Это равенство задает функцию $x \to x^2$, определенную на множестве $X = \{x \in \mathbf{R} | -\infty < x < +\infty\}$ с областью значений $Y = \{y \in \mathbf{R} | 0 \leq y < +\infty\}$.

Если же обозначить эту функцию символом f, то имеем $f(2) = 4$, $f(-3) = 9$.

2. Равенство $N = n!$ ставит в соответствие любому $n \in \mathbf{N}$ единственное натуральное же число N. Например, если $n = 3$, то $N = 6$, если $n = 5$, то $N = 120$. Таким образом, это равенство задает функцию, определенную на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$ с областью значений, являющейся подмножеством $\mathbf{N} : n \to n!$.

3. Функция $y = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$, $y \in [-1, 1]$. Если $f(x) = \sin x$, то $f(0) = 0$, $f(\pi/2) = 1$; $x \to \sin x$.

4. Пусть A есть множество треугольников x на плоскости, а $B = \mathbf{R}$. Поставим в соответствие любому треугольнику $x \in A$ длину его периметра y, тем самым будет задана функция, определенная на множестве всех треугольников плоскости. Аргументом этой функции будет x, значениями аргумента будут различные треугольники, а значениями функции – периметры треугольников.

5. Любому числу $n \in \mathbf{Z}$ поставим в соответствие точку (n, n). Тогда получим отображение множества всех целых чисел $\mathbf{Z}$ в множество всех точек плоскости: $n \to (n, n)$.

Определение. *Пусть дано отображение $f : A \to B$. Тогда множество $\Gamma = \{(x, y) \in A \times B | x \in A, y = f(x) \in B\}$ называется графиком отображения f.*

6. Пусть A есть отрезок $[-1, 1]$ оси абсцисс OX, а B есть ось ординат OY координатной плоскости XOY, причем Γ есть дуга полуокружности единичного радиуса с центром в начале координат. Тогда Γ есть график отображения

$A \xrightarrow{f} B$, где $f : y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, $y \in B$; $x \to \sqrt{1 - x^2}$.

7. Функция, ставящая любому элементу x своей области определения A одно и то же число c, называется постоянной функцией. Графиком постоянной функции $x \to c$ является множество $\Gamma = \{A\} \times \{c\}$. Постоянная функция $x \to c$ иногда обозначается этой же буквой c.

Определение. *Отображение $f : A \to A$, определенное равенством $f(x) = x$ $\forall x \in A$, называется тождественным.*

Замечание. Если $A \subset B$, то отображение $A \xrightarrow{f} B$, определенное равенством $f(x) = x$, называется канонической инъекцией A в B.

Определение. *Если $A \times B$ – декартово произведение множеств A и B, то отображение $\mathrm{pr}_A : A \times B \to A$ (или $(x, y) \to x$), ставящее в соответствие любой паре $(x, y) \in A \times B$ элемент $x \in$*

A, называется проекцией на A. Аналогично определяется проекция $(x, y) \to y$ на B.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $f : A \to B$ – отображение множества A в множество B. Если $X \subset A$, то множество тех элементов $y \in B$, которые в силу отображения f поставлены в соответствие хотя бы одному элементу $x \in X$, называют образом множества X при отображении f и обозначают через $f(X)$. Итак, $f(X) = \{y \in B | \exists x \in X$ такое, что $f(x) = y\}$.*

З а м е ч а н и е. Очевидно, $f(A)$ – это область значений отображения $f : A \to B$.

П р и м е р. Пусть $f : y = x^2$, $x \in [-4, 4]$, $y \in [0, 16]$ и $X = [-1, 1]$. Тогда $f(X) = [0, 1] \subset B = [0, 16]$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть дано отображение $f : A \to B$. Пусть y есть любой элемент множества B. Полным прообразом элемента y при отображении f называется множество всех $x \in A$ таких, что $f(x) = y$.* Полный прообраз элемента $y \in B$ обозначают через $f^{-1}(y)$. Тогда $f^{-1}(y) = \{x \in A | f(x) = y\}$. Аналогично, если $Y \subset B$, то полным прообразом множества Y при отображении $f : A \to B$ называется множество всех $x \in A$ таких, что $f(x) \in Y$, т. е. $f^{-1}(Y) = \{x \in A | \exists y \in Y$ такое, что $f(x) = y\}$.

П р и м е р. $f : y = \sin x$, $x \in [0, 2\pi]$, $y \in [-1, 1]$ (график функции изображен на рис. 1). Тогда

$f^{-1}(0) = \{0\} \cup \{\pi\} \cup \{2\pi\}$, $f^{-1}([-1/2, 1/2]) =$

$= [0, \pi/6] \cup [5\pi/6, 7\pi/6] \cup [11\pi/6, 2\pi]$.

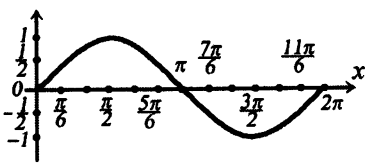


Рис. 1

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : A \to B$ называется взаимнооднозначным, или инъективным, если полный прообраз $f^{-1}(y)$ каждого элемента $y \in B$ состоит не более чем из одного элемента множества A. Другими словами: отображение f множества A в B называется взаимнооднозначным, или инъективным, если никакие два различных элемента из A не имеют одинаковых образов в B; или отображение $f : A \to B$ есть инъекция, если $\forall x_1, x_2 \in A$ имеем $(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$; или если $x_1, x_2 \in A$, то $(x_1 = x_2) \Leftrightarrow (f(x_1) = f(x_2))$.*

З а м е ч а н и е. Каноническая инъекция $x \to x$, $A \to B$ $(A \subset B)$ является взаимнооднозначным отображением.

О п р е д е л е н и е. *Если область значений отображения $f : A \to B$ совпадает с множеством B, то говорят, что f отображает A на B. Отображение $x \to f(x)$ называется при этом сюръективным.*

З а м е ч а н и е. Отображение $f : A \to B$ есть отображение A на $f(A)$, причем $f(A) \subset B$.

Определение. *Отображение $f : A \to B$ называется биективным, если отображение f является взаимнооднозначным отображением A на B (т. е. биекция является одновременно инъективным и сюръективным отображением).*

Примеры. 1. Пусть отображение $f : A \to B$ задано своим графиком $\Gamma = \{(x, y) \in A \times B | x \in A, y = f(x) \in B\}$, изображенным на рис. 2, тогда имеем $f(A) \subset B$, но $f(A) \neq B$.

Заметим, что если отображение f сюръективно, т. е. отображает A на B, то $f(A) = B$, поэтому наше отображение не сюръективно.

2. Пусть отображение $f : A \to B$ задано графиком, изображенным на рис. 3. Тогда $f(A) = B$, т. е. отображение f сюръективно, т. е. отображает A на B.

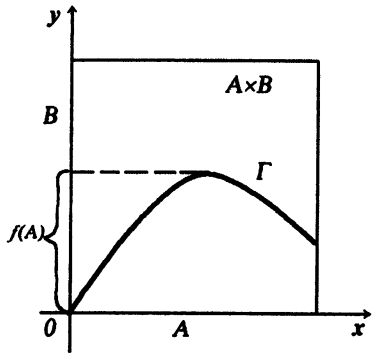


Рис. 2

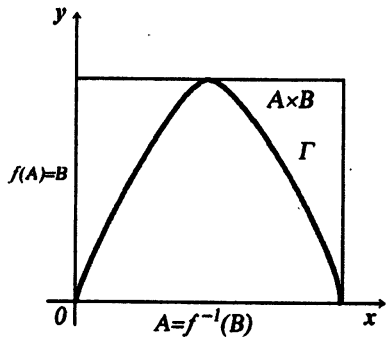


Рис. 3

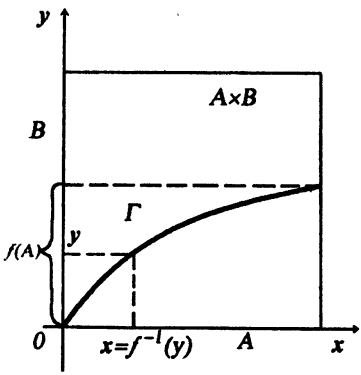


Рис. 4

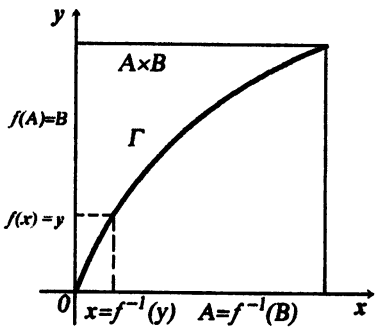


Рис. 5

НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА МГУ

3. Отображение $f : A \to B$ с графиком, изображенным на рис. 4, есть инъекция A в B, так как любая прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $(0, y)$, где $y = f(x)$, пересекает график Γ отображения f только в одной точке (x, y) и поэтому любой $y \in f(A)$ имеет полный прообраз $f^{-1}(y)$, состоящий из единственной точки $x \in A$. Отметим, что отображение $f : A \to B$ не сюръективно и поэтому $f^{-1}(y) = \varnothing \ \forall y \in B \setminus f(A)$.

4. Отображение $f : A \to B$ с графиком, изображенным на рис. 5, есть биекция, поскольку $f(A) = B$ (т. е. f сюръективно) и $\forall y \in B$ существует единственный прообраз $x = f^{-1}(y) \in A$ (т. е. f инъективно).

5. Отображение $f : y = x^2$, $x \in [-1, 1] = A$, $y \in [0, 1] = B$ не является инъективным, поскольку, например, $f(-1) = f(1) = 1$, однако отображение $g : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$ уже инъективно и даже биективно, так как $g([0, 1]) = [0, 1] = B$ и $\forall x_1, x_2 \in [0, 1]$ имеем $(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (x_1^2 \neq x_2^2)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть отображение $f : A \to B$ есть биекция и $y \in B = f(A)$. Тогда полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки $x \in A$ такой, что $f(x) = y$. Введем отображение $f^{-1} : y \to x = f^{-1}(y)$ множества B на A. Отображение f^{-1} вновь является биекцией и называется обратным отображением (обратной функцией) или биекцией к f.*

З а м е ч а н и е. Итак, если отображение $f : A \to B$ есть биекция, то обратная биекция $f^{-1} : B \to A$ ставит в соответствие любому $y \in B$ его единственный прообраз $x \in A$.

З а м е ч а н и е. Если отображение $f : A \to B$ не является биекцией (т. е. не является взаимнооднозначным отображением A на B), то обратного отображения не существует.

$$\boxed{\begin{array}{l} \cdot x = f^{-1}(y) \\ A = f^{-1}(B) \end{array}} \quad \begin{array}{c} f \\ \to \\ \leftarrow \\ f^{-1} \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \cdot y = f(x) \\ B = f(A) \end{array}}$$

З а м е ч а н и е. Если $f : A \to B$ – биекция и $f^{-1} : B \to A$ – обратная биекция, то имеем

$f^{-1}(f(x)) = x \, \forall x \in A = f^{-1}(B)$,

$f(f^{-1}(y)) = y \forall y \in B = f(A)$.

П р и м е р. $f : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $(x \to x^2)$, тогда $f^{-1} : x = \sqrt{y}$, $y \in [0, 1]$, $x \in [0, 1]$, $(y \to \sqrt{y})$.

Пусть $f : A \to B$ и $X \subset A$, $Y \subset B$. Отметим некоторые важные соотношения для образов и полных прообразов при отображении f.

1. $f(\varnothing) = \varnothing$.

2. $(X_1 \subset X_2 \subset A) \Rightarrow (f(X_1) \subset f(X_2) \subset B)$. (Доказательства провести самостоятельно).

3. $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) \cup f(X_2) \, \forall X_1, X_2 \subset A$.

Доказательство. Пусть сначала $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Тогда существует $x \in X_1 \cup X_2$ такое, что $f(x) = y$. Но $x \in X_1 \cup X_2$ означает, что или $x \in X_1$, или $x \in X_2$. В случае $x \in X_1$ имеем $y = f(x) \in f(X_1)$; в случае $x \in X_2$ имеем $y = f(x) \in f(X_2)$, т. е. в обоих случаях имеем включение $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$, откуда а) $f(X_1 \cup X_2) \subset f(X_1) \cup f(X_2)$.

Пусть теперь $y \in f(X_1) \cup f(X_2)$. Тогда или $y \in f(X_1)$, или $y \in f(X_2)$. В случае $y \in f(X_1)$ $\exists x \in X_1$ такое, что $f(x) = y$, и поскольку $X_1 \subset X_1 \cup X_2$, то $(x \in X_1 \cup X_2) \Rightarrow (y = f(x) \in f(X_1 \cup X_2))$.

В случае $y \in f(X_2)$ $\exists x \in X_2 \subset X_1 \cup X_2$ такое, что $f(x) = y$, т. е. $y \in f(X_1 \cup X_2)$. Итак, в обоих случаях имеем $y \in f(X_1 \cup X_2)$, т. е. имеет место включение б) $f(X_1) \cup f(X_2) \subset f(X_1 \cup X_2)$.

Из а) и б) вытекает утверждение 3.

4. $f(X_1 \cap X_2) \subset f(X_1) \cap f(X_2)$ $\forall X_1, X_2 \subset A$. (Доказать самостоятельно.)

Замечание. Равенства $f(X_1 \cap X_2) = f(X_1) \cap f(X_2)$ может и не быть, например, если $f : A \to B$ есть постоянное отображение, т. е. $f(x) = b$ $\forall x \in A$ и $X_1, X_2 \subset A$, но $X_1 \cap X_2 = \varnothing$. Тогда $f(X_1 \cap X_2) = f(\varnothing) = \varnothing$, однако $f(X_1) \cap f(X_2) = \{b\} \neq \varnothing$, т. е. $f(X_1) \cap f(X_2) \neq f(X_1 \cap X_2)$.

5. $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Замечание. Может оказаться, что $\exists Y \subset B$ такое, что $f^{-1}(Y) = \varnothing$, хотя $Y \neq \varnothing$.

Пример. Рассмотри отображение $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, где $f : x \to x^2$, тогда $f^{-1}(-1) = \varnothing$.

6. $f^{-1}(Y_1) \subset f^{-1}(Y_2)$ $\forall Y_1 \subset Y_2 \subset B$. (Доказать самостоятельно.)

7. $f^{-1}(Y_1 \cup Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cup f^{-1}(Y_2)$ $\forall Y_1, Y_2 \subset B$. (Доказать самостоятельно.)

8. $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) = f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$ $\forall Y_1, Y_2 \subset B$.

Доказательство. Пусть сначала $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. Тогда $y = f(x) \in Y_1 \cap Y_2$, но $(y \in Y_1) \Rightarrow (x \in f^{-1}(Y_1))$, а $(y \in Y_2) \Rightarrow (x \in f^{-1}(Y_2))$, т. е. $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$, откуда в) $f^{-1}(Y_1 \cap Y_2) \subset f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2)$.

Пусть теперь $x \in f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \neq \varnothing$. Тогда $(x \in f^{-1}(Y_1)) \Rightarrow (y = f(x) \in Y_1)$, а $(x \in f^{-1}(Y_2)) \Rightarrow (y = f(x) \in Y_2)$, т. е. $y = f(x) \in Y_1 \cap Y_2$, откуда имеем $x \in f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$, так что г) $f^{-1}(Y_1) \cap f^{-1}(Y_2) \subset f^{-1}(Y_1 \cap Y_2)$. Из в) и г) вытекает справедливость 8.

9. $f^{-1}(CY) = Cf^{-1}(Y) \forall Y \subset B$.

Доказательство. Имеем $B = Y \cup CY$, $A = f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \cup CY)$. В силу свойства 7 имеем равенство $f^{-1}(Y \cup CY) = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(CY)$. Заметим, что $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(CY) = \varnothing$, так как в противном случае $\exists x \in A$ такое, что $f(x) \in Y \cap CY = \varnothing$. Это невозможно. Итак, имеем $A = f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(CY)$, причем $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(CY) = \varnothing$, но тогда $f^{-1}(CY) = A \setminus f^{-1}(Y) = Cf^{-1}(Y)$.

10. $f^{-1}(f(X)) \supset X$ $\forall X \subset A$.

Доказательство. Пусть $x \in X$, тогда $f(x) \in f(X) = Y$ и в силу определения полного прообраза $x \in f^{-1}(Y) = f^{-1}(f(X))$, т. е. $X \subset f^{-1}(f(X))$.

11. $f(f^{-1}(Y)) \subset Y \ \forall Y \subset B$.

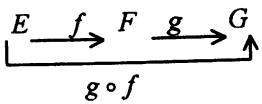
Доказательство. Пусть $y \in f(f^{-1}(Y))$, тогда существует $x_0 \in f^{-1}(Y)$ такое, что $f(x_0) = y$. Поскольку $x_0 \in f^{-1}(Y)$, то в силу определения полного прообраза $f(x_0) = y \in Y \Rightarrow f(f^{-1}(Y)) \subset Y$.

Определение. *Если $f : A \to B$ есть отображение с областью определения A и $X \subset A$ – подмножество A, то сужением функции f на X называется функция $f_X : X \to B$, область определения которой есть X, и такая, что $f_X(x) = f(x) \ \forall x \in X$.* Для сужения f_X используется также обозначение $f|X$.

Замечание. Если f_X является сужением функции $f : A \to B$ на $X \subset A$, то функцию f называют продолжением функции $f_X : X \to B$ на множество A.

Пример. $f : y = x^2$, $x \in [-1, 1] = A$, $y \in [0, 1] = B$. Пусть $X = [0, 1] \subset A$, тогда имеем $f|X : y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$.

Определение. *Пусть E, F и G – непустые множества и $f : E \to F$; $g : F \to G$. Тогда композицией (суперпозицией) $g \circ f$ называется отображение E в G, определенное формулой* $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \ \forall x \in E$. Заметим, что запись $g \circ f$ производится в порядке, обратном тому, в котором производятся операции g и f. При исследовании композиций полезны диаграммы

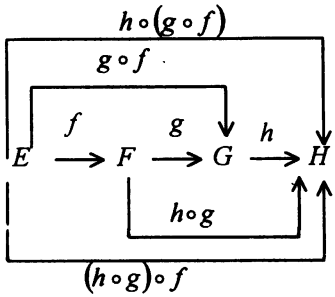


Таким образом, в математическом анализе принято правило, согласно которому в композиции операций $g \circ f$ нужно начинать с операции f, расположенной справа.

Замечание. Если $A \subset E$, то $(g \circ f)(A) = g(f(A))$, если $B \subset G$, то $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \subset E$.

Замечание. Композиция отображений ассоциативна, т. е. если $f : E \to F$; $g : F \to G$; $h : G \to H$, то $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, что проще записывается в виде $h \circ g \circ f$.

На диаграмме это выглядит так:



Замечание. Если f^{-1} является биекцией, обратной к $f : E \to F$, то $f^{-1} \circ f = I_E$, где I_E – тождественное отображение E (на E) и $f \circ f^{-1} = I_F$, где I_F – тождественное отображение F (на F).

Пример. Пусть $g : y = u^2$, $u \in (-\infty, +\infty)$, $f : u = x + 1$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, тогда $g \circ f : y = (x+1)^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in [0, +\infty)$.

При рассмотрении числовых функций $f : A \to B$, где $B \subset \mathbf{R}$ выделяют класс числовых (или действительных) функций одного действительного переменного, т. е. функции $f(x)$ вида $f : A \to B$, где A и B являются подмножествами множества действительных чисел $\mathbf{R}$ ($A \subset \mathbf{R}, B \subset \mathbf{R}$).

Замечание. Функция $n \to f(n)$, определенная на множестве $\mathbf{N}$ всех натуральных чисел, называется (числовой при $f(n) \in \mathbf{R}$) последовательностью. Ее значение, или член последовательности, для данного $n \in \mathbf{N}$ обычно обозначают через a_n, а сама последовательность обозначается символами (a_n) или $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Таким образом, (a_n) есть отображение $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Определение. *Скажем, что числовые функции $f : y = f(x)$, $x \in X_f$, $y \in Y_f = f(X_f)$ и $g : y = g(x)$, $x \in X_g$, $y \in Y_g = g(X_g)$ совпадают, если: 1) совпадают их области определения $X_f = X_g$ и 2) $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X = X_f = X_g$.*

Простейшими элементарными функциями одного действительного переменного будем называть следующие функции:

1) рациональные функции $f(x) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \bigcup\limits_l \{x_l\}$, где $P_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $Q_m(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ – многочлены и x_l – действительное число, такое, что $Q_m(x_l) = 0$;

2) степенная функция $y = x^\alpha$, $0 < x < +\infty$, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$; $0 \le x < +\infty$, $\alpha \in (0, +\infty)$;

3) показательная функция $y = a^x$, $-\infty < x < +\infty$, $a > 0$, $a \ne 1$;

4) логарифмическая функция $y = \log_a x$, $0 < x < +\infty$, $a > 0$, $a \ne 1$;

5) тригонометрические функции:

$y = \sin x$, $-\infty < x < +\infty$, $-1 \le y \le 1$;

$y = \cos x$, $-\infty < x < +\infty$, $-1 \le y \le 1$;

$y = \operatorname{tg} x$, $(2k-1)\dfrac{\pi}{2} < x < (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$;

$y = \operatorname{ctg} x$, $k\pi < x < (k+1)\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$;

6) обратные тригонометрические функции:

$y = \arcsin x$, $-1 \le x \le 1$, $-\dfrac{\pi}{2} \le y \le \dfrac{\pi}{2}$;

$y = \arccos x$, $-1 \le x \le 1$, $0 \le y \le \pi$;

$y = \operatorname{arctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$;

$y = \operatorname{arcctg} x$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < y < \pi$.

О п р е д е л е н и е. *Элементарными функциями называются функции, получающиеся из простейших элементарных функций посредством конечного числа арифметических действий или композиций этих функций.*

П р и м е р. Функция $y = |x|$, $x \in (-\infty; +\infty)$ элементарная ($|x| = \sqrt{x^2}$).

П р и м е р. Функция $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} 1, x > 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$ элементарная.

П р и м е р. Функция $\operatorname{sgn} x$ не элементарная.

§ 3. Счетные и несчетные множества

О п р е д е л е н и е. *Пусть A и B – непустые множества. Если существует биекция (т. е. взаимнооднозначное отображение на) $f : A \to B$ множества A на B, то множества A и B называются равномощными.* Запись: $A \sim B$.

Отношение $\sim$ обладает следующими свойствами эквивалентности: 1) $A \sim A$ (рефлексивность); 2) $(A \sim B) \Rightarrow (B \sim A)$ (симметричность); 3) $(A \sim B) \wedge (B \sim C) \Rightarrow (A \sim C)$ (транзитивность).

О п р е д е л е н и е. *Если $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $A \sim J_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, то непустое множество A называется конечным, в противном случае непустое множество A называется бесконечным.*

П р и м е р. Множество $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n\}$ конечно, так как отображение $k \to 2k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) множества J_n на A есть биекция и поэтому $A \sim J_n$.

О п р е д е л е н и е. *Непустое множество A называется счетным, если $A \sim \mathbf{N}$ (где $\mathbf{N}$ – множество натуральных чисел).*

П р и м е р ы:

а) Пусть $A = \{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ – множество всех четных натуральных чисел. Тогда отображение $n \to 2n$ множества $\mathbf{N}$ на A есть биекция, и поэтому $A \sim \mathbf{N}$, т. е. A счетно;

б) рассмотрим множество всех целых чисел $\mathbf{Z}$. Тогда отображение $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$, где

$$a_n = \begin{cases} n/2 & \text{при } n \text{ четном}, \\ (1-n)/2 & \text{при } n \text{ нечетном} \end{cases}$$

есть биекция $\mathbf{N}$ на $\mathbf{Z}$, поэтому $\mathbf{Z} \sim \mathbf{N}$, т. е. множество $\mathbf{Z}$ счетно;

в) пусть Δ_1 и Δ_2 – любые два отрезка. Построим прямоугольник со сторонами Δ_1 и Δ_2. Тогда диагональ $\Gamma \subset \Delta_1 \times \Delta_2$ этого прямо-

угольника будет являться графиком отображения

$$f : \Delta_1 \to \Delta_2 \left(x \to \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \cdot x,\ x \in \Delta_1 \right).$$

Очевидно, f отображает Δ_1 на Δ_2, и притом взаимнооднозначно, т. е. является биекцией. Но тогда $\Delta_1 \sim \Delta_2$.

Следствие. Если множество A счетно, то по определению существует биекция N на A, и поэтому элементы множества A можно записать в виде последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, причем $(n \neq m) \Leftrightarrow (a_n \neq a_m\ \forall m, n \in \mathrm{N})$. Иными словами, элементы счетного множества можно занумеровать в последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ так, что различные элементы получат и различные номера. Обратно, если элементы множества A можно занумеровать таким способом, то множество A счетно.

Определение. *Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется несчетным множеством.*

Теорема. *Всякое непустое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.*

Доказательство. Пусть непустое множество A счетно (т. е. $A \sim \mathrm{N}$), тогда его элементы можно расположить в последовательность

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, \tag{3.1}$$

причем $(n \neq m) \Leftrightarrow (a_n \neq a_m)$. Пусть $B \neq \varnothing$, $B \subset A$ и a_{n_1} – первый элемент последовательности (3.1), являющийся элементом B, так что $a_{n_1} \in B$. Пусть a_{n_2} – второй такой элемент последовательности (3.1), так что $n_2 > n_1$ и $a_{n_2} \in B$ и т. д. Возможны лишь два случая: 1) после конечного числа шагов все множество B будет исчерпано; 2) получим бесконечную последовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots$; $n_k > n_l$ при $k > l$, состоящую из всех элементов множества B. В случае 1) множество B конечно. В случае 2) положим $b_k = a_{n_k}$, тогда множество B оказывается расположенным в последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots$, причем $(k \neq l) \Leftrightarrow (n_k \neq n_l)$, и поэтому $(b_k = a_{n_k} \neq a_{n_l} = b_l) \Leftrightarrow (k \neq l)$. Отображение $k \to b_k$ есть биекция N на B, поэтому $B \sim \mathrm{N}$, т. е. в случае 2) множество B счетно.

Следствие. Любое бесконечное подмножество счетного множества счетно.

Определение. *Множество $A \neq \varnothing$ называется не более чем счетным, если оно конечно или счетно.*

Теорема. *Объединение счетного множества счетных множеств счетно.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ $(n \in \mathrm{N})$ – семейство счетных множеств и $S = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$. Расположим каждое множество A_n в

последовательность $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_k^{(n)}, \ldots$ и рассмотрим бесконечную таблицу

$$\begin{array}{ccccccc}
a_1^{(1)} & \to & a_2^{(1)} & a_3^{(1)} & \to & a_4^{(1)} & \ldots \\
 & \swarrow & \nearrow & & \swarrow & \nearrow & \ldots \\
a_1^{(2)} & & a_2^{(2)} & a_3^{(2)} & & a_4^{(2)} & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow \quad \ldots \\
a_1^{(3)} & & a_2^{(3)} & a_3^{(3)} & & a_4^{(3)} & \ldots \\
 & \swarrow & \nearrow & & \swarrow & & \ldots,
\end{array}$$

в которой элементы множества A_n образуют n-ю строку. Эта таблица содержит все элементы множества S. Эти элементы можно расположить в последовательность, как это указано стрелками:

$$a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, a_1^{(2)}, a_1^{(3)}, a_2^{(2)}, a_3^{(1)}, a_4^{(1)}, \ldots.$$

Полученной последовательности соответствует некоторая нумерация

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots (b_1 = a_1^{(1)}, b_2 = a_2^{(1)}, \ldots) \tag{3.2}$$

элементов из S, задающая отображение $n \to b_n$ множества $\mathbf{N}$ на S. При этом отображение $n \to b_n$ может не быть взаимнооднозначным, если какие-либо два множества A_k и A_l (при $k \neq l$) имеют общие элементы (поскольку эти общие элементы появятся в последовательности (3.2) более одного раза). Однако, перебирая один за другим элементы в последовательности (3.2) и оставляя в (3.2) при этом только различные элементы, видим, что существует подмножество $T \subset \mathbf{N}$ такое, что $S \sim T$. Поскольку T есть подмножество счетного множества $\mathbf{N}$, то множество T, а стало быть, и множество $S \sim T$ не более чем счетно. По условию A_1 счетно и потому бесконечно. Но $S \supset A_1$, поэтому и S бесконечно. Итак, S бесконечно и не более чем счетно, т. е. счетно.

Следствие. Объединение не более чем счетного множества не более чем счетных множеств не более чем счетно. (Доказать самостоятельно.)

Теорема (Кантора). *Пусть множество A состоит из всех последовательностей вида (a_n), т. е. $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_n = \begin{cases} 0 \\ 1. \end{cases}$*

Тогда множество A несчетно.

Доказательство. Допустим противное, т. е. предположим, что все такие последовательности можно занумеровать:

$$\begin{array}{lccccc}
(1) & a_1^{(1)}, & a_2^{(1)}, & \ldots, & a_n^{(1)}, & \ldots \\
(2) & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}, & \ldots, & a_n^{(2)}, & \ldots \\
(n) & a_1^{(n)}, & a_2^{(n)}, & \ldots, & a_n^{(n)}, & \ldots
\end{array}$$

Докажем, что в множестве A есть последовательность, не входящая в нумерацию. Возьмем последовательность, где первый элемент

отличен от $a_1^{(1)}$, второй отличен от $a_2^{(2)}$ и т. д. Обозначим построенную последовательность через $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$. Эта последовательность отличается от всех пронумерованных хотя бы одним элементом. В самом деле, если бы она имела номер (k), то имели бы $b_k = a_k^{(k)}$, но по построению $b_k \neq a_k^{(k)}$. Таким образом, множество A не может быть счетным, т.е. A (будучи бесконечным) несчетно.

Глава 2

ПОЛЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

§ 1. Поле, упорядоченное поле, полное упорядоченное поле

В арифметике было введено понятие множества натуральных чисел $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots, n, \ldots\}$. Понятие натурального числа будем считать первичным. Обоснование теории натуральных чисел можно найти в книге Э. Ландау [1]. Приведем два утверждения из теории натуральных чисел, которые будут часто использоваться в нашем курсе.

Принцип минимума. *В любом непустом множестве натуральных чисел существует минимальное число. Скажем, что* $p \in \mathbf{N}$ *является минимальным для множеств* $A \subset \mathbf{N}$, *если* $p \in A$ *и* $p \leq m \ \forall m \in A$.

Принцип минимума является одной из аксиом теории натуральных чисел.

Принцип математической индукции. *Пусть некоторое множество* A *натуральных чисел* $(A \subset \mathbf{N})$ *удовлетворяет следующим двум условиям: 1)* $1 \in A$; *2) если* $n \in A$, *то* $(n+1) \in A$. *Тогда множество* A *содержит все натуральные числа, т. е.* $A = \mathbf{N}$. (Заметим, что если принцип минимума взят в качестве аксиомы, то принцип математической индукции доказывается в качестве теоремы, при этом верно и обратное утверждение.)

Доказательство. Допустим от противного, что $\complement A = \mathbf{N} \setminus A \neq \varnothing$. Тогда $\complement A \cap A = \varnothing$ и $A \neq \varnothing$. В силу принципа минимума $\exists n_0 \in \complement A$ такое, что $\forall m \in \complement A \Rightarrow m \geq n_0$, $n_0 \overline{\in} A$. В силу условия 1) $n_0 > 1$, но тогда $(n_0 - 1) \in \mathbf{N}$, и, кроме того, поскольку $(n_0 - 1) \overline{\in} \complement A$, то $(n_0 - 1) \in A$. Но тогда в силу условия 2) $(n_0 - 1) + 1 = n_0 \in A$, что противоречит отношению $n_0 \overline{\in} A$. Итак, $\complement A = \varnothing$, т. е. $A = \mathbf{N}$.

Пример. Докажем, что $\forall n \in \mathbf{N}$ имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Пусть

$$A = \left\{ n \in \mathbf{N} \mid \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) \right\}.$$

Заметим, что $(n = 1) \Rightarrow \left(1^2 = \frac{1}{6}(1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1) \right)$, т. е. $1 \in A$.

Далее, если $n \in A$, то

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) =$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[(n+1)+1][2(n+1)+1],$$

откуда следует, что и $(n+1) \in A$. В силу принципа математической индукции имеем $A = \mathbf{N}$, т. е. наша формула справедлива $\forall n \in \mathbf{N}$.

Натуральные числа $\mathbf{N}$, нуль и отрицательные натуральные числа образуют множество целых чисел $\mathbf{Z}$. Отношения вида $\frac{m}{n}$ (где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$) образуют рациональные числа. Множество всех рациональных чисел будем обозначать через $\mathbf{Q}$. Очевидно, $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q}$. В элементарной математике были введены операции сложения и умножения рациональных чисел, правило сравнения этих чисел и указаны некоторые свойства этих операций и отношений. Множество рациональных чисел $\mathbf{Q}$, в котором определены сложение и умножение, образуют так называемое поле. Дадим определение поля.

Определение. *Непустое множество $\mathcal{F}$ называется полем, если на $\mathcal{F}$ определены две (бинарные) операции, называемые сложением и умножением (так, что $\forall x, y \in \mathcal{F}\ \exists z = x+y \in \mathcal{F}$ и $\exists v = x \cdot y \in \mathcal{F}$), причем*

I. Для сложения: 1) справедлив закон ассоциативности $x + (y + z) = (x + y) + z\ \forall x, y, z \in \mathcal{F}$; 2) $\exists$ элемент 0 множества $\mathcal{F}$ такой, что $x + 0 = x\ \forall x \in \mathcal{F}$; 3) $\forall x \in \mathcal{F}\ \exists (-x) \in \mathcal{F}$ такой, что $x + (-x) = 0$; 4) справедлив закон коммутативности $x + y = y + x\ \forall x, y \in \mathcal{F}$.

II. Для умножения: 1) справедлив закон ассоциативности $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z\ \forall x, y, z \in \mathcal{F}$; 2) существует элемент 1 множества $\mathcal{F}$ такой, что $1 \neq 0$ и $x \cdot 1 = x \forall x \in \mathcal{F}$; 3) $\forall x \in \mathcal{F}$, $x \neq 0\ \exists x^{-1} \in$

$\mathcal{F}$ такой, что $x \cdot x^{-1} = 1$; 4) справедлив закон коммутативности $x \cdot y = y \cdot x \, \forall x, y \in \mathcal{F}$.

III. Для сложения и умножения: 1) справедлив закон дистрибутивности умножения относительно сложения $x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$ $\forall x, y, z \in \mathcal{F}$.

З а м е ч а н и я. Элемент 0 поля $\mathcal{F}$ из I называется нулем поля $\mathcal{F}$. Элемент $(-x)$ поля $\mathcal{F}$ из I называется противоположным для элемента x, причем, очевидно, $(-0) = 0$ и $-(-x) = x \, \forall x \in \mathcal{F}$. Бинарная операция $x - y$ определяется формулой $x - y = x + (-y) \, \forall x, y \in \mathcal{F}$ и называется вычитанием. Пользуясь законом III, легко доказать дистрибутивность вычитания относительно умножения, т. е. $(x-y)z = xz - yz \, \forall x, y, z \in \mathcal{F}$. В самом деле, используя закон III и определение вычитания, имеем $x \cdot z = ((x-y)+y) \cdot z = (x-y) \cdot z + y \cdot z$, т. е. $(x-y) \cdot z + y \cdot z = x \cdot z$, что и означает равенство $(x-y) \cdot z = x \cdot z - y \cdot z$, откуда вытекает, что $x \cdot 0 = 0$ $\forall x \in \mathcal{F}$. (В самом деле, $x \cdot 0 = x \cdot (y-y) = x \cdot y - x \cdot y = 0$.) Элемент 1 из II называется единицей поля $\mathcal{F}$. Элемент x^{-1} из II называется обратным для $x \neq 0$, причем, очевидно, $1^{-1} = 1$ и $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x \, \forall x \in \mathcal{F}$, если $x \neq 0$. Бинарная операция $\frac{x}{y}$, определяемая формулой $\frac{x}{y} \equiv x \cdot y^{-1}$ $\forall x, y \in \mathcal{F}$, где $y \neq 0$, называется делением. Очевидно $\frac{1}{1} = 1$ и $\frac{1}{x} = x^{-1}$ $\forall x \neq 0$.

З а м е ч а н и е. Пользуясь законами I, II и III, можно доказать (это будет сделано в курсе алгебры), что $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$; $(-x) = (-1) \cdot x$; $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y \, \forall x, y \in \mathcal{F}$, в частности, $(-1) \cdot (-1) = 1$. (Например, в силу закона III имеем $(-x) \cdot y + x \cdot y = ((-x) + x) \cdot y = 0 \cdot y = 0 \Rightarrow$ $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) \, \forall x, y \in \mathcal{F}$.)

П р и м е р. Множество натуральных чисел $\mathbf{N}$ с арифметическими операциями сложения и умножения не есть поле, так как оно не содержит 0 и $\forall n \in \mathbf{N}$ не существует элементов $(-n)$ и n^{-1} (если $n \neq 1$) из $\mathbf{N}$.

П р и м е р. Множество $\mathbf{Z}$ всех целых чисел с арифметическими операциями сложения и умножения не является полем, так как для $x \in \mathbf{Z}$, $x \neq 1$, $x \neq 0$ не существует элемента x^{-1} из $\mathbf{Z}$.

П р и м е р. Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел с арифметическими операциями сложения и умножения является полем.

О п р е д е л е н и е. *Упорядоченным полем называется поле $\mathcal{F}$, в котором определены отношения $<$, $=$, $>$, обладающие следующими свойствами:*

1) $\forall x, y \in \mathcal{F}$ справедливо и притом только одно из следующих утверждений: $x < y$, $x = y$, $x > y$;

2) $(x > y) \wedge (y > z) \Rightarrow (x > z) \, \forall x, y, z \in \mathcal{F}$ (транзитивность отношения $>$), $(x = y) \wedge (y = z) \Rightarrow (x = z)$ (транзитивность отношения $=$);

3) $(x > y) \Rightarrow (x + z > y + z)\ \forall x, y, z \in \mathcal{F}$;

4) $(x > y) \wedge (z > 0) \Rightarrow (x \cdot z > y \cdot z)\ \forall x, y, z \in \mathcal{F}$.

Замечание. Можно показать, что $(x > y) \Leftrightarrow (y < x)$.

Следствие 1. $(x > y) \wedge (z > u) \Rightarrow (x + z > y + u)\ \forall x, y, z, u \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Из $(x > y) \wedge (z > u) \Rightarrow (x + z > y + z)$ и $y + z > y + u$, откуда ввиду транзитивности отношения $>$ имеем $x + z > y + u$.

Следствие 2. $(x > 0) \Rightarrow (-x < 0)\ \forall x \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Если $x > 0$, то из закона 3) имеем $((-x) + x > (-x) + 0 = -x) \Rightarrow (0 > -x)$.

Следствие 3. $(x > 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow x \cdot y < 0$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathcal{F}$, $x > 0$ и $y < 0$, тогда $-y > 0$, поэтому $((x > 0) \wedge (-y > 0)) \Rightarrow (x \cdot (-y) > 0) \Rightarrow (-x \cdot y > 0) \Rightarrow ((x \cdot y) < 0)$.

Следствие 4. $x^2 > 0\ \forall x \in \mathcal{F}$, $x \neq 0$, в частности, $1 = 1^2 > 0$.

Доказательство. Пусть $x \in \mathcal{F}$, $x \neq 0$. В случае $x > 0$ из закона 4) имеем $x^2 > 0$. В случае $x < 0$ имеем $-x > 0$ и поэтому $x^2 = (-x) \cdot (-x) > 0$.

Следствие 5. $x^{-1} > 0\ \forall x \in \mathcal{F}\ x > 0$.

Доказательство. Поскольку $x \cdot x^{-1} = 1 > 0$, то из $x > 0$ следует $x^{-1} > 0$.

Следствие 6. $\forall x, y \in \mathcal{F}$, $x > y > 0 \Rightarrow x^{-1} < y^{-1}$.

Доказательство. Если $x > y > 0$, то $x \cdot y^{-1} > y \cdot y^{-1} = 1 > 0$, откуда $(x^{-1}(x \cdot y^{-1}) > x^{-1}) \Rightarrow (y^{-1} > x^{-1})$.

Замечание 1. Поле рациональных чисел $\mathbf{Q} \supset \mathbf{Z}$ становится упорядоченным полем, если, используя естественную упорядоченность $\mathbf{Z}$, ввести отношения $>$, $=$, $<$ следующим образом: пусть $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2} \in \mathbf{Q}$, т. е. $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$ и $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, тогда $\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2}$, если $m_1 n_2 > m_2 n_1$, и $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$, если $m_1 n_2 = m_2 n_1$.

Замечание 2. Упорядоченное поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$ плотно в себе, т. е. для любых двух рациональных чисел $x, y \in \mathbf{Q}$, таких, что $x < y$ $\exists z \in \mathbf{Q}$, для которого $x < z < y$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbf{Q}$ и $x < y$, тогда $z = (x + y)/2 \in \mathbf{Q}$ таково, что $x < z < y$. В самом деле,

$$\left.\begin{array}{l} (x < y) \Rightarrow (x + x < y + x) \Rightarrow \left(x < \dfrac{x+y}{2}\right) \\ (x < y) \Rightarrow (x + y < y + y) \Rightarrow \left(\dfrac{x+y}{2} < y\right) \end{array}\right\} \Rightarrow x < z < y.$$

Замечание 3. Если $(x > y) \vee (x = y)$, то пишут $x \geq y$.

Определение. *Если $\mathcal{F}$ – упорядоченное поле, то абсолютная величина (модуль) $|x|$ элемента $x \in \mathcal{F}$ определяется следующим образом:*

$$|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Отметим свойства абсолютных величин:

1) $|x| \geq 0\ \forall x \in \mathcal{F}$, причем $(|x| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$ (свойство 1) вытекает из определения модуля $|x|$).

2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|\ \forall x, y \in \mathcal{F}$.

Доказательство. Если $x = 0$ или $y = 0$, то свойство 2) очевидно. Пусть $x \cdot y \neq 0$. Рассмотрим два случая:

а) $x \cdot y > 0$. Тогда $|x \cdot y| = |(\pm|x|) \cdot (\pm|y|)| = ||x| \cdot |y|| = |x| \cdot |y|$;

б) $x \cdot y < 0$. Тогда $|x \cdot y| = |(\pm|x|) \cdot (\mp|y|)| = |-(|x| \cdot |y|)| = |x| \cdot |y|$.

3) Пусть $x, \varepsilon \in \mathcal{F}$. Если $\varepsilon > 0$, то $(|x| < \varepsilon) \Leftrightarrow (-\varepsilon < x < \varepsilon)$.

Доказательство. По определению модуля имеем $-|x| \leq x \leq |x|$, откуда $(-\varepsilon < x < \varepsilon) \Leftrightarrow (|x| < \varepsilon)$. В самом деле, $(|x| < \varepsilon) \Rightarrow (-\varepsilon < -|x| \leq x \leq |x| < \varepsilon) \Rightarrow (-\varepsilon < x < \varepsilon)$.

Обратно, пусть $-\varepsilon < x < \varepsilon$, тогда при $x > 0$ $(|x| = x < \varepsilon) \Rightarrow (|x| < \varepsilon)$; при $x < 0$ $(-|x| = x > -\varepsilon) \Rightarrow (|x| < \varepsilon)$, т. е. $(-\varepsilon < x < \varepsilon) \Rightarrow (0 \leq |x| < \varepsilon)$.

4) $\forall x, y \in \mathcal{F}$ имеет место «неравенство треугольника» $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathcal{F}$ и для определенности $|x| \geq |y|$. Тогда в случае $x \cdot y \geq 0$ имеем $|x + y| = |\pm(|x| + |y|)| = ||x| + |y|| = |x| + |y|$, а в случае $x \cdot y < 0$ имеем $|x + y| = |\pm(|x| - |y|)| = ||x| - |y|| = |x| - |y| < |x| + |y|$.

5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$, $|x - y| \geq |x| - |y|\ \forall x, y \in \mathcal{F}$.

Доказательство. $(|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|) \Rightarrow (|x - y| \geq |x| - |y|)$. Но $|y - x| \geq |y| - |x|$, поэтому $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

Обозначения. Пусть $\mathcal{F}$ – упорядоченное поле и $a, b \in \mathcal{F}$, причем $a < b$. Тогда будем пользоваться следующими обозначениями:

$$[a, b] = \{x \in \mathcal{F} | \, a \leq x \leq b\},\ (a, b] = \{x \in \mathcal{F} | \, a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathcal{F} | \, a \leq x < b\},\ (a, b) = \{x \in \mathcal{F} | \, a < x < b\},$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathcal{F} | \, a \leq x\},\ (a, +\infty) = \{x \in \mathcal{F} | \, a < x\},$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathcal{F} | \, x \leq b\},\ (-\infty, b) = \{x \in \mathcal{F} | \, x < b\},$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x | \, x \in \mathcal{F}\}.$$

Все эти множества называются промежутками, причем $[a, b]$ называется замкнутым промежутком или отрезком (или иногда – сегментом), $[a, b)$ (или $[a, b[$), $(a, b]$ (или $]a, b]$), $[a, +\infty)$ (или $[a, +\infty[$ и $(-\infty, b]$ (или

$]-\infty, b]$) называются полуоткрытыми промежутками или полуинтервалами, а (a, b) (или $]a, b[$), $(a, +\infty)$ (или $]a, +\infty[$), $(-\infty, b)$ (или $]-\infty, b[$) и $(-\infty, +\infty)$ (или $]-\infty, +\infty[$) называются открытыми промежутками или интервалами. Промежутки $[a, b]$, $(a, b]$, $[a, b)$ и (a, b) называются конечными: a и b называются их концами. Остальные промежутки называются бесконечными. Иногда полезно причислить к отрезкам также множество $[a, a]$, состоящее из одной точки a.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $\mathcal{F}$ – упорядоченное поле. Элемент $b \in \mathcal{F}$ называется верхней гранью непустого множества $A \subset \mathcal{F}$, если $\forall x \in A$ имеет место неравенство $x \leq b$.*

О п р е д е л е н и е. *Элемент $a \in \mathcal{F}$ называется нижней гранью непустого множества $A \subset \mathcal{F}$, если $\forall x \in A$ имеет место неравенство $x \geq a$.*

О п р е д е л е н и е. *Непустое множество $A \subset \mathcal{F}$ называется ограниченным сверху (снизу), если $\exists b \in \mathcal{F}$ ($\exists a \in \mathcal{F}$), являющееся верхней (нижней) гранью множества A.*

О п р е д е л е н и е. *Непустое множество $A \subset \mathcal{F}$ называется ограниченным, если оно ограничено и сверху и снизу.*

З а м е ч а н и е. (Множество $A \subset \mathcal{F}$ ограничено) $\Leftrightarrow$ (ограничено сверху множество $\{|x| \in \mathcal{F} | x \in A\}$).

П р и м е р. Если множество $A \subset \mathcal{F}$ состоит из конечного числа элементов, то оно ограничено. (Доказать самостоятельно.)

П р и м е р. Интервал $(a, +\infty) \subset \mathcal{F}$ есть множество, ограниченное снизу и не ограниченное сверху. В самом деле, $(a, +\infty) = \{x \in \mathcal{F} | a < x\}$, $a \in \mathcal{F}$, поэтому $\forall x \in (a, +\infty) \Rightarrow x > a$, т. е. $a \in \mathcal{F}$ есть нижняя грань множества $(a, +\infty)$. С другой стороны, если бы множество $(a, +\infty)$ было ограничено сверху, то $\exists b \in \mathcal{F}$, являющееся верхней гранью для $(a, +\infty)$, так что

$$x \leq b \forall x \in (a, +\infty). \tag{1.1}$$

Из (1.1), в частности, следует, что $b > a$. Но поскольку $1 > 0$, то $x_0 = b + 1 > b > a$. Таким образом, существует $x_0 \in (a, +\infty)$ такое, что $x_0 > b$. Противоречие с (1.1).

З а м е ч а н и е. Множество натуральных чисел $\mathbf{N} \subset \mathbf{Q}$ не ограничено сверху в упорядоченном поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $n > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то достаточно доказать, что $\forall q \in \mathbf{Q}$, $q > 0$ $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $n \geq q > 0$. Пусть $q \in \mathbf{Q}$ и $q > 0$ фиксировано. Поскольку $0, 1/q \in \mathbf{Q}$ и $0 < 1/q$, то в силу плотности поля $\mathbf{Q}$ в себе $\exists \dfrac{m}{n} \in \mathbf{Q}$ такое, что $0 < \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{n}$, но тогда $\left(0 < \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{m}{n} < \dfrac{1}{q}\right) \Rightarrow \left(0 < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{q}\right) \Rightarrow q < n$.

Т е о р е м а А р х и м е д а (для поля рациональных чисел). *$\forall x, y \in \mathbf{Q}$ таких, что $x > 0$, $y > 0$ $\exists n \in \mathbf{N}$, для которого $n \cdot x > y$.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbf{Q}$, $x > 0$, $y > 0$, тогда $\frac{y}{x} \in \mathbf{Q}$ и $\frac{y}{x} > 0$ и в силу неограниченности множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{Q}$ $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $\left(n > \frac{y}{x}\right) \Rightarrow (n \cdot x > y)$.

Замечание. Поскольку поле рациональных чисел обладает свойством, сформулированным в теореме Архимеда, то поле $\mathbf{Q}$ называют архимедовым полем.

Определение. *Пусть непустое множество $A \subset \mathcal{F}$ ограничено сверху. Точной верхней гранью множества A называется элемент $M \in \mathcal{F}$ такой, что: 1) M является верхней гранью множества A; 2) M меньше любой другой верхней грани множества A.* Обозначение: $M = \sup A$.

Определение. *Пусть непустое множество $A \subset \mathcal{F}$ ограничено снизу. Точной нижней гранью множества A называется элемент $m \in \mathcal{F}$ такой, что: 1) m является нижней гранью множества A; 2) m больше любой другой нижней грани множества A.*

Обозначение: $M = \inf A$.

Итак, $M = \sup A$, если $M \in \mathcal{F}$ и 1) $x \leq M \ \forall x \in A$; 2) $\forall b \in \mathcal{F}$ такого, что $b < M$ $\exists x_0 \in A$, для которого $b < x_0 \leq M$. Аналогично $m = \inf A$, если $m \in \mathcal{F}$ и 1) $x \geq m \ \forall x \in A$; 2) $\forall a \in \mathcal{F}$ такого, что $m < a$ $\exists x_1 \in A$, для которого $m \leq x_1 < a$.

Теорема единственности. *Если точная верхняя грань $\sup A$ существует, то она единственна.*

Доказательство. Допустим от противного, что $\exists x = \sup A$ и $y = \sup A$ $(x, y \in \mathcal{F})$, причем $x < y$. Тогда $\exists x_0 \in A$ такое, что $x < x_0 \leq y$, но тогда x не есть верхняя грань непустого множества A, вопреки предположению.

Дадим еще одно определение $\sup A$ $(\inf A)$.

Определение. *$M = \sup A$, если $M \in \mathcal{F}$ и 1) $x \leq M \ \forall x \in A$; 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathcal{F}$ $\exists x_0 \in A$ такое, что $M - \varepsilon < x_0 \leq M$.*

Определение. *$m = \inf A$, если $m \in \mathcal{F}$ и 1) $m \leq x \ \forall x \in A$; 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathcal{F}$ $\exists x_1 \in A$ такое, что $m \leq x_1 < m + \varepsilon$.*

Пример. Пусть $A = \{1/n;\ n \in \mathbf{N}\}$, тогда $1 \in \mathbf{Q}$ и $\sup A = 1$, $\inf A = 0$. В самом деле, $1 = \sup A$, поскольку $1 \in \mathbf{Q}$ и 1) $\frac{1}{n} \leq 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$; 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbf{Q}$, $1 \in A$ и обладает тем свойством, что $1 - \varepsilon < 1$. Отметим, что $1 = \sup A \in A$. Далее, $0 = \inf A$, так как $0 \in \mathbf{Q}$, 1) $\frac{1}{n} > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$, 2) $\forall \varepsilon > 0$, $\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \in \mathbf{Q}$ и в силу неограниченности сверху множества $\mathbf{N}$ $\exists k \in \mathbf{N}$ такое, что $k > \frac{1}{\varepsilon}$, и тогда $\frac{1}{k} \in A$ таково, что $0 < \frac{1}{k} < 0 + \varepsilon$. Отметим, что $0 = \inf A \overline{\in} A$.

Определение. *Полным упорядоченным полем называется*

упорядоченное поле $\mathcal{F}$, в котором для каждого непустого множества, ограниченного сверху в $\mathcal{F}$, существует точная верхняя грань.

Т е о р е м а. *Упорядоченное поле рациональных чисел $\mathbf{Q}$ не является полным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2, т. е. покажем, что число, обозначаемое через $\sqrt{2}$, не есть рациональное число. Допустим противное, т. е. пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, причем $\frac{m}{n}$ – несократимая дробь. Тогда числа m и n не могут быть одновременно четными. Возводя в квадрат, имеем $\frac{m^2}{n^2} = 2$ или $2n^2 = m^2$, но тогда m есть четное число, т. е. $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbf{Z}$, откуда $2n^2 = 4m_1^2 \Rightarrow (n^2 = 2m_1^2) \Rightarrow n$ – четное. Итак, оказалось, что числа m и n оба четные вопреки предположению. Итак, $\sqrt{2} \overline{\in} \mathbf{Q}$. Предположим теперь, что $\mathbf{Q}$ – упорядоченное полное поле. Пусть $A = \{q \in \mathbf{Q} | \, q > 0, q^2 < 2\}$. Поскольку $1 \in A$, то $A \neq \varnothing$. Число $2 \in \mathbf{Q}$ является верхней гранью множества A, т. е. $q \leq 2 \ \forall q \in A$. В самом деле, если бы существовало $q_0 \in A$ такое, что $q_0 > 2$, то $q_0 > 1 \Rightarrow q_0^2 > q_0 > 2$. Противоречие. Итак, множество A непусто и ограничено в $\mathbf{Q}$ сверху. В силу предположения о полноте поля $\mathbf{Q}$ существует $c \in \mathbf{Q}$ такое, что $c = \sup A$. Поскольку $\sqrt{2} \overline{\in} \mathbf{Q}$, то возможны два случая: 1) $1 \leq c^2 < 2$ и 2) $c^2 > 2$. В случае 1) положим $d = \frac{2 - c^2}{2(c+1)^2}$. Очевидно, $d \in \mathbf{Q}$ и $0 < d < 1$, так как $0 < d < \frac{1}{2} \times (2 - c^2) = 1 - \frac{1}{2}c^2 < 1$.

Поскольку $c \in \mathbf{Q}$, $d \in \mathbf{Q}$, то $(c + d) \in \mathbf{Q}$ и $d^2 < d < 1$. Далее,

$$(c+d)^2 = c^2 + 2cd + d^2 < c^2 + 2cd + d = c^2 + (2c+1)d < c^2 + \frac{1}{2}(2 - c^2) =$$

$$1 + \frac{1}{2}c^2 < 2,$$

откуда $c + d \in A$, но $c = \sup A$, поэтому $c + d \leq c$. Противоречие. В случае 2) $(2 < c^2)$ положим $d = \frac{c^2 - 2}{2(c+1)^2} > 0$. Очевидно, $c - d \in \mathbf{Q}$, $c - d < c$, но

$$(c-d)^2 = c^2 - 2cd + d^2 > c^2 - d(c+1)^2 > c^2 - \frac{1}{2}(c^2 - 2) = \frac{1}{2}c^2 + 1 > 2.$$

Далее, $1 \leq c = \sup A$, $0 < d < \frac{c^2 - 2}{2c^2} = 1/2 - 1/2c^2 \leq 1/2 \Rightarrow 0 < d < 1/2 < 1 \leq c \Rightarrow c - d > 0$.

Итак, $c - d > 0$ и $(c - d)^2 > 2$, т. е. $(c - d) \overline{\in} A$. Но тогда $c - d$ есть верхняя грань множества A. В самом деле, если бы существовало $q_0 \in A$ такое, что $q_0 \geq c - d > 0$, то $q_0^2 \geq (c - d)q_0 \geq (c - d)^2 > 2$. Противоречие. Но если $c - d \in \mathbf{Q}$ есть верхняя грань A, то неравенство $c - d < c = \sup A$ приводит к противоречию. Таким образом, упорядоченное поле $\mathbf{Q}$ не является полным упорядоченным полем.

О п р е д е л е н и е. *Множеством действительных чисел* $\mathbf{R}$ *называется полное упорядоченное поле.*

Т е о р е м а. *Любые два полных упорядоченных поля* $\mathcal{F}$ *и* $\mathcal{F}'$ *изоморфны в том смысле, что существует биекция* $\mathcal{F}$ *на* $\mathcal{F}'$, *сохраняющая бинарные операции сложения и умножения и отношение порядка, т. е. при* $x \in \mathcal{F}$, $x' \in \mathcal{F}'$ $(x \to x') \Rightarrow ((x+y)' = x'+y'; (x \cdot y)' = x' \cdot y'); (x < y) \Leftrightarrow (x' < y'); (x = y) \Leftrightarrow (x' = y')$. (Теорема доказана в [2].)

З а м е ч а н и е. В книге Э. Ландау [1] можно познакомиться с реализацией поля R с помощью «дедекиндовых сечений», а в книге В.А. Ильина и Э.Г. Позняка [2] можно найти реализацию поля $\mathbf{R}$ с помощью «бесконечных десятичных дробей».

З а м е ч а н и е. Из полноты поля $\mathbf{R}$ следует, что для любого непустого множества $A \subset \mathbf{R}$, ограниченного снизу, существует $\inf A \in \mathbf{R}$. Для доказательства достаточно рассмотреть множество $A_- = \{x \in \mathbf{R} | -x \in A\}$, ограниченное сверху в $\mathbf{R}$, и убедиться, что $\inf A = -\sup A_-$.

З а м е ч а н и е. Пусть дано полное упорядоченное поле $\mathbf{R}$. Элементы из $\mathbf{R}$ будем называть действительными числами (или просто числами). Натуральными числами в $\mathbf{R}$ называются определяемые по индукции числа $1, 2 = 1+1, 3 = 2+1, 4 = 3+1, \ldots$. Множество натуральных чисел из $\mathbf{R}$ будем обозначать через $\mathbf{N}$. Отметим, что из данного определения $\mathbf{N}$ следует: 1) $1 \in \mathbf{N}$ и 2) $n+1 \in \mathbf{N}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Можно доказать, что $\mathbf{N}$ удовлетворяет аксиоматике Пеано натуральных чисел (см. [1]) и, в частности, для $\mathbf{N}$ имеет место принцип математической индукции. Натуральные числа $\{1, 2, 3, \ldots\}$, числа $\{-1, -2, -3, \ldots\}$ и число 0 называются целыми числами в $\mathbf{R}$, их множество будем обозначать через $\mathbf{Z}$. Действительные числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, называются рациональными; множество всех рациональных чисел в $\mathbf{R}$ будем обозначать через $\mathbf{Q}$. Любое действительное число, не являющееся рациональным, называется иррациональным. Например, число $\sqrt{2} \in \mathbf{R}$ иррационально.

Введем обозначения: если множество $X \subset \mathbf{R}$ не пусто и не ограничено сверху в $\mathbf{R}$, т. е. $\forall b \in \mathbf{R}$ $\exists x_0 \in X$ такое, что $x_0 \geq b$, то пишут $\sup X = +\infty$. Если множество $X \subset \mathbf{R}$ непусто и не ограничено снизу в $\mathbf{R}$, т. е. $\forall a \in \mathbf{R}$ $\exists x_0 \in X$ такое, что $x_0 \leq a$, то пишут $\inf X = -\infty$.

Т е о р е м а. *Пусть* $\mathbf{N}$ – *множество натуральных чисел в* $\mathbf{R}$, *тогда множество* $\mathbf{N}$ *не ограничено сверху в* $\mathbf{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим от противного, что множество $\mathbf{N}$ ограничено сверху в $\mathbf{R}$. Тогда в силу полноты упорядоченного поля $\mathbf{R}$ $\exists b = \sup \mathbf{N} \in \mathbf{R}$, т. е. 1) $n \leq b$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и 2) $(\varepsilon = 1 \in \mathbf{R}) \Rightarrow (\exists m \in \mathbf{N}$ такое, что $m > b - 1)$. Но тогда $m + 1 \in \mathbf{N}$ и $m + 1 > b$, т. е. b $\sup \mathbf{N}$ не есть даже верхняя грань для $\mathbf{N}$. Противоречие.

Следствие. Для множества целых чисел $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{R}$ имеем $\sup \mathbf{Z} = +\infty$, $\inf \mathbf{Z} = -\infty$.

Теорема Архимеда. *Пусть* $\mathbf{R}$ *– поле действительных чисел. Тогда* $\forall x, y \in \mathbf{R}$ *таких, что* $x > 0$, $y > 0$ $\exists n \in \mathbf{N}$, *для которого* $n \cdot x > y$.

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbf{R}$, $x > 0$, $y > 0$, тогда $\frac{y}{x} \in \mathbf{R}$, $\frac{y}{x} > 0$ и в силу неограниченности $\mathbf{N}$ сверху (в $\mathbf{R}$) $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $\left(n > \frac{y}{x}, x > 0\right) \Rightarrow (n \cdot x > y)$.

Теорема (принцип минимума для $\mathbf{N}$). *Если* $A \subset \mathbf{N}$ *не пустое множество, то существует* $m = \inf A \in A$.

Доказательство. Если $A \subset \mathbf{N}$ и $A \neq \varnothing$, то $k \geq 1$ $\forall k \in A$, т. е. множество A ограничено снизу в $\mathbf{R}$. Из полноты $\mathbf{R} \Rightarrow \exists a = \inf A \in \mathbf{R}$. Если $a \overline{\in} A$, то, поскольку $a = \inf A$, имеем: 1) $k > a$ $\forall k \in A$ и 2) для $1 \in \mathbf{R}$ $\exists m_0 \in A$ такое, что $a < m_0 < a + 1$. Кроме того, в силу опять же свойства 2) из определения точной нижней грани, для числа $m_0 \in A \subset \mathbf{N}$, удовлетворяющего неравенству $a < m_0$, $\exists m_1 \in A \subset \mathbf{N}$ такое, что $a < m_1 < m_0$. Итак, $\exists m_1, m_0 \in A \subset \mathbf{N}$ такие, что $a < m_1 < m_0 < a + 1$, откуда $0 < m_0 - m_1 < 1$. Но это неравенство невозможно при различных натуральных m_1 и m_0. Противоречие. Таким образом, имеем $a = \inf A \in A$.

Замечание. Если $A \subset \mathbf{Z}$ – непустое ограниченное сверху (снизу) подмножество целых чисел, то $\sup A \in A$ ($\inf A \in A$), т. е. в множестве A существует наибольший (наименьший) элемент.

Следствие. $\forall x \in \mathbf{R}$ множество $\{k \in \mathbf{Z} | \, k \geq x\}$ всех целых чисел $\geq x$ имеет наименьший элемент, а множество $\{k \in \mathbf{Z} | \, k \leq x\}$ имеет наибольший элемент.

Следствие. $\forall x \in \mathbf{R}$ $\exists m \in \mathbf{Z}$ такое, что $m \leq x < m+1$. Это целое число обозначается символом $[x]$ и называется целой частью числа x.

Доказательство. $\forall x \in \mathbf{R}$ число $m = \sup\{k \in \mathbf{Z} | \, k \leq x\}$ удовлетворяет неравенствам $m \leq x < m + 1$.

Пример. $\left[-3\frac{1}{2}\right] = -4$, $\left[3\frac{1}{2}\right] = 3$.

Теорема. *Множество* $\mathbf{Q}$ *плотно в* $\mathbf{R}$, *т. е.* $\forall a, b \in \mathbf{R}$ *таких, что* $a < b$ $\exists q \in \mathbf{Q}$, *для которого* $a < q < b$.

Доказательство. Пусть $a, b \in \mathbf{R}$ и $a < b$, тогда $(b - a > 0) \Rightarrow \left(\frac{1}{b-a} > 0\right)$ и в силу теоремы Архимеда $\exists n \in \mathbf{N}$ такое, что

$$\left(n > \frac{1}{b-a}\right) \Rightarrow \left(b - a > \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(b > a + \frac{1}{n}\right).$$

Но тогда $[an] \leq an < [an] + 1$, и поэтому

$$q = \frac{[an]+1}{n} > \frac{an}{n} = a, q = \frac{[an]+1}{n} \leq \frac{an+1}{n} = a + \frac{1}{n} < b,$$

т. е. $\exists q = ([an]+1)/n \in \mathbf{Q}$ такое, что $a < q < b$.

С л е д с т в и е. В любом интервале $(a, b) \subset \mathbf{R}$ содержится бесконечное множество рациональных чисел.

§ 2. Принципы полноты поля R

При определении поля действительных чисел $\mathbf{R}$ нами был положен в основу:

I п р и н ц и п п о л н о т ы В е й е р ш т р а с с а. *Любое ограниченное сверху непустое множество из* $\mathbf{R}$ *имеет точную верхнюю грань (в* $\mathbf{R}$*).*

II п р и н ц и п п о л н о т ы Д е д е к и н д а. *Пусть* $\mathbf{R} = A \cup B$, *где* $A \neq \varnothing$ *и* $B \neq \varnothing$, *причем* $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow (a < b)$.

Тогда или существует $c \in A$ *такое, что* $a \leq c \ \forall a \in A$, *или существует* $c \in B$ *такое, что* $c \leq b \ \forall b \in B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $A \neq \varnothing$ и $\forall a \in A \Rightarrow a < b$, где $b \in B$ $(B \neq \varnothing)$, то A – ограниченное сверху непустое множество в $\mathbf{R}$ и в силу принципа полноты Вейерштрасса существует $c = \sup A \in \mathbf{R}$. Поскольку $c \in \mathbf{R}$, то $c \in A \cup B$.

Заметим, что $A \cap B = \varnothing$. В противном случае существует $a_0 \in A \cap B$, и тогда $(a_0 \in A) \wedge (a_0 \in B) \Rightarrow (a_0 < a_0)$, что невозможно.

Поскольку $A \cap B = \varnothing$, то либо $c \in A$, либо $c \in B$. Если $c \in A$, то $(\forall a \in A) \Rightarrow (a \leq c)$, поскольку $c = \sup A$. Если $c \in B$, то должно выполняться неравенство $b \geq c \forall b \in B$. В самом деле, допустим от противного, что существует $b_0 \in B$ такое, что $b_0 < c$. Тогда поскольку $c = \sup A$, то из свойств точной верхней грани множества вытекает, что существует $a_0 \in A$ такое, что $b_0 < a_0 < c$. Но неравенство $b_0 < a_0$ при $a_0 \in A$ и $b_0 \in B$ противоречит свойству $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow a < b$. Итак, в случае $c \in B$ имеем $c \leq b \ \forall b \in B$.

III п р и н ц и п п о л н о т ы $\mathbf{R}$ (т е о р е м а о т д е л и м о с т и). *Пусть* $A \subset \mathbf{R}$ *и* $B \subset \mathbf{R}$, *причем* $A \neq \varnothing$ *и* $B \neq \varnothing$, *а также* $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow (a < b)$.

Тогда $\exists c \in \mathbf{R}$ *такое, что* $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow (a \leq c \leq b)$ *(точка* c *отделяет множества* A *и* B*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим разбиение по Дедекинду $\mathbf{R} = A_1 \cup B_1$ такое, что $A \subset A_1$ и $B \subset B_1$. Для этого положим $B_1 = \{b_1 \in \mathbf{R} | \exists b \in B$ такое, что $b \leq b_1\}$ и $A_1 = \mathbf{R} \setminus B_1$. Докажем, что $B \subset B_1$ и $A \subset A_1$. В самом деле, $\forall b_1 \in B \ \exists b = b_1 \in B$, т. е. $b_1 \in B_1$, откуда имеем $B \subset B_1$. Далее, если бы существовало $a_0 \in A$ такое, что $a_0 \in B_1$, то в силу определения множества B_1 $\exists b_0 \in B$ такое, что $b_0 \leq a_0$, но это неравенство противоречит условию теоремы, согласно которому $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow (a < b)$. Поэтому $a_0 \overline{\in} B_1$ вопреки предположению.

Итак, $A \subset \mathbf{R} \setminus B_1 = A_1$. Таким образом, имеем $\mathbf{R} = A_1 \cup B_1$, где

$A_1 \supset A \neq \varnothing$ и $B_1 \supset B \neq \varnothing$. Докажем, что $(\forall a_1 \in A_1) \wedge (\forall b_1 \in B_1) \Rightarrow (a_1 < b_1)$. В самом деле, в противном случае $\exists a_0 \in A_1$ и $\exists b_0 \in B_1$ такие, что $b_0 < a_0$, и тогда в силу определения множества B_1 $\exists b \in B$ такое, что $b \leq b_0 < a_0$, откуда следует, что $a_0 \in B_1 = \mathbf{R} \setminus A_1$. Противоречие. Таким образом, множеств A_1 и B_1 удовлетворяют условиям Дедекинда (определяют разбиение $\mathbf{R}$ по Дедекинду). По теореме Дедекинда существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что

$$(\forall a_1 \in A_1) \wedge (\forall b_1 \in B_1) \Rightarrow (a_1 \leq c \leq b_1).$$

Но тогда $(\forall a \in A \subset A_1) \wedge (\forall b \in B \subset B_1) \Rightarrow (a \leq c \leq b)$.

О п р е д е л е н и е. *Система отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$, $n \in \mathbf{N}$, *называется вложенной системой, если* $[a_n, b_n] \subset \mathbf{R}$ *и*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \forall n \in \mathbf{N}.$$

IV п р и н ц и п п о л н о т ы **R** К а н т о р а. *Пусть в* $\mathbf{R}$ *дана вложенная система отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$ *так, что* $\forall n \in \mathbf{N}$ $[a_n, b_n] \subset \mathbf{R}$ *и* $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$.

Тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$, *т. е.* $\exists c \in \mathbf{R}$ *такое, что* $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся теоремой отделимости. Пусть $A = \{a \in \mathbf{R} | a = a_n, n \in \mathbf{N}\} \neq \varnothing$ и $B = \{b \in \mathbf{R} | b = b_n, n \in \mathbf{N}\} \neq \varnothing$. Пусть $n \leq m$, тогда $(a_n \leq a_m < b_m) \Rightarrow (a_n < b_m)$, а при $n > m$ $(a_n < b_n \leq b_m) \Rightarrow (a_n < b_m)$. Итак, $a_n < b_m$ $\forall n, m \in \mathbf{N}$.

Таким образом, $A \subset \mathbf{R}$, $A \neq \varnothing$, $B \subset \mathbf{R}$, $B \neq \varnothing$ и $(\forall a \in A) \wedge (\forall b \in B) \Rightarrow (a < b)$. В силу теоремы отделимости существует $c \in \mathbf{R}$ такое, что $a_n \leq c \leq b_m$ $\forall n, m \in \mathbf{N}$ и, в частности, $a_n \leq c \leq b_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, т. е. $c \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Т е о р е м а. *Если* $\mathcal{F}$ *есть архимедово упорядоченное поле, в котором имеет место принцип полноты Кантора, то* $\mathcal{F} = \mathbf{R}$, *т. е. принцип полноты Вейерштрасса следует из принципа полноты Кантора в упорядоченном поле с аксиомой Архимеда.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Итак, нужно доказать, что в архимедовом упорядоченном поле $\mathcal{F}$ с принципом полноты Кантора любое непустое ограниченное сверху множество $A \subset \mathcal{F}$ имеет в $\mathcal{F}$ точную верхнюю грань. Будем при этом предполагать, что для множества натуральных чисел $\mathbf{N}$ из $\mathcal{F}$ справедливы аксиомы Пеано и, в частности, имеет место принцип математической индукции. (Это можно доказать.) Пусть $A \subset \mathcal{F}$, $A \neq \varnothing$ и A ограничено сверху в $\mathcal{F}$. Тогда существует $b_1 \in \mathcal{F}$ такое, что $a < b_1$ $\forall a \in A$ (поскольку любое число, большее верхней грани множества A, само является верхней гранью для A). Выберем какое-либо $a_1 \in A$ и рассмотрим отрезок $[a_1, b_1]$. В

дальнейшем при доказательстве этой теоремы отрезок $[x, y]$ будем называть нормальным, если: 1) существует $a \in A$ такое, что $a \in [x, y]$, и 2) $\forall b \in \mathcal{F}$ такого, что $b > y \Rightarrow b \overline{\in} A$. Если нормальный отрезок разделить пополам, то по крайней мере одна из его двух половин будет нормальной. В самом деле, если правая его половина содержит хотя бы одну точку из A, то эта половина и будет нормальной, в противном случае нормальной будет его левая половина. Отрезок $[a_1, b_1]$ нормален. Разделим его пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ его нормальную половину. Вообще, пусть по индукции $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ есть нормальная половина отрезка $[a_n, b_n]$.

Заметим, что длина отрезка $[a_n, b_n]$ есть $\Delta_n = b_n - a_n = (b_1 - a_1)/2^{n-1}$.

В силу принципа полноты Кантора для вложенной системы $\{[a_n, b_n]\}$, $n \in \mathbf{N}$, имеем $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] \neq \varnothing$.

Докажем, что у вложенной системы $\{[a_n, b_n]\}$ только одна общая точка. Если бы $\exists c_1, c_2 \in [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $c_1 \neq c_2$ $(c_1 < c_2)$, то $[c_1, c_2] \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$, и поэтому $\forall n \in \mathbf{N}$ $c_1 - c_2 \leq (b_1 - a_1)/2^n$ или $\dfrac{b_1 - a_1}{c_2 - c_1} \geq 2^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Но имеет место неравенство $2^n \geq n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, что доказывается с помощью принципа математической индукции, поскольку 1) $2^1 \geq 1$ и 2) если $2^n \geq n$, то $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n \geq n + 1$, т. е. $2^{n+1} \geq n + 1$.

Итак, $(b_1 - a_1)/(c_2 - c_1) \geq n$ $\forall n \in \mathbf{N}$, но это соотношение противоречит архимедовости поля $\mathcal{F}$. Итак, $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$, где $c \in \mathcal{F}$.

Докажем, что $c = \sup A$. Если бы c не было верхней гранью для A, то $\exists a_0 \in A$ такое, что $c < a$, но тогда $a_0 \overline{\in} \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$, и поэтому $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_{n_0} \leq c \leq b_{n_0} < a_0$, т. е. отрезок $[a_{n_0}, b_{n_0}]$ не может быть нормальным. Противоречие.

Итак, 1) $a \leq c$ $\forall a \in A$.

Далее, $\forall a_1 \in \mathcal{F}$ такого, что $a_1 < c$ $\exists n_1 \in \mathbf{N}$, для которого $a_1 < a_{n_1} \leq c \leq b_{n_1}$. (В противном случае имели бы $a_1 \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$, т. е. $a_1 = c$. Противоречие.) Но тогда в силу нормальности отрезка $[a_{n_1}, b_{n_1}]$ $\exists a \in A$, $a \in [a_{n_1}, b_{n_1}] \Rightarrow (a_{n_1} \leq a \leq c \leq b_{n_1}) \Rightarrow (a_1 < a)$.

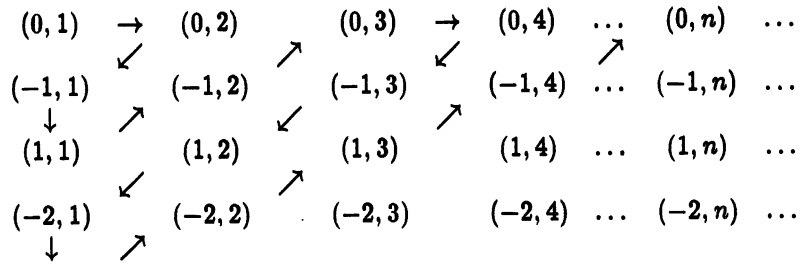
Итак, 2) $\forall a_1 \in \mathcal{F}$ такого, что $a_1 < c$ $\exists a \in A$, для которого имеем $a_1 < a \leq c$. Из свойств 1) и 2) вытекает, что $c = \sup A$. Таким образом, в упорядоченном архимедовом поле $\mathcal{F}$ имеет место принцип полноты Вейерштрасса, а поэтому $\mathcal{F} = \mathbf{R}$.

§ 3. Мощности множеств Q и R

Если $\mathbf{Q}$ – множество всех рациональных чисел, а $\mathbf{R}$ – множество всех действительных чисел, то $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Теорема. *Множество рациональных чисел* $\mathbf{Q}$ *счетно.*

Доказательство. Поскольку $\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbf{R} \middle| m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\right.$ и дробь $\left.\frac{m}{n}\right.$ несократима$\}$, то множество $\mathbf{Q}$ равномощно множеству $A = \{(m,n) | m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}$ и дробь $\frac{m}{n}$ несократима$\}$. Но $A \subset B = \{(m,n) | m \in Z, n \in \mathbf{N}\}$, где B – множество всевозможных упорядоченных пар (m,n) $(m \in Z, n \in \mathbf{N})$. Заметим, что $A \sim Q$ будет даже собственным подмножеством B. Докажем счетность множества B, для чего построим таблицу



В этой таблице содержатся все элементы множества B, и каждый элемент из B входит в таблицу только один раз. Пронумеровав ее согласно стрелкам, получим биекцию $\mathbf{N}$ на B. Итак, $B \sim \mathbf{N}$, т. е. счетно. Но тогда $A \subset B$ как подмножество счетного множества не более чем счетно. Но тогда не более чем счетно и $\mathbf{Q} \sim A$. Заметим, что $\mathbf{Q} \supset \mathbf{N}$, и поэтому $\mathbf{Q}$ бесконечно, а стало быть, и счетно.

Теорема. *Множество всех действительных чисел* $\mathbf{R}$ *несчетно.*

Доказательство. Допустим от противного, что множество $\mathbf{R}$ счетно, т. е. все действительные числа из $\mathbf{R}$ можно расположить в последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \tag{3.1}$$

так, что $n \neq m \Leftrightarrow a_n \neq a_m$. Проведем теперь следующие построения. Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ – отрезок из $\mathbf{R}$, не содержащий a_1. (Например, $[\alpha_1, \beta_1] = [a_1 + 1, a_1 + 2]$.) Тогда $a_1 \overline{\in} [\alpha_1, \beta_1]$. Разделим отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$ на три равные части и выберем ту его треть $[\alpha_2, \beta_2]$, которая не содержит a_2, тогда $[\alpha_2, \beta_2] \subset [\alpha_1, \beta_1]$, $a_i \overline{\in} [\alpha_2, \beta_2]$; $i = 1, 2$. Допустим, что уже построена система отрезков $\{[\alpha_k, \beta_k]\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ такая, что $[\alpha_n, \beta_n] \subset [\alpha_{n-1}, \beta_{n-1}] \subset \ldots \subset [\alpha_1, \beta_1]$, $a_i \overline{\in} [\alpha_n, \beta_n]$; $i = 1, 2, \ldots, n$. Разделим отрезок $[\alpha_n, \beta_n]$ на три равные части и выберем ту его треть

$[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$, которая не содержит a_{n+1}, тогда $[\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}] \subset [\alpha_n, \beta_n] \subset \ldots \subset [\alpha_1, \beta_1]$, $a_i \overline{\in} [\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}]$; $i = 1, 2, \ldots, n+1$. Тем самым по индукции мы построили вложенную систему $\{[\alpha_n, \beta_n]\}$ $n \in \mathbf{N}$ такую, что $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow a_i \overline{\in} [\alpha_n, \beta_n]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. По теореме Кантора существует $c \in \mathbf{R}$ такая, что $c \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n]$.

Но действительное число c не может быть членом последовательности (3.1). В самом деле, если бы существовало $m \in \mathbf{N}$ такое, что $c = a_m$, то по построению

$$c = a_m \overline{\in} [\alpha_m, \beta_m] \text{ и поэтому } c \overline{\in} \bigcap_{n=1}^{+\infty} [\alpha_n, \beta_n].$$

Противоречие. Таким образом, несчетность $\mathbf{R}$ доказана.

Глава 3

ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Топология числовой прямой

Рассмотрим числовую прямую $(-\infty, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} | -\infty < x < +\infty\}$ и в дальнейшем будем считать $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$.

О п р е д е л е н и е. *Окрестностью $O(a)$ (или $U(a)$, или $V(a)$) точки $a \in \mathbf{R}$ называется любой интервал (α, β), содержащий точку a, т. е. $O(a) = (\alpha, \beta) = \{x \in \mathbf{R} | \alpha < x < \beta, \alpha < a < \beta\}$. Центрированной или сферической (с радиусом $\delta > 0$) окрестностью точки a называется множество $U_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta) = \{x \in \mathbf{R} | |x - a| < \delta\}$.* Заметим, что $\forall$ окрестности $O(a) = (\alpha, \beta)$ $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $O(a) = U_{\delta_0}(x_0)$. (В самом деле, достаточно взять $x_0 = (\alpha + \beta)/2$ и $\delta_0 = (\beta - \alpha)/2 > 0$, тогда $O(a) = (\alpha, \beta) = (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) = U_{\delta_0}(x_0)$.)

О п р е д е л е н и е. *Если $U(a)$ - окрестность точки $a \in \mathbf{R}$, то проколотой окрестностью точки a называется множество $\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}$. В частности, $\dot{U}_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R} | 0 < |x - a| < \delta\}$.*

Отметим некоторые свойства окрестностей на числовой прямой.

1) Если $a \in \mathbf{R}$, то любая окрестность $O(a)$ точки a непуста, в частности, $U_\delta(a) \neq \varnothing$ $\forall \delta > 0$. В самом деле, $\forall$ окрестности $O(a)$ точки a имеем

$$O(a) = (\alpha, \beta) = (\alpha, a) \cup \{a\} \cup (a, \beta) \Rightarrow O(a) \neq \varnothing.$$

2) $\forall$ окрестности $O(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$ существует центрированная окрестность $U_\delta(a)$ такая, что $U_\delta(a) \subset O(a)$, при этом радиус $\delta >$

0 можно выбрать рациональным. В самом деле, поскольку $O(a)$ – окрестность точки $a \in \mathbf{R}$, то $\exists x_0 \in \mathbf{R}$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $O(a) = U_{\delta_0}(x_0)$ и $a \in U_{\delta_0}(x_0)$, т. е. $0 \le |a - x_0| < \delta_0$. Если $x_0 = a$, то все доказано. Пусть $x_0 \ne a$, тогда $0 < |a - x_0| = \delta_1 < \delta_0$. Положим $\delta = \delta_0 - \delta_1 > 0$ и рассмотрим центрированную окрестность $V_\delta(a)$ точки a. Тогда $|a - x_0| < \delta \ \forall x \in V_\delta(a)$ и в силу выбора $\delta > 0$ и неравенства треугольника для модуля имеем $|x - x_0| = |(x-a)+(a-x_0)| \le |x-a|+|a-x_0| < \delta+\delta_1 = \delta_0-\delta_1+\delta_1 = \delta_0$. Таким образом, $|x-x_0| < \delta_0$ $\forall x \in V_\delta(a)$, т. е. $x \in U_{\delta_0}(x_0) = O(a) \Rightarrow V_\delta(a) \subset O(a)$. Далее, $\mathbf{Q}$ плотно в $\mathbf{R}$, поэтому $\exists q \in \mathbf{Q}$ такое, что $0 < q < \delta$ и тогда $V_q(a) \subset V_\delta(a) \subset O(a)$.

3) Для любых двух окрестностей $V^{(1)}(a)$ и $V^{(2)}(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$ существует окрестность $O(a)$ такая, что $O(a) \subset V^{(1)}(a) \cap V^{(2)}(a)$.

В самом деле, в силу свойства 2) существуют центрированные окрестности $W_{\delta_i}(a)$ точки a, для которых имеем $W_{\delta_i}(a) \subset V^{(i)}(a)$ $(i = 1, 2)$. Но тогда при $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ имеем $W_{\delta_0}(a) \subset W_{\delta_i}(a)$ $(i = 1, 2)$, т. е. $W_{\delta_0}(a) \subset W_{\delta_1}(a) \cap W_{\delta_2}(a) \subset V^{(1)}(a) \cap V^{(2)}(a)$.

3′) (Обобщение). Пересечение конечного числа окрестностей точки $a \in \mathbf{R}$ содержит окрестность точки a, т. е. $\forall\{V^{(i)}(a)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $\exists O(a) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{m} V^{(i)}(a)$.

4) (Аксиома отделимости Хаусдорфа). Если $a, b \in \mathbf{R}$ и $a \ne b$, то $\exists$ окрестности $U(a)$ и $V(b)$ такие, что $U(a) \cap V(b) = \varnothing$.

В самом деле, если $a \ne b$, то $|a - b| = \delta > 0$. Рассмотрим окрестности $W_\delta(a)$ и $W_\delta(b)$ точек a и b соответственно. Покажем, что $W_{\delta/3}(a) \cap W_{\delta/3}(b) = \varnothing$.

Допустим, что $\exists x_0 \in W_{\delta/3}(a) \cap W_{\delta/3}(b)$. Тогда в силу неравенства треугольника имеем $0 < \delta = |a - b| = |(a - x_0) + (x_0 - b)| \le |a - x_0| + |x_0 - b| < \dfrac{\delta}{3} + \dfrac{\delta}{3} = \dfrac{2\delta}{3}$. Противоречие.

5) $\forall b \in O(a) \Rightarrow O(a) = U(b)$, т. е. для любой точки $b \in O(a)$ множество $O(a)$ является окрестностью точки $b \in \mathbf{R}$. Кроме того, если $b \in O(A)$ и $b \ne a$, то существует центрированная окрестность $V_\delta(b) \subset O(a)$ такая, что $a \overline{\in} V_\delta(b)$.

В самом деле, поскольку $b \in O(A)$, то $O(A) = U(b)$, причем в силу свойства 2) $\exists V_{\delta_1}(b) \subset U(b)$; если $b \ne a$, то $|b - a| = \delta_2 > 0$, и тогда при $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$ $V_\delta(b) \subset V_{\delta_1}(b) \subset U(b) = O(a)$, причем $a \overline{\in} V_\delta(b)$.

Определение. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется внутренней точкой множества $A \subset R$, если существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что $O(a) \subset A$.*

Пример. $A = [0, 1)$, $a = 1/2$, $O_{1/4}(a) = (1/4, 3/4) \subset A$, т. е. $a = 1/2$ – внутренняя точка множества $A = [0, 1)$.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех внутренних точек множества A называется внутренностью A и обозначается $\overset{\circ}{A}$ или A_i.*

П р и м е р. $A = [0,1)$, $\overset{\circ}{A} = (0,1)$.

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется внешней точкой множества A, если существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что $O(a) \cap A = \varnothing$. В частности, если a – внешняя точка множества A, то $a \overline{\in} A$, т. е. $a \in CA$.* Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

П р и м е р. $A = [0,1)$, $a = 3/2$, $O(a) = (5/4, 2)$, $a = 3/2$ – внешняя точка множества A, но $b = 1$ не является внешней точкой для A, хотя $b \in CA$.

С л е д с т в и е. Внешняя точка множества A является внутренней точкой для его дополнения CA.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех внешних точек множества A называется внешностью A и обозначается через A_e.*

П р и м е р. $A = [0,1)$, $A_e = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется граничной точкой множества $A \subset \mathbf{R}$, если $\forall$ окрестности $O(a)$ точки a имеем $O(a) \cap A \neq \varnothing$ и $O(a) \cap CA \neq \varnothing$.*

П р и м е р. $A = [0,1)$, $a = 0, b = 1$ – граничные точки множества A.

О п р е д е л е н и е. *Границей ∂A множества A называется множество всех граничных точек A. Очевидно, $\partial A = \partial(CA)$.*

П р и м е р. $A = [0,1)$, $\partial A = \{0\} \cup \{1\}$, $\{0\} \in A$, $\{1\} \overline{\in} A$.

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется точкой прикосновения множества $A \subset \mathbf{R}$, если для любой окрестности $O(a)$ точки a имеем $O(a) \cap A \neq \varnothing$.*

П р и м е р. Любая внутренняя точка и любая граничная точка множества A являются точками прикосновения множества A.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех точек прикосновения множества $A \subset \mathbf{R}$ называется замыканием множества A и обозначается через $\overline{A}$, при этом $A \subset \overline{A}$.*

П р и м е р. $A = [0,1) \cup \{2\}$, $\overline{A} = [0,1] \cup \{2\}$.

Замечание. $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$.

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется предельной точкой множества $A \subset \mathbf{R}$, если для любой окрестности $O(a)$ точки a имеем $\overset{\circ}{O}(a) \cap A \neq \varnothing$.*

П р и м е р. $A = [0,1)$, $a = 1 \overline{\in} A$, но $\overset{\circ}{O}(1) \cap [0,1) \neq \varnothing$ $\forall O(1)$, т. е. $a = 1$ – предельная точка.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех предельных точек множества A называется производным множеством и обозначается через A', при этом $A' \subset \overline{A}$.*

Пример. $A = (0,1)$, $A' = [0,1]$.

Замечание. Из определений множеств $\overline{A}$ и A' вытекает отношение $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Определение. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется изолированной точкой множества $A \subset \mathbf{R}$, если существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что $O(a) \cap A = \{a\}$.*

Пример. $A = [0,1) \cup \{2\}$, $a = 2$ – изолированная точка множества A.

Теорема. $\overline{A} = A \cup A'$ *и* $\mathrm{C}\overline{A} = A_e$.

Доказательство. Было отмечено, что всегда имеем $A \cup A' \subset \overline{A}$. Для доказательства обратного включения заметим, что если $a \in \overline{A}$, то a есть точка прикосновения множества A, и тогда либо a – изолированная точка множества A (и поэтому $a \in A$), либо a – предельная точка для A (т. е. $a \in A'$). В обоих случаях имеем $\overline{A} \subset A \cup A'$. Итак, $\overline{A} = A \cup A'$.

Далее, включение $A_e \subset \mathrm{C}\overline{A}$ вытекает из определения внешней точки. Если же $a \overline{\in} \overline{A}$, то a не является точкой прикосновения для A, а потому существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что $O(a) \cap A = \varnothing \Rightarrow a \in A_e$, откуда $\mathrm{C}\overline{A} \subset A_e$. Из обоих включений вытекает равенство $\mathrm{C}\overline{A} = A_e$.

Замечание. Из определений вытекают включения $\partial A \subset \overline{A}$ и $(a \in \partial A) \wedge (a \overline{\in} A) \Rightarrow a \in A'$.

Замечание. Любая изолированная точка множества A является граничной точкой для A (т. е. $a \in \partial A$).

Определение. *Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется открытым, если все его точки внутренние, т. е. если $A = \mathring{A}$.*

Теорема. *Любая окрестность $O(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$ есть открытое множество.*

Доказательство. Рассмотрим любую окрестность $O(a)$ точки $a \in \mathbf{R}$. В силу свойства 5) для окрестностей в $\mathbf{R}$ множество $O(a)$ является окрестностью любой точки $b \in O(a)$ (т. е. $O(a) = U(b)$), таким образом, любая точка $b \in O(a)$ есть внутренняя точка для множества $O(a)$. Но тогда множество $O(a)$ открыто.

Теорема. *Множества A_i и A_e открыты для любого множества A.*

Доказательство. В силу определения $\forall a \in A_i \; \exists$ окрестность $O(a) \subset A$. Но поскольку $\forall b \in O(a)$, имеем $O(a) = U(b) \subset A$, то b есть внутренняя точка для A, поэтому $b \in A_i$. Таким образом, $\forall a \in A_i \; \exists O(a) \subset A_i$, т. е. A_i – открытое множество. Далее, $\forall a \in A_e \; \exists O(a) \subset \mathrm{C}A$, но $\forall b \in O(a)$ имеем $O(a) = U(b) \subset \mathrm{C}A$, т. е. $b \in A_e$. Тем самым доказано, что $\forall a \in A_e \; \exists O(a) \subset A_e$, т. е. множество A_e открыто.

Определение. *Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $A' \subset A$.*

Т е о р е м а. *Множество* $A \subset \mathbf{R}$ *замкнуто* $\Leftrightarrow A = \overline{A}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть A замкнуто, тогда $A' \subset A$, но $\overline{A} = A \cup A'$, поэтому $\overline{A} = A$. 2) Пусть $\overline{A} = A$, тогда $\overline{A} = A \cup A' \Rightarrow A' \subset A$, т. е. множество A замкнуто.

З а м е ч а н и е. Пустое множество $\varnothing$ и все множество $\mathbf{R}$ являются одновременно замкнутыми и открытыми.

Т е о р е м а. *(Множество* A *замкнуто)*$\Leftrightarrow$ *(множество* $\mathrm{C}A$ *открыто).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость: пусть A замкнуто. Тогда $A = \overline{A}$. Докажем, что $\forall b \in \mathrm{C}A\ \exists O(b) \subset \mathrm{C}A$.

Допустим, что это не так. Тогда $O(b) \cap A \neq \varnothing\ \forall O(b)$, и поэтому $b \in \overline{A} = A$, что противоречит предположению $b \in \mathrm{C}A$. Таким образом, если A замкнуто, то $\mathrm{C}A$ открыто.

Достаточность: пусть множество $\mathrm{C}A$ открыто. Докажем, что $A' \subset A$. Допустим, что это не так, тогда $\exists b \in A'$ такая, что $b \in \mathrm{C}A$. Но поскольку $\mathrm{C}A$ открыто, то $\exists O(b) \subset \mathrm{C}A$, и тогда $b \in \mathrm{C}\overline{A}$, т. е. $b \overline{\in} A'$. Противоречие. Итак, $A' \subset A$, т. е. A замкнуто. Таким образом, если $\mathrm{C}A$ открыто, то A замкнуто.

П р и м е р. Пусть $A = [a-\delta, a+\delta] = [\alpha, \beta]$ – отрезок в $\mathbf{R}$. Покажем, что множество $\mathrm{C}A$ открыто в $\mathbf{R}$. В самом деле, $\forall x_0 \in \mathrm{C}A = \{x \in \mathbf{R} \mid |x-a| > \delta\} \Rightarrow |x_0 - a| = \delta_0 > \delta$, но тогда, выбирая $h \in (0, \delta_0 - \delta)$. видим, что $\forall x \in U_h(x_0)$, в силу неравенства треугольника имеем

$$|a-x| = |(a-x_0) - (x-x_0)| \geq |a-x_0| - |x-x_0| > \delta_0 - h >$$

$$> \delta_0 - (\delta_0 - \delta) = \delta > 0,$$

т. е. $x \in \mathrm{C}A$, а потому $U_h(x_0) \subset \mathrm{C}A$, т. е. $\mathrm{C}A = R \setminus [\alpha, \beta]$ – открытое множество. Но тогда в силу теоремы видим, что отрезок $[\alpha, \beta]$ – замкнутое множество в $\mathbf{R}$, причем $[\alpha, \beta]$ не является открытым, т. е. его концы α и β не являются внутренними точками.

С л е д с т в и е. (A открыто) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{C}A$ замкнуто). В самом деле, применяя предыдущую теорему к множеству $B = \mathrm{C}A$, имеем ($B = \mathrm{C}A$ замкнуто) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{C}B = \mathrm{CC}A = A$ открыто).

Т е о р е м а. *Пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть замкнутое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$, где $G_k = \mathring{G}_k$ – открытые множества при $k = 1, 2, \ldots, m$. Но тогда $\forall a \in G \Rightarrow a \in G_k = \mathring{G}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, и поэтому $\exists$ окрестности $O^{(k)}(a)$ такие, что $O^{(k)}(a) \subset G_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. В силу свойства 3) окрестностей $\exists O(a) \subset \bigcap\limits_{k=1}^{m} O^{(k)}(a) \subset G$, т. е. (любая $a \in G$ есть внутренняя точка множества G) $\Rightarrow$ ($G = \mathring{G}_k$), т. е. G открыто. Пусть теперь

$F = \bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k$, где множества F_k замкнуты. Тогда в силу законов алгебры множеств $G = \mathrm{C}F = \mathrm{C}\bigcup\limits_{k=1}^{m} F_k = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathrm{C}F_k$. Поскольку F_k замкнуто, то $\mathrm{C}F_k$ открыто при $k = 1, 2, \ldots, m$, и поэтому в силу доказанного выше $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} \mathrm{C}F_k$ открыто, а потому $F = \mathrm{C}G$ замкнуто.

З а м е ч а н и е. Теорема перестает быть верной для бесконечного «числа» множеств.

П р и м е р. Пусть $G_k = \left(-1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right)$, тогда G_k открыто $\forall k \in \mathbf{N}$, но $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} G_k = [-1, 1]$ – множество замкнутое, а не открытое.

Т е о р е м а. *Пересечение $\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$ любого семейства замкнутых множеств F_α есть множество замкнутое. Объединение $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ любого семейства открытых множеств G_α есть множество открытое.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G_α – открытое множество $\forall \alpha$ и $a \in G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$. Тогда существует α_0 такое, что $a \in G_{\alpha_0}$, G_{α_0} открыто, поэтому существует $O(a) \subset G_{\alpha_0} \subset G = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, т. е. любая точка $a \in G$ есть внутренняя точка для G. Поэтому множество G открыто. Далее, пусть F_α замкнуто $\forall \alpha$ и $F = \bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha$. Тогда $\mathrm{C}F = \mathrm{C}\bigcap\limits_{\alpha} F_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha} \mathrm{C}F_\alpha$, причем $\forall \alpha$ множество $\mathrm{C}F_\alpha$ открыто (как дополнение замкнутого множества F_α). Поэтому в силу доказанного выше множество $\mathrm{C}F$ открыто, а поэтому множество F замкнуто.

Т е о р е м а. *Для любого множества A граница ∂A есть замкнутое множество.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha \in \overline{\partial A}$. Тогда $O(a) \cap \partial A \neq \varnothing$ $\forall O(a)$, и поэтому существует $b \in \partial A \cap O(a)$, т. е. $b \in O(a) = U(b)$. Но в силу определения граничной точки имеем $U(b) \cap A \neq \varnothing$ и $U(b) \cap \mathrm{C}A \neq \varnothing$, откуда $O(a) \cap A \neq \varnothing$ и $O(a) \cap \mathrm{C}A \neq \varnothing$, т. е. $a \in \partial A$. Таким образом, имеем $\overline{\partial A} \subset \partial A \Rightarrow \overline{\partial A} = \partial A$, т. е. ∂A замкнуто.

Т е о р е м а. $\forall A \subset R$ *множество $\overline{A}$ замкнуто.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ранее было доказано, что $\mathrm{C}\overline{A} = A_e$. Но множество A_e (а стало быть, и множество $\mathrm{C}\overline{A}$) открыто, поэтому $\overline{A}$ замкнуто.

З а д а ч а. Докажите непосредственно, что $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$.

Т е о р е м а. $(a \in A' \neq \varnothing) \Leftrightarrow$ (*в любой окрестности $O(a)$ точки a $\exists$ бесконечное множество точек из A*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $A' \neq \varnothing$ и $a \in A'$, тогда $\overset{\circ}{O}(a) \cap A \neq \varnothing$ $\forall O(a)$. Допустим, что существует окрестность $O(a)$ точки a такая, что в ней содержится лишь конечное число точек

из A, тогда $\overset{\circ}{O}(a) \cap A = \{a_1, \ldots, a_k\} \neq \varnothing$. Поскольку $h_i = |a - a_i| > 0$ $(i = 1, \ldots, k)$, то имеем $h = \min(h_1, h_2, \ldots, h_k) > 0$.

Рассматривая центрированную окрестность $U_h(a)$, видим, что $\overset{\circ}{U}_h(a) \cap A = \varnothing$, но тогда $a \overline{\in} A'$. Противоречие.

Достаточность. Пусть в любой окрестности $O(a)$ точки a содержится бесконечное множество точек из A. Тогда $\overset{\circ}{O}(a) \cap A \neq \varnothing \ \forall O(a)$, т. е. $a \in A'$.

Следствие. Конечное множество $A \subset \mathbf{R}$ не имеет предельных точек.

Теорема. *Для любого $A \subset \mathbf{R}$ производное множество A' замкнуто, т. е. $\overline{A'} = A'$.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbf{R}$. Если $A' = \varnothing$, то A' замкнуто. Пусть $A' \neq \varnothing$. Заметим, что всегда $\overline{A'} \supset A'$. Покажем, что $\overline{A'} \subset A'$. Но $\forall a \in \overline{A'} \Rightarrow O(a) \cap A' \neq \varnothing \ \forall O(a)$, и тогда существует $b \in A'$ такая, что $b \in O(a)$, поэтому $O(a) = U(b)$ есть окрестность точки b. Поскольку $b \in A'$, то ее окрестность $U(b) = O(a)$ содержит бесконечное множество точек из A, но тогда $a \in A'$, т. е. $\overline{A'} \subset A'$. Итак, $\overline{A'} = A'$, т. е. производное множество A' замкнуто.

Определение. *Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется всюду плотным (в $\mathbf{R}$), если $\overline{A} = \mathbf{R}$.*

Пример. Пусть $\mathbf{Q}$ –множество рациональных точек, тогда $\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{Q}$ всюду плотно в $\mathbf{R}$. Заметим, что всюду плотное (в $\mathbf{R}$) множество $\mathbf{Q}$ счетно.

Примеры. 1) $A = \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$. Множество A – бесконечное множество, состоящее из одних изолированных точек, оно не имеет ни одной предельной точки, т. е. $A' = \varnothing$. Кроме того, $A \supset \varnothing = A'$, т. е. $A = \mathbf{Z}$ замкнуто.

2) $A = \{q \in \mathbf{Q} | q = 1/n, n \in \mathbf{N}\}$. Тогда 0 есть единственная предельная точка A, т. е. $A' = \{0\}$, причем $0 \overline{\in} A$.

3) $A = \left\{q \in \mathbf{Q} | q = \frac{1}{n} \text{ или } q = 1 - \frac{1}{n}, n \in \mathbf{N}\right\} \subset \mathbf{R}$. Тогда $A' = \{0\} \cup \{1\}$, при этом $0 \in A, 1 \in A$, $A' \subset A$, A – замкнутое множество.

4) $A = \left\{q \in \mathbf{Q} | q = \frac{1}{2^n} \text{ или } q = \frac{1}{2^n} \pm \frac{1}{2^{n+k}}; n, k \in \mathbf{N}_0\right\}$. Тогда $A' = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\} \subset A$, т. е. A замкнуто.

Будем рассматривать теперь числовые последовательности вида (a_n) в $\mathbf{R}$ $(n \to a_n,\ n \in \mathbf{N},\ a_n \in \mathbf{R})$. Заметим, что каждая последовательность (a_n) определяет некоторое множество $\{a_n\}$ из $\mathbf{R}$: $\{a_n\} = \{x \in \mathbf{R} | \exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $x = a_n\}$. Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ всегда «бесконечна», но входящие в нее элементы a_n не обязаны быть различными, так что соответствующее последовательности (a_n) множество $\{a_n\}$ может оказаться и конечным. На-

пример, последовательности (a_n), где $a_n = 1\ \forall n \in \mathbf{N}$, соответствует множество $\{a_n\} = \{1\}$, состоящее из одной точки.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* (a_n) *– числовая последовательность. Точка (число)* $a \in \mathbf{R}$ *называется пределом последовательности* (a_n), *если* $\forall$ *окрестности* $O(a)$ *точки* a $\exists N \in \mathbf{N}$ *такое, что* $a_n \in O(a)$ $\forall n \geq N$.

Если последовательность (a_n) имеет пределом точку $a \in \mathbf{R}$, то говорят, что последовательность (a_n) сходится к a.

З а м е ч а н и е. Последовательность (a_n) сходится к a, если, какова бы ни была окрестность $O(a)$ точки a, все элементы последовательности (a_n), за исключением, быть может, конечного их числа, принадлежат окрестности $O(a)$. Если использовать свойство 2) окрестностей в $\mathbf{R}$, то имеем

О п р е д е л е н и е. *Последовательность* (a_n) *сходится к точке* $a \in \mathbf{R}$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *такое, что* $a_n \in U_\varepsilon(a)$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

П р и м е р. Последовательность $\left(\frac{1}{n}\right)$ сходится к 0. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0$ по аксиоме Архимеда $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $N_0 > \frac{1}{\varepsilon} > 0$, но тогда $\frac{1}{n} < \varepsilon$ $\forall n \geq N_0$, т. е. $\frac{1}{n} \in U_\varepsilon(0)$. В частности, показано, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $U_{1/n}(0) \subset U_\varepsilon(0)$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

Т е о р е м а (единственности предела последовательности). *Если последовательность имеет предел, то этот предел единствен.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что последовательность (a_n) имеет два различных предела $a \neq b$ $(a, b \in \mathbf{R})$. Тогда в силу аксиомы отделимости Хаусдорфа (см. свойство 4) для окрестностей) существуют окрестности $U(a)$ и $V(b)$ такие, что $U(a) \cap V(b) = \varnothing$. Поскольку последовательность (a_n) сходится к a, то для $U(a)$ $\exists N_1 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in U(a)$ $\forall n \geq N_1$. С другой стороны, поскольку последовательность (a_n) сходится к b, то для окрестности $V(b)$ $\exists N_2 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in V(b)$ $\forall n \geq N_2$. Но тогда $\forall n \geq N_0 = \max(N_1, N_2)$ $a_n \in U(a) \cap V(b) = \varnothing$. Противоречие.

Т е о р е м а. $(a \in \overline{A}) \Leftrightarrow (\exists$ *последовательность* (a_n), $a_n \in A$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ *такая, что* (a_n) *сходится к* $a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Если существует последовательность (a_n) элементов A $(a_n \in A\ \forall n \in \mathbf{N})$, сходящаяся к a, то $\forall$ окрестности $U(a)$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in U(a)$ $\forall n \geq N_0$, т. е. $U(a) \cap A \neq \varnothing$ $\forall U(a)$, поэтому, согласно определению точки прикосновения, имеем $a \in \overline{A}$.

Необходимость. Пусть $a \in \overline{A}$. Рассмотрим центрированные окрестности $U_{1/n}(a)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Тогда по определению точки прикосновения имеем $U_{1/n}(a) \cap A \neq \varnothing$ $\forall n \in \mathbf{N}$, так что $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists a_n \in U_{1/n}(a) \cap A$. Рассмотрим последовательность (a_n). Очевидно, $a_n \in A$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Кро-

ме того, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > \dfrac{1}{\varepsilon}$ такое, что $\forall n \geq N(\varepsilon)$ имеем $a_n \in U_{1/n}(a) \subset V_\varepsilon(a)$. Но это и означает сходимость последовательности (a_n) к точке a.

Замечание. Итак, замыкание $\overline{A}$ множества A есть множество пределов всех сходящихся последовательностей из A.

Следствие. Для того чтобы множество A было замкнуто, необходимо и достаточно, чтобы A содержало пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Теорема. *($a \in A' \neq \varnothing$)$\Leftrightarrow$ (существует последовательность (a_n), сходящаяся к a, такая, что $a_n \in A \setminus \{a\}\ \forall n \in \mathbf{N}$ и $a_n \neq a_m$ $\forall n \neq m$).*

Доказательство. Достаточность. Пусть последовательность (a_n) сходится к $a \in \mathbf{R}$, причем $a_n \in A \setminus \{a\}\ \forall n \in \mathbf{N}$ и $a_n \neq a_m$ при $n \neq m$. Тогда $\forall O(a)\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in O(a)\ \forall n \geq N_0$, т. е. любая окрестность $O(a)$ точки a содержит бесконечное множество точек $a_n \in A$, но тогда, как было доказано ранее, $a \in A'$.

Необходимость. Пусть $A' \neq \varnothing$ и $a \in A'$. Тогда любая окрестность $O(a)$ содержит бесконечное множество точек из A. Рассмотрим семейство центрированных окрестностей $\{U_{1/n}(a)\}$, $n \in \mathbf{N}$. Тогда существует a_1 такое, что $a_1 \in \dot{U}_1(a) \cap A$, $\exists a_2 \neq a_1$ такое, что $a_2 \in \dot{U}_{1/2}(a) \cap A$, $\exists a_3 \neq a_1$, $a_3 \neq a_2$ такое, что $a_3 \in \dot{U}_{1/3}(a) \cap A$ и вообще $\forall n \geq 1\ \exists a_n \neq a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ такое, что $a_n \in \dot{U}_{1/n}(a) \cap A$. Построенная последовательность (a_n) такова, что $a_n \in A \setminus \{a\}\ \forall n$; $a_n \neq a_m$, $n \neq m$, причем $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in U_{1/n}(a) \subset V_\varepsilon(a)\ \forall n \geq N_0(\varepsilon)$, т. е. последовательность (a_n) сходится к a.

Определение. *Точка $a \in \mathbf{R}$ называется точкой сгущения (или частичным пределом) последовательности (a_n), если любая окрестность $U(a)$ точки a содержит бесконечное множество элементов из (a_n).*

Замечание. Если последовательность (a_n) сходится к a, то ее предел a является точкой сгущения последовательности (a_n). Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Последовательность (a_n), где $a_n = (-1)^n\ \forall n \in \mathbf{N}$, имеет две точки сгущения (-1) и 1 и не имеет (проверьте это самостоятельно) предела. Между прочим, множество $\{a_n\} = \{-1, 1\}$ предельных точек не имеет.

Замечание. Точка сгущения последовательности (a_n) может не быть предельной точкой множества $\{a_n\}$, хотя и будет всегда точкой прикосновения множества $\{a_n\}$.

Определение. *Пусть (a_n) – последовательность. Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел (n_k) такую, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ ($n_k < n_l$ при $k < l$), $n_k \geq k\ \forall k$.*

Тогда последовательность (a_{n_k}) *называется подпоследовательностью последовательности* (a_n).

Замечание. Полагая для (a_n) $n_k = k$, видим, что последовательность (a_k) является подпоследовательностью для самой себя.

Теорема. *(а является точкой сгущения последовательности* (a_n)*)* $\Leftrightarrow$ *(из последовательности* (a_n) *можно выделить подпоследовательность* (a_{n_k})*, сходящуюся к* a*).*

Доказательство. Необходимость. Пусть a есть точка сгущения последовательности (a_n). Тогда в любой центрированной окрестности $U_{1/k}(a)$ $(k \in \mathbf{N})$ существует бесконечное множество значений n таких, что $a_n \in U_{1/k}(a)$. Рассмотрим такое $n_1 \geq 1$, что $a_{n_1} \in U_1(a)$. Далее возьмем $n_2 > n_1 \geq 1$ такое, что $a_{n_2} \in U_{1/2}(a)$, при этом $n_2 \geq 2$, затем выберем $n_3 > n_2 \geq 2$ таким, что $a_{n_3} \in U_{1/3}(a)$, причем $n_3 \geq 3$. Шаг за шагом получим последовательность $k \to n_k$ такую, что $n_k > n_{k-1}$, $a_{n_k} \in U_{1/k}(a)$, $n_k \geq k$. Очевидно, $n_k \uparrow\uparrow$ и $n_k \geq k$, так что последовательность (a_{n_k}) есть подпоследовательность последовательности (a_n). Положим $b_k = a_{n_k}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $N_0 \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$, и поэтому $b_k = a_{n_k} \in U_{1/k}(a) \subset V_\varepsilon(a)\ \forall k \geq N_0$. Но это означает, что последовательность (b_k), а стало быть, и (a_{n_k}), сходится к a.

Достаточность. Пусть из последовательности (a_n) можно выделить подпоследовательность (a_{n_k}), сходящуюся к a. Тогда в любой окрестности $O(a)$ содержится бесконечное множество элементов подпоследовательности (a_{n_k}), а тем самым и последовательности (a_n). Но тогда a есть точка сгущения последовательности (a_n).

Теорема. *Множество точек сгущения последовательности* (a_n) *есть замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть A есть множество всех точек сгущения последовательности (a_n). Пусть $a \in A'$, тогда в любой окрестности $O(a)$ точки a содержится хотя бы одна точка сгущения b, и поскольку $O(a) = U(b)$, то по определению точки сгущения в окрестности $U(b) = O(a)$ содержится бесконечное множество элементов последовательности (a_n), т. е. $a \in A'$ есть точка сгущения последовательности (a_n). Тем самым показано $A' \subset A$, т. е. множество A замкнуто.

§ 2. Понятие предела функции в точке

Пусть дана действительная функция одного действительного переменного $f : y = f(x)$, $x \in A \subset \mathbf{R}$, $y \subset \mathbf{R}$ и точка $a \in \mathbf{R}$. Введем сначала понятие предела функции $f(x)$ (при $x \to a$) для точек $a \in A'$, т. е. только для предельных точек области определения A функции $f(x)$. В дальнейшем будут рассмотрены обобщения понятия предела

функции на случаи $(x \to a+0)$, $(x \to a-0)$, $(x \to +\infty)$, $(x \to -\infty)$, $(x \to \infty)$. Будет рассмотрено также понятие предела функции по «базису фильтра».

Отметим следующие свойства проколотых окрестностей точки a:
1) $\dot{U}(a) \neq \varnothing \ \forall U(a)$ $(a \in \mathbf{R})$ и, в частности, $\dot{V}_h(a) \neq \varnothing \ \forall h > 0$;
2) $\forall \dot{U}^{(1)}(a)$ и $\dot{U}^{(2)}(a) \ \exists \dot{V}(a) \subset \dot{U}^{(1)}(a) \cap \dot{U}^{(2)}(a)$ и, в частности, $\forall \dot{U}_{h_1}(a), \dot{U}_{h_2}(a) \ \exists \dot{V}_{h_3}(a) \subset \dot{U}_{h_1}(a) \cap \dot{U}_{h_2}(a)$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, имеют место даже более точные утверждения:

$$\dot{U}^{(1)}(a) \cap \dot{U}^{(2)}(a) = \dot{V}(a) \text{ и } \dot{U}_{h_1}(a) \cap \dot{U}_{h_2}(a) = \dot{U}_{h_3}(a),$$

где $h_3 = \min(h_1, h_2) > 0$.

О п р е д е л е н и е (окрестностное определение предела функции в точке). *Пусть дана функция* $f : x \in A \subset R$, $y = f(x) \in \mathbf{R}$ *и* $a \in A'$ – *предельная точка области определения* A. *Точка (число)* $b \in \mathbf{R}$ *называется пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, *если для любой окрестности* $V(b)$ *точки* b *существует окрестность* $U(a)$ *точки* a *такая, что* $f(x) \in V(b) \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap A$. Запись: $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.

З а м е ч а н и е. Итак, $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ $(a \in A')$, если $\forall V(b) \ \exists U(a)$ такая, что $f(\dot{U}(a) \cap A) \subset V(b)$. Окрестностному определению предела эквивалентно следующее (ε, δ) о п р е д е л е н и е предела функции в точке по Коши:

Пусть функция $f(x)$ *определена на множестве* $A \subset \mathbf{R}$ *и* $a \in A'$. *Тогда* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, *если* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x \in A$, *удовлетворяющего неравенствам* $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$. Отметим еще одно определение предела функции в точке.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* $A \subset \mathbf{R}$ *и* $a \in A'$. *Тогда* $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ *существует окрестность* $U(a)$ *точки* a *такая, что* $|f(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap A$.

П р и м е р. $f(x) = [x]$, $x \in A = [0, n)$, очевидно, $n \in A'$. Покажем, что $\lim\limits_{x \to n} f(x) = n - 1$. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = 1/2 > 0$ такое, что $\forall x \in A$, удовлетворяющего неравенствам $0 < |x - n| < 1/2$ $(n - 1/2 < x < n) \Rightarrow |[x] - (n-1)| = |(n-1) - (n-1)| = 0 < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Пусть $f(x)$ определена на множестве A и $a \in A'$. Введем систему $\mathbf{B}$ множеств $\{B\}$ таких, что $B = \dot{U}(a) \cap A$. Тогда система $\mathbf{B}$ обладает свойствами: 1) $B = \dot{U}(a) \cap A \neq \varnothing \ \forall B \in \mathbf{B}$ (в силу определения предельной точки $a \in A'$ и свойства 1) для проколотых окрестностей $\dot{U}(a)$) и 2) $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B} \ \exists B_3 \in \mathbf{B}$ такой, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ (в силу свойства 2) для проколотых окрестностей $\dot{U}(a)$).

Тогда $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует множество $B \in \mathbf{B}$ такое, что $|f(x) - b| < \varepsilon \ \forall x \in B$.

Рассмотрим числовую последовательность $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$, $a_n \in \mathbf{R}$. Вспомним введенное ранее понятие предела последовательности.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $n \to a_n$, $n \in \mathbf{N}$, *есть числовая последовательность. Число* $a \in \mathbf{R}$ *называется пределом последовательности* (a_n), *если* $\forall U(a)\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ *такое, что* $a_n \in U(a)\ \forall n \geq N_0$. Запись: $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Или

О п р е д е л е н и е. *Число* $a \in \mathbf{R}$ *называется пределом последовательности* (a_n), *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ *такое, что* $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \geq N_0$.

З а м е ч а н и е. Итак, если числовая последовательность (a_n) сходится к a, то $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

З а м е ч а н и е. Введем систему $\mathbf{B}$ множеств $\{B_n\}$, где $B_n = \{m \in \mathbf{N} | m \geq n\}$. Очевидно, $\mathbf{B}$ обладает следующими свойствами (ср. свойства системы $\mathbf{B}$ из определения $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$):

1) $B_n \neq \varnothing\ \forall n \in \mathbf{N}$;

2) $\forall B_m, B_n \in \mathbf{B}\ \exists B_l \in \mathbf{B}$ такое, что $B_l \subset B_m \cap B_n$ $(l = \max(m, n))$. Тогда $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists B_{N_0} \in \mathbf{B}$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \in B_{N_0}$.

То общее, что есть в определениях $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$ с помощью системы $\mathbf{B}$, послужит нам в дальнейшем для введения общего понятия предела функции по «базису фильтра».

П р и м е р ы. 1). Пусть (a_n), где $a_n = c\ \forall n \in \mathbf{N}$, тогда $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = c$, так как $\forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow |a_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0$.

2). Пусть $a_n = (-1)^n$. Последовательность (a_n) не имеет предела (хотя у нее и есть два частичных предела $-1 = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n+1}$ и $1 = \lim\limits_{n \to +\infty} a_{2n}$.) В самом деле, допустим, что $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ и $a \leq 0$, тогда $\forall n = 2k \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n - a = 1 - a \geq 1 \Rightarrow |a_n - a| \geq 1$. Аналогично при $a > 0$ $\forall n = 2k + 1 \in \mathbf{N} \Rightarrow a_n - a = -1 - a < -1 \Rightarrow |a_n - a| \geq 1$. При $0 < \varepsilon < 1$ получаем противоречие с определением предела $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$.

3). Если $0 < a < 1$, то $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$. В самом деле, $\forall p > 0$ и $\forall n \in \mathbf{N}$ имеем $(1+p)^n > (1+p)^n - 1 = p \sum\limits_{k=0}^{n-1} (1+p)^k \geq p \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1 = np$. Поскольку $0 < a < 1$, то для $p = \dfrac{1}{a} - 1$ имеем $p > 0$ и $a = \dfrac{1}{1+p}$. Тогда имеем $0 < a^n = \left(\dfrac{1}{1+p}\right)^n = \dfrac{1}{(1+p)^n} < \dfrac{1}{np}$. В силу теоремы Архимеда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $N_0 > \dfrac{1}{p\varepsilon}$, откуда $\forall n \geq N_0 \Rightarrow |a^n - 0| = |a^n| < \dfrac{1}{np} < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$ при $0 < a < 1$.

4). Если $q \in \mathbf{R}$, $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$. В самом деле, $\forall q \in \mathbf{R}$ имеем $(1-q)\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$, поэтому при $q \neq 1$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) \Rightarrow \left(\left|\sum\limits_{k=0}^{n} q^k - \dfrac{1}{1-q}\right| = \left|\dfrac{-q^{n+1}}{1-q}\right| = \left|\dfrac{q}{1-q}\right| |q^n|\right)$, а при $q = 0$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}\right)$. Используя доказанное ранее соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = 0$ при $0 < |q| < 1$, имеем $(\forall q \in \mathbf{R},\ 0 < |q| < 1)\ \forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|q|^n < \left|\dfrac{1-q}{q}\right| \varepsilon\ \forall n \geq N_0$, т. е. $\left|\sum\limits_{k=0}^{n} q^k - \dfrac{1}{1-q}\right| < \varepsilon \left|\dfrac{q}{1-q}\right| \cdot \left|\dfrac{1-q}{q}\right| = \varepsilon\ \forall n \geq N_0$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1}{1-q}$.

З а м е ч а н и е. Рассмотрим числовую последовательность (a_n) и построим еще одну последовательность (s_n), где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ называется n-й частичной суммой бесконечного числового ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k. \tag{2.1}$$

О п р е д е л е н и е. *Если* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s \in \mathbf{R}$, *то ряд* (2.1) *называется сходящимся, а число* s *называется его суммой. Если* $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$ *не существует, то числовой ряд* (2.1) *называется расходящимся.*

5). Пусть $a_k = q^{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ есть член геометрической прогрессии со знаменателем q. Тогда при $q \neq 1$ $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1} = \dfrac{1-q^n}{1-q}$, и поэтому а) при $|q| < 1$ $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \dfrac{1}{1-q}$, так что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} = \dfrac{1}{1-q}$ (ряд сходится), б) при $|q| \geq 1$ ряд расходится (доказать самостоятельно).

6). Рассмотрим функцию $x \to x$, $x \in A$, причем $a \in A'$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} x = a$. В самом деле, полагая $f(x) = x\ \forall x \in A$, из определения предела функции в точке по Коши имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in A$, удовлетворяющего неравенствам $0 < |x - a| < \delta = \varepsilon$, $\Rightarrow |f(x) - a| = |x - a| < \varepsilon$, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

§ 3. Теоремы о пределах функций и последовательностей

Будем рассматривать функцию вида $f : x \in M$, $f(x) \in \mathbf{R}$ (причем $a \in M'$) и числовые последовательности (a_n) $(n \to a_n, n \in \mathbf{N})$. Будут

доказаны «дуальные» теоремы о пределах как для функций, так и для последовательностей.

Теорема единственности предела функции. *Если функция $f(x)$, определенная на множестве M, имеет предел в точке $a \in M'$, то этот предел единствен.*

Доказательство. Допустим от противного, что $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, причем $b_1 \neq b_2$ $(b_1, b_2 \in \mathbf{R})$. В силу аксиомы отделимости Хаусдорфа существуют окрестности $U^{(1)}(b_1)$ и $U^{(2)}(b_2)$ такие, что $U^{(1)}(b_1) \cap U^{(2)}(b_2) = \varnothing$. Поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_1$, то в силу окрестностного определения предела функции в точке a существует окрестность $V^{(1)}(a)$ такая, что $f(x) \in U^{(1)}(b_1)$ $\forall x \in \dot{V}^{(1)}(a) \cap M$. С другой стороны, поскольку $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b_2$, то существует окрестность $V^{(2)}(a)$ такая, что $f(x) \in U^{(2)}(b_2)$ $\forall x \in \dot{V}^{(2)}(a) \cap M$.

Но тогда, используя свойство 2) для проколотых окрестностей, видим, что $\exists \dot{W}(a) \subset \dot{V}^{(1)}(a) \cap \dot{V}^{(2)}(a)$, и тогда $\forall x \in \dot{W}(a) \cap M \Rightarrow f(x) \in U^{(1)}(b_1) \cap U^{(2)}(b_2) = \varnothing$. Противоречие.

Замечание. Теорема единственности предела последовательности была доказана в § 1 главы 3 данной книги.

Теорема 1. *Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A > B$. Тогда существует $U(a)$ такая, что $f(x) > B$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.*

Доказательство. Положим $A - B = \varepsilon_0 > 0$. Тогда по определению предела функции в точке $a \in M'$ $\exists U(a)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M \Rightarrow (|f(x) - A|) < \varepsilon_0) \Rightarrow (-\varepsilon_0 < f(x) - A < \varepsilon_0)$, откуда $f(x) > A - \varepsilon_0 = B$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.

Замечание. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $A < C$. Тогда существует $U(a)$ такая, что $f(x) < C$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.

Теорема 1′. *Пусть существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $a > b$. Тогда существует $N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n > b$ $\forall n \geq N_0$.*

Доказательство. Пусть $a - b = \varepsilon_0 > 0$, тогда в силу определения $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ для $\varepsilon_0 > 0$ $\exists N_0(\varepsilon_0) \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon_0$ $\forall n \geq N_0(\varepsilon_0)$, откуда $-\varepsilon_0 < a_n - a < \varepsilon_0$, т. е. $a_n > a - \varepsilon_0 = b$ $\forall n \geq N_0(\varepsilon_0)$.

Замечание. Пусть существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $a < c$. Тогда существует $N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n < c$ $\forall n \geq N_0$.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset (-\infty, +\infty)$, называется ограниченной на этом множестве, если существует $K > 0$ такое, что $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in M$.*

Определение. *Функция $f(x)$, определенная на множестве M, называется локально ограниченной в точке $a \in \overline{M}$ (которая либо принадлежит M, либо является предельной точкой для M), если существуют $U(a)$ и $K > 0$ такие, что $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in U(a) \cap M$.*

О п р е д е л е н и е. *Функция* $f(x)$ $(f : M \to \mathbf{R})$ *называется локально ограниченной на множестве* $M_1 \subset \overline{M}$, *если* $f(x)$ *локально ограничена в каждой точке множества* M_1.

З а м е ч а н и е. Из ограниченности функций $f(x)$ на множестве M следует ее локальная ограниченность на M, но из локальной ограниченности $f(x)$ на M ее ограниченность на множестве M, вообще говоря, не следует.

П р и м е р. Пусть $f : x \to x$, $x \in M = (-\infty, +\infty)$. Тогда $\forall a \in M$ имеем $|f(x)| \leq |a| + 1$ $\forall x \in U_1(a)$ (т. е. $f(x)$ локально ограничена на множестве M), однако функция $f(x)$ не ограничена на множестве M. В самом деле, $\forall K > 0$ $\exists a \in M$ такое, что $|f(x)| = |a| > K$.

Т е о р е м а (о локальной ограниченности функции, имеющей предел). *Пусть существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ $(a \in M')$. *Тогда функция* $f(x)$ *локально ограничена в точке* a.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, где $a \in M'$. Выберем числа B и C такими, что $B < A < C$. Тогда в силу теоремы 1 (и замечания к ней) существует $U(a)$ такая, что $B < f(x) < C$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. Полагая $K = \max(|B|, |C|, |f(a)|)$ (если функция $f(x)$ не определена при $x = a$, то $|f(a)|$ нужно убрать), имеем $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in U(a) \cap M$, т. е. $f(x)$ локально ограничена в точке a.

О п р е д е л е н и е. *Числовая последовательность* (a_n) $(n \to a_n, n \in \mathbf{N})$ *называется ограниченной, если существует* $C > 0$ *такое, что* $|a_n| \leq C$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

О п р е д е л е н и е. *Числовая последовательность* (a_n) *называется финально ограниченной, если существуют* $C > 0$ *и* $N_0 \in \mathbf{N}$ *такие, что* $|a_n| \leq C$ $\forall n \geq N_0$.

З а м е ч а н и е. Очевидно, если последовательность (a_n) ограничена, то она и финально ограничена. Верно и обратное утверждение.

Т е о р е м а. *Если числовая последовательность* (a_n) *финально ограничена, то* (a_n) – *ограниченная последовательность.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (a_n) финально ограничена, тогда существуют $C_1 > 0$ и $N_1 \in \mathbf{N}$ такие, что $|a_n| \leq C_1$ $\forall n \geq N_1$. Положим $C_2 = \max(C_1, |a_1|, \ldots, |a_{N_1 - 1}|)$. Тогда, очевидно, $|a_n| \leq C_2$ $\forall n \in \mathbf{N}$, т. е. последовательность (a_n) ограничена.

Т е о р е м а. *Любая сходящаяся последовательность ограничена.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, тогда для $\varepsilon = 1 > 0$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall n \geq N_0 \Rightarrow (|a_n - a| < 1) \Rightarrow (|a_n| = |a + (a_n - a)| \leq |a| + |a_n - a| < |a| + 1)$. Таким образом, (a_n) финально ограничена, а потому в силу предыдущей теоремы (a_n) – ограниченная последовательность.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $a \in M'$ *и существует окрестность* $U(a)$ *такая, что* $f(x) \geq B$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. *Тогда если существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, *то* $A \geq B$.

Доказательство. Допустим, что $A < B$. Тогда поскольку $A = \lim\limits_{x \to a} f(x)$, то в силу теоремы 1 существует $V(a)$ такая, что $f(x) < B \; \forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. Но в силу свойства 2) для проколотых окрестностей существует $\dot{W}(a) \subset \dot{U}(a) \cap \dot{V}(a)$, и поэтому $f(x) < B \; \forall x \in \dot{W}(a) \cap M \subset \dot{U}(a) \cap M$, что противоречит условиям теоремы 2.

Теорема 2'. *Если существуют* $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ *и* $N_0 \in \mathbb{N}$ *такое, что* $a_n \geq b \; \forall n \geq N_0$, *то* $a \geq b$. Доказать самостоятельно.

Доказательство. Допустим от противного, что $a < b$. Тогда поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, то в силу теоремы 1' существует $N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $a_n < b \; \forall n \geq N_1$, но тогда $a_n < b \; \forall n \geq N_2 = \max(N_0, N_1) \geq N_0$, что противоречит условию теоремы 2'.

Определение. *Если* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, *где* $a \in M'$, *то функция* $f(x)$ *называется бесконечно малой в точке* a *(или при* $x \to a$*)*. Запись: $f(x) \to 0 \; (x \to a)$.

Определение. *Числовая последовательность* (α_n) *называется бесконечно малой, если существует* $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$.

Теорема (о представлении функции, имеющей предел в точке). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* M *и* $a \in M'$. *Тогда (существует* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$*)*$\Leftrightarrow$ *(существует окрестность* $U(a)$ *точки* a, *в которой имеет место представление* $f(x) = A + \alpha(x) \; \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, *где функция* $\alpha(x)$ *(определенная на множестве* $\dot{U}(a) \cap M$*) - бесконечно малая при* $x \to a$*).*

Доказательство. Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $a \in M'$. Полагая $\alpha(x) = f(x) - A \; \forall x \in M$, видим, что $\forall \varepsilon > 0 \; \exists U(a)$ такая, что $|f(x) - A| = |\alpha(x)| < \varepsilon \; \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, т. е. существует $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$. Таким образом, для любой окрестности $U(a)$ имеет место представление $f(x) = A + \alpha(x) \; \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, где $\alpha(x) \to 0 \; (x \to a)$.

Достаточность. Пусть существует окрестность $U(a)$ такая, что имеет место представление

$$f(x) = A + \alpha(x) \; \forall x \in \dot{U}(a) \cap M,$$

где $\alpha(x) \to 0 \; (x \to a)$. Тогда поскольку

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

то $\forall \varepsilon > 0 \; \exists V(a) \subset U(a)$ такая, что

$$|\alpha(x)| = |f(x) - A| < \varepsilon \; \forall x \in V(a) \cap M,$$

т. е. существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Т е о р е м а (о представлении сходящейся последовательности). *(Существует* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$*)* $\Leftrightarrow$ *(существует бесконечно малая последовательность* (α_n) *такая, что* $a_n = a + \alpha_n\ \forall n \in \mathbf{N}$*).* (Доказать самостоятельно.)

Т е о р е м а (о пределе суммы функций). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на* M *и* $a \in M'$*. Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$*. Тогда существует* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists U(a)$ такая, что $|f(x) - A| < \varepsilon/2\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. Но существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, поэтому для выбранного $\varepsilon > 0\ \exists V(a)$ такая, что $|g(x) - B| < \varepsilon/2\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. Но в силу свойства 2) для проколотых окрестностей существует $\dot{W}(a) \subset \dot{U}(a) \cap \dot{V}(a)$, и тогда в силу выбора окрестностей $U(a)$ и $V(a)$ имеем

$$|(f(x) + g(x)) - (A + B)| \le |f(x) - A| + |g(x) - B| <$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2\, \forall x \in \dot{W}(a) \cap M,$$

т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = A + B$.

С л е д с т в и е. Пусть функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ определены на M и $a \in M'$. Пусть существует $\lim\limits_{x\to a} f_k(x) = A_k$ $(k = 1, 2, \dots, m)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} \lim\limits_{x\to a} f_k(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} A_k$. (Доказать по индукции.)

Т е о р е м а (о пределе суммы сходящихся последовательностей). *Пусть существуют* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$*. Тогда существует* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b$. (Доказать самостоятельно.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon/2\ \forall n \ge N_1$. Но $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, поэтому для того же $\varepsilon > 0\ \exists N_2 \in \mathbf{N}$ такое, что $|b_n - b| < \varepsilon/2\ \forall n \ge N_2$, то тогда $\forall n \ge N_3 = \max(N_1, N_2) \Rightarrow (|(a_n + b_n) - (a + b)| \le |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n + b_n) = a + b)$.

С л е д с т в и е. Сумма конечного числа бесконечно малых функций (при $x \to a$) (или бесконечно малых последовательностей) есть бесконечно малая функция при $x \to a$ (бесконечно малая последовательность).

Т е о р е м а (о пределе произведения локально ограниченной функции на функцию бесконечно малую). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $\alpha(x)$ *определены на* M *и* $a \in M'$*. Пусть функция* $f(x)$ *локально ограничена в точке* a*, а функция* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to a$*. Тогда функция* $f(x) \cdot \alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to a$.

Доказательство. Поскольку $f(x)$ локально ограничена в точке $a \in M'$, то существуют $K > 0$ и $U(a)$ такие, что $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V(a)$ такая, что $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{K}$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. В силу свойства 2) для проколотых окрестностей видим, что $\exists \dot{W}(a) \subset \dot{U}(a) \cap \dot{V}(a)$, но тогда в силу выбора $U(a)$ и $V(a)$ $|f(x)\alpha(x)| = |f(x)||\alpha(x)| < K \cdot \dfrac{\varepsilon}{K} = \varepsilon$ $\forall x \in \dot{W}(a) \cap M$, т. е. существует $\lim\limits_{x \to a}(f(x)\alpha(x)) = 0$.

Теорема (о сходимости произведения финально ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность). *Произведение финально ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.* (Доказать самостоятельно.)

Доказательство. Пусть для (a_n) существуют $C > 0$ и $N_0 \in \mathbf{N}$ такие, что $|a_n| \leq C$ $\forall n \geq N_0$. Поскольку существует $\lim\limits_{n \to +\infty}(a_n) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbf{N}$ такое, что $|\alpha_n| \leq \varepsilon / C$ $\forall n \geq N_1$, т. е. $|a_n \alpha_n| < \dfrac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon$ $\forall n \geq N_2 = \max(N_1, N_2) \Rightarrow \exists \lim\limits_{n \to +\infty}(a_n \alpha_n) = 0$.

Теорема (о пределе произведения функций). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на M и $a \in M'$. Пусть существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. Тогда существует $\lim\limits_{x \to a}(f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B$.*

Доказательство. Поскольку существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = B$, то по теореме о представлении функции, имеющей предел, существует $V(a)$ такая, что $f(x) = A + \alpha(x)$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, $\alpha(x) \to 0$ $(x \to a)$; $g(x) = B + \beta(x)$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, $\beta(x) \to 0$ $(x \to a)$. Тогда имеем $f(x) \cdot g(x) = A \cdot B + (\alpha(x) \cdot B + \beta(x) \cdot A + \alpha(x) \cdot \beta(x)) \equiv AB + \gamma(x)$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. Из существования $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$ следует, в частности, что $\beta(x)$ локально ограничена в точке a, но тогда функции $\alpha(x) \cdot B$, $\beta(x) \cdot A$ и $\alpha(x) \cdot \beta(x)$, по теореме о пределе произведения локально ограниченной функции на бесконечно малую, есть функции бесконечно малые при $x \to a$. Но функция $\gamma(x)$ как сумма трех бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая при $x \to a$. Из представления $f(x) \cdot g(x) = AB + \gamma(x)$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, где $\lim\limits_{x \to a} \gamma(x) = 0$, по теореме о представлении функции, имеющей предел, видим, что существует $\lim\limits_{x \to a}(f(x)g(x)) = AB$.

Следствие. Пусть функции $f_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f_k(x) = A_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to a} \prod\limits_{k=1}^{m} f_k(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} A_k$. (Доказать самостоятельно.)

Т е о р е м а (о пределе произведения сходящихся последовательностей). *Если существуют* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *то существует* $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. (Доказать самостоятельно.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $a_n b_n - ab = (a_n - a)b_n + a(b_n - b)$, поскольку существуют $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2|b| + \varepsilon}$, $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}$ $\forall n \geq N$. Тогда $\forall n \geq N\ |b_n| = |b + (b_n - b)| \leq |b| + |b_n - b| \leq |b| + \varepsilon/2 = (2|b| + \varepsilon)/2$; $|a_n b_n - ab| \leq |b_n||a_n - a| + |a||b_n - b| \leq (|b| + \varepsilon/2)\dfrac{\varepsilon}{2|b| + \varepsilon} + |a|\dfrac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.

П р и м е р. $\lim\limits_{n\to+\infty}[(1 + (-1)^n/n)(1 + 1/(n+4))] = \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + (-1)^n/n) \cdot \lim\limits_{n\to+\infty}(1 + 1/(n+4)) = 1 \cdot 1 = 1$.

С л е д с т в и е. Произведение конечного числа бесконечно малых функций при $x \to a$ (бесконечно малых последовательностей) есть бесконечно малая функция при $x \to a$ (бесконечно малая последовательность).

Л е м м а. *Пусть функция* $g(x)$ *определена на* M *и* $a \in M'$. *Пусть существует* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *причем* $B \neq 0$. *Тогда существует* $U(a)$ *такая, что* $g(x) \neq 0\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ *и существует* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку существует $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то для $\varepsilon_0 = |B|/2 > 0\ \exists V(a)$ такая, что $|g(x) - B| < \varepsilon_0\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap M$ или $|g(x)| = |B + (g(x) - B)| \geq |B| - |g(x) - B| \geq |B| - |B|/2 = |B|/2 > 0$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. Далее, $\forall \varepsilon > 0\ \exists W(a) \subset V(a)$ такая, что $|g(x) - B| < \dfrac{B^2\varepsilon}{2}$ $\forall x \in \dot{W}(a) \cap M$, и поэтому для тех же x имеем оценку $\left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{B}\right| = \dfrac{|g(x) - B|}{|g(x)| \cdot |B|} < \dfrac{B^2\varepsilon}{2} \cdot \dfrac{2}{|B|} \cdot \dfrac{1}{|B|} = \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{B}$ при $B \neq 0$.

Л е м м а (для последовательности). *Если* $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b \neq 0$, *то* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. (Доказать самостоятельно.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку существует $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|b_n - b| < \min(\varepsilon b^2/2, |b|/2)\ \forall n \geq N$. Тогда поскольку $b_n \neq 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ и $b \neq 0$, то $\forall n \geq N\ |b_n| = |b + (b_n - b)| \geq |b| - |b_n - b| > |b| - |b|/2 = |b|/2 > 0$; $\left|\dfrac{1}{b_n} - \dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{|b_n - b|}{|b_n||b|} \leq \dfrac{2|b_n - b|}{b^2} < \dfrac{2}{b^2} \cdot \varepsilon \cdot \dfrac{b^2}{2} = \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} 1/b_n = 1/b$.

П р и м е р. $\lim\limits_{n\to+\infty} 1/(1 + (-1)^{n+1}/n) = 1/\lim\limits_{n\to+\infty}(1 + (-1)^{n+1}/n) = 1/1 = 1$.

Т е о р е м а (о пределе частного двух функций). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на* M *и* $a \in M'$. *Пусть существуют* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ *и* $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *где* $B \neq 0$. *Тогда* $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = A/B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условий теоремы из леммы (для функций) вытекает, что существует $U(a)$ такая, что $|g(x)| > 0\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, и тогда $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \dfrac{1}{g(x)}\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.

Применение теоремы о пределе произведения и леммы (для функции) дает $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = A \cdot \dfrac{1}{B} = \dfrac{A}{B}$.

Т е о р е м а (о пределе частного двух последовательностей). *Пусть существуют* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *причем* $b_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ *и* $b \neq 0$. *Тогда существует* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n/b_n = a/b$. (Доказать самостоятельно.)

З а м е ч а н и е (о пределе разности двух функций (последовательностей)). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на M и $a \in M'$. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim\limits_{x\to a}(f(x) - g(x)) = A - B$. Аналогично, если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - b_n) = a - b$. (Доказать самостоятельно с помощью представлений $f(x) - g(x) = f(x) + (-1)g(x)\ \forall x \in M$ и $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n\ \forall n \in \mathrm{N}$.)

Т е о р е м а (о предельном переходе в неравенстве для функций, имеющих пределы). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на* M *и* $a \in M'$. *Если* $\exists U(a)$ *такая, что* $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ *и* $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, *то* $A \geq B$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию $h(x) = f(x) - g(x)\ \forall x \in M$. Тогда в силу условий нашей теоремы $h(x) \geq 0\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ и в силу замечания о пределе разности двух функций $\exists \lim\limits_{x\to a} h(x) = A - B$. Но тогда в силу теоремы 2 имеем $A - B \geq 0 \Rightarrow A \geq B$.

Т е о р е м а (о предельном переходе в неравенстве для сходящихся последовательностей). *Пусть существуют* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ *и* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, *причем* $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ *такое, что* $a_n \geq b_n\ \forall n \geq N_0$. *Тогда* $a \geq b$. (Доказать самостоятельно.)

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассматривая последовательность (c_n), где $c_n = a_n - b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$, видим, что $c_n \geq 0\ \forall n \geq N_0$ и, кроме того, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a - b$. В силу теоремы 2′ имеем $a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$.

З а м е ч а н и е. Если $a_n > b_n\ \forall n \geq N_0$ и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то, вообще говоря, нельзя утверждать, что имеет место строгое неравенство $a > b$ (вместо $a \geq b$). Пусть, например, $a_n = 1/n$, $b_n = 0\ \forall n \in \mathbf{N}$, тогда $a_n > b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b = 0$, но $a = b = 0$.

§ 4. Признаки существования предела функции в точке и предела числовой последовательности

О п р е д е л е н и е. *Числовая последовательность* (a_n) *называется строго монотонно возрастающей (монотонно возрастающей), если* $a_n < a_{n+1}$ $(a_n \le a_{n+1})$ $\forall n \in \mathbf{N}$.
Запись: $a_n \uparrow\uparrow$ $(a_n \uparrow)$.

Аналогично определяются монотонно убывающая $(a_n \downarrow)$ и строго монотонно убывающая $(a_n \downarrow\downarrow)$ последовательности.

Т е о р е м а (критерий сходимости монотонной последовательности). *Пусть* (a_n) *- монотонно возрастающая (монотонно убывающая) числовая последовательность. Тогда* $(\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n) \Leftrightarrow$ (*последовательность* (a_n) *ограничена сверху* (*ограничена снизу*)); *при этом если* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$, *то* $a = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$ *для* $a_n \uparrow$ (*соответственно* $a = \inf\limits_{\mathbf{N}} a_n$ *для* $a_n \downarrow$)).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$. Тогда последовательность (a_n) сходится, а потому ограничена (и, в частности, ограничена как сверху, так и снизу).

Достаточность. Пусть числовая последовательность (a_n) монотонно возрастает и ограничена сверху. Тогда имеем

$$a_n \le a_{n+1}\, \forall n \in \mathbf{N} \tag{4.1}$$

и $\exists C > 0$ такое, что

$$a_n \le C \forall n \in \mathbf{N}. \tag{4.2}$$

Рассмотрим множество $A = \{a_n;\, n \in \mathbf{N}\}$. В силу оценки (4.2) множество A будет ограниченным сверху непустым множеством из $\mathbf{R}$. В силу полноты $\mathbf{R}$ из принципа полноты Вейерштрасса вытекает, что существует $a = \sup A = \sup\limits_{\mathbf{N}} a_n \in \mathbf{R}$, причем по определению точной верхней грани $a = \sup A$ имеем: 1) $a_n \le a$ $\forall n \in \mathbf{N}$; 2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a - \varepsilon < a_{N_0} \le a$. Но тогда в силу оценки (4.1) имеем $a_n \ge a_{N_0}$ $\forall n \ge N_0$, т. е. $a - \varepsilon < a_n \le a$ $\forall n \ge N_0$. Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \ge N_0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

З а м е ч а н и е (критерий сходимости знакоположительного числового ряда). (Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ с неотрицательными членами $a_k \ge 0$ $\forall k$ сходится) $\Leftrightarrow$ (последовательность его частичных сумм (s_n) ограничена сверху). В случае сходимости ряда для его суммы s имеем $s = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sup\limits_{\mathbf{N}} s_n$.

В самом деле, если $a_k \ge 0$ $\forall k \in \mathbf{N}$, то $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \ge s_n$ $\forall n$, т. е. $s_n \uparrow$. Но критерием сходимости монотонно возрастающей числовой

последовательности (s_n) является ее ограниченность сверху, причем если существует $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = s$, то $s = \sup\limits_n s_n = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Пример. $0 < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$. В самом деле, имеем $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Тогда 1) $a_k = \frac{1}{k^2} > 0\ \forall k \in \mathbf{N}$. Далее, $s_n < 1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 + \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k-1} - \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + 1 - \frac{1}{n+1} < 2\ \forall n \in \mathbf{N}$, т. е. 2) $s_n \le 2\ \forall n \in \mathbf{N}$. В силу установленного критерия сходимости знакоположительного ряда видим, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ сходится.

Теорема (формула бинома Ньютона). *Для любых* $n \in \mathbf{N}$ *и любых* $a, b \in \mathbf{R}$ $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, *где* $C_n^k \equiv \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, *при этом полагают* $0! = 1! = 1$ *так, что* $C_0^0 = \binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n} = C_n^n$.

Доказательство. Пусть $A = \{n \in \mathbf{N} | (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k\}$. Заметим, что для $n = 1$ формула бинома Ньютона верна, так что имеем 1) $1 \in A$. Докажем 2) $n \in A \Rightarrow (n+1) \in A$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b) = (a+b) \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} = C_n^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k a^{n-k} b^{k+1} + C_n^n b^{n+1} = \{k_1 = k+1 \Rightarrow k = k_1 - 1\} =$$

$$= C_n^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} C_n^k a^{n+1-k} b^k + \sum_{k_1=1}^{n} C_n^{k_1-1} a^{n+1-k_1} b^{k_1} + C_n^n b^{n+1} =$$

$$= \{C_n^0 = 1 = C_{n+1}^0,\ C_n^n = 1 = C_{n+1}^{n+1},\ k_1 \equiv k\} =$$

$$= C_{n+1}^0 a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (C_n^k + C_n^{k-1}) a^{n+1-k} b^k + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1} =$$

$$= \left\{ \text{но } C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} = \right.$$

$$\left. = \frac{n!(n-k+1+k)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k \right\} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k a^{n+1-k} b^k.$$

В силу принципа математической индукции из 1) и 2) вытекает $A = \mathbf{N}$.

Пример. Число e. Рассмотрим числовую последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbf{N}$. Применяя формулу бинома Ньютона, имеем

$$a_n = 1 + 1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3} + \cdots +$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n!n^n}; \; a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right);$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{n}{n+1}\right).$$

Очевидно, $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$, т. е. $a_n \uparrow\uparrow$. Кроме того, $a_n \leq 2 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3$, $\forall n \in \mathbf{N}$. В силу критерия сходимости для монотонных последовательностей имеем

$$\exists \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \stackrel{def}{=} e,$$

причем, очевидно, в силу теоремы о предельном переходе в неравенствах $2 < e \leq 3$.

Теорема (оценочный признак существования предела функции в точке). *Пусть функции $f_1(x)$, $g(x)$ и $f_2(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Если существует $U(a)$ такая, что $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ и $\exists \lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.*

Доказательство. Поскольку существуют $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = A$ и $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists V(a) \subset U(a)$ такая, что $A - \varepsilon < f_1(x)$; $f_2(x) < A + \varepsilon$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$ или в силу условий теоремы $A - \varepsilon < f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x) < A + \varepsilon$, т. е. $|g(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, откуда имеем $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = A$.

Т е о р е м а (оценочный признак сходимости числовой последовательности). *Пусть для числовых последовательностей* (a_n), (b_n) *и* (c_n) $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ *такой, что* $a_n \le c_n \le b_n$ $\forall n \ge N_0$ *и существует* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = a$. *Тогда существует* $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку существуют $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $N_1 \ge N_0$ и $\forall n \ge N_1$ $a - \varepsilon < a_n$; $b_n < a + \varepsilon$ или в силу условий теоремы $a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon$ $\forall n \ge N_1$. Но тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ такое, что $|c_n - a| < \varepsilon$ $\forall n \ge N_1 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = a$.

Т е о р е м а. *1)* $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$; *2)* $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$; *3)* $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0$; *4)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; *5)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\angle AOB = x$, $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Рассмотрим (см. рис. 6) круг радиуса 1. Пусть $OM = 1$, $MN = \sin x$, $AB = \operatorname{tg} x$,

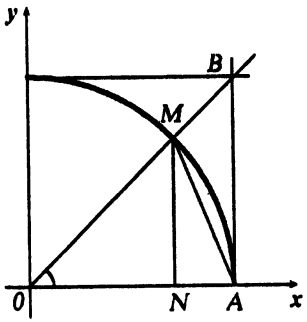


Рис. 6

тогда $\triangle OAM \subset$ сектор $OAM \subset \triangle OAB$, откуда для площадей имеем неравенства $S_{\triangle OAM} < S_{\text{сектор } OAM} < S_{\triangle OAB}$, т. е. $\left(\dfrac{1}{2}\sin x < \dfrac{x}{2} < \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x\right) \Rightarrow (\sin x < x < \operatorname{tg} x)$, деля на $\sin x$, имеем $1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$ или $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ $\forall x \in (0, \pi/2)$.

Заметим, что $\cos(-x) = \cos x$; $\dfrac{\sin(-x)}{(-x)} = \dfrac{\sin x}{x}$, поэтому $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1$ при $0 < |x| < \pi/2$. В частности, $|\sin x| \le |x|$, $0 < |x| < \pi/2$ (и даже при $0 \le |x| < \pi/2$), но $|\sin x| \le 1 < \pi/2 \le |x|$ для $|x| \ge \pi/2$, так что окончательно имеем оценку $|\sin x| \le |x|$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Возвращаясь к случаю $0 < |x| < \pi/2$, имеем $1 - \cos x > 1 - \dfrac{\sin x}{x} > 0$, но $1 - \cos x = 2\sin^2(x/2) < 2|\sin(x/2)| < 2(|x|/2) = |x|$, откуда получаем оценки $0 \le |\sin x| \le |x|$, $0 < 1 - \cos x < |x|$, $0 < 1 - \dfrac{\sin x}{x} < |x|$ $\forall |x| \in (0, \pi/2)$.

Поэтому из оценочного признака существования предела в силу существования $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$ имеем $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} \left(1 - \dfrac{\sin x}{x}\right) = 0$, откуда, поскольку $\exists \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, по теореме о пре-

деле (алгебраической) суммы имеем

$$\exists \lim_{x\to 0} \cos x = 1, \exists \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Используя теоремы о пределе произведения и частного, имеем

$\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\cos x} = (\lim\limits_{x\to 0} \sin x)/(\lim\limits_{x\to 0} \cos x) = 0/1 = 0,$

$\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{tg} x)/x = \lim\limits_{x\to 0} (\sin x/x)/\cos x = \lim\limits_{x\to 0} (\sin x/x)/\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1/1 = 1.$

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, $a \in M'$. Скажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ (соответственно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$), если $\forall K > 0$ $\exists U(a)$ такая, что $f(x) > K$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ (соответственно $f(x) < -K$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$).*

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $a \in M'$. Скажем, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, если $\forall K > 0$ $\exists U(a)$ такая, что $|f(x)| > K$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.*

З а м е ч а н и е. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то функция $f()$ называется бесконечно большой при $x \to a$.

Т е о р е м а (о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций). *Пусть функция $f(x)$ определена на M и $a \in M'$. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\exists U(a)$ такая, что $|f(x)| > 0$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ и $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$ (т. е. если $f(x)$ бесконечно большая при $x \to a$, то функция $1/f(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a)$ такая, что

$$|f(x)| > 1/\varepsilon > 0 \forall x \in \dot{U}(a) \cap M,$$

и тогда для тех же x имеем оценку $|1/f(x)| < \varepsilon$, но это и означает, что существует $\lim\limits_{x\to a} (1/f(x)) = 0$.

Т е о р е м а (о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $a \in M'$. Если $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ и $\exists U(a)$ такая, что $|f(x)| > 0$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, то $\exists \lim\limits_{x\to a} (1/f(x)) = \infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, то $\forall \varepsilon = 1/K > 0$ $\exists V(a) \subset U(a)$ такая, что $0 < |f(x)| < 1/K$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, но тогда для тех же x имеем $|1/f(x)| > K$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a} (1/f(x)) = \infty$.

П р и м е р. Поскольку $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0} (1/x) = \infty$, но неверно было бы писать ни $\lim\limits_{x\to 0} (1/x) = +\infty$, ни $\lim\limits_{x\to 0} (1/x) = -\infty$. В самом деле, $\forall K > 0$ $\exists \delta = 1/K > 0$, для которого $|1/x| > K$ $\forall x \in \dot{U}_\delta(0) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to 0} (1/x) = \infty$,

однако $\forall \delta > 0\ \exists x_1 > 0,\ x_2 < 0$ такие, что $x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(0)$ и вместе с тем $1/x_1 > 0$ и $1/x_2 < 0$. Поэтому $\lim\limits_{x\to 0}(1/x) \neq +\infty$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1/x) \neq -\infty$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, не ограниченном сверху. Скажем, что* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b \in \mathbf{R}$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$ *такое, что* $|f(x) - b| < \varepsilon\ \forall x \in (K, +\infty) \cap M$.

З а д а н и е. Сформулировать самостоятельно определения: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, a – предельная точка множества $(-\infty, a) \cap M$. Тогда скажем, что функция $f(x)$ имеет левосторонний предел b в точке a, если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall x \in M$, *удовлетворяющего условию* $a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.

Запись: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b \stackrel{def}{=} f(a-0)$.

О п р е д е л е н и е. *Скажем, что функция $f(x)$ имеет правосторонний предел в точке a:* $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b \stackrel{def}{=} f(a+0)$, *если a – предельная точка множества $M \cap (a, +\infty)$ и* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что* $|f(x) - b| < \varepsilon\ \forall x \in M \cap (a, a+\delta)$.

П р и м е р. Пусть $f(x) = \operatorname{sgn} x$, где

$$\operatorname{sgn} x = \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1, \\ \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1. \end{array} \right.$$

Т е о р е м а (критерий существования предела функции в точке). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $a \in M'$. Тогда* $(\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$, *если a – предельная точка множества* $(-\infty, a) \cap M$, $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, *если a – предельная точка множества $M \cap (a, +\infty)$ и* $f(a-0) = f(a+0) = A$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда в силу (ε, δ)-определения предела функции в точке a $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in M$, удовлетворяющего неравенству $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, но это означает:

а) что $\forall x \in M$, удовлетворяющего неравенству $a - \delta < x < a$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. (если a – предельная точка множества $(-\infty, a) \cap M$) $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0) = A$;

б) что $\forall x \in M$, удовлетворяющего неравенству $a < x < a + \delta$, $|f(x) - A| < \varepsilon$, т. е. (если a – предельная точка множества $M \cap (a, +\infty)$) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0) = A$. Откуда $f(a-0) = f(a+0) = A$.

Достаточность. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = f(a-0)$, если a – предельная точка множества $(-\infty, a) \cap M$ и $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)$, если a – предельная точка множества $M \cap (a, +\infty)$ и $f(a-0) = f(a+0) = A$.

Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in (a-\delta_1, a) \cap M$. Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = A$, то для того же $\varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in M \cap (a, a+\delta_2)$, но тогда для $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ имеем $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap M$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.

О п р е д е л е н и е. *Функция $f(x)$, определенная на множестве M, называется возрастающей на множестве M, если $\forall x_1, x_2 \in M$ таких, что $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$. Обозначение: $f(x) \uparrow$ на M. Если при этом $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется строго возрастающей на множестве M.* Запись: $f(x) \uparrow\uparrow$ на M. Аналогично определяется функция, убывающая или строго убывающая на множестве M (запись: $f(x) \downarrow$ на M или $f(x) \downarrow\downarrow$ на M).

О п р е д е л е н и е. *Функция возрастающая или убывающая на множестве M называется монотонной на множестве M.*

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, тогда $\mu = \sup\limits_{x\in M} f(x) \in \mathbf{R}$, если 1) $f(x) \le \mu\ \forall x \in M$; 2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in M$ такое, что $\mu - \varepsilon < f(x_0) \le \mu$.*

З а д а н и е. Дать определение $\nu = \inf\limits_{x\in M} f(x)$.

Т е о р е м а (о существовании односторонних пределов у монотонной функции). *Пусть $f(x) \uparrow$ на интервале (α, β) $(-\infty \le \alpha < \beta \le +\infty)$. Тогда 1) $\forall a \in (\alpha, \beta)$ существуют конечные односторонние пределы $f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \sup\limits_{\alpha<x<a} f(x)$; $f(a+0) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \inf\limits_{a<x<\beta} f(x)$, причем $-\infty < f(a-0) \le f(a) \le f(a+0) < +\infty$; 2) $\exists \lim\limits_{x\to\alpha+0} f(x) = f(\alpha+0) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$; $\exists \lim\limits_{x\to\beta-0} f(x) = f(\beta-0) = \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$, причем $-\infty \le f(\alpha+0) \le f(\beta-0) \le +\infty$; 3) $\forall a, b \in (\alpha, \beta)$ таких, что $\alpha < a < b < \beta$, имеем $-\infty < f(a+0) \le f(b-0) < +\infty$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Пусть $a \in (\alpha, \beta)$ и $A = \sup\limits_{(\alpha,a)} f(x)$. В силу монотонного возрастания $f(x)$ имеем $f(x) \le f(a)\ \forall x \in (\alpha, a)$, т. е. $-\infty < A \le f(a) \le +\infty$. Докажем, что $A = f(a-0) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$. В самом деле, по определению точной верхней грани $A = \sup\limits_{(\alpha,a)} f(x)$ имеем а) $f(x) \le A\ \forall x \in (\alpha, a)$; б) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_0 \in (\alpha, a)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_0) \le A$. Но тогда, полагая $x_0 = a - \delta \in (\alpha, a)$, в силу монотонного возрастания $f(x)$ имеем $A - \varepsilon < f(x_0) \le f(x) \le A\ \forall x \in (a-\delta, a) = (x_0, a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in (a-\delta, a)$, но это и означает, что

$A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x) = f(a-0)$, причем $-\infty < f(a-0) \leq f(a)$. Аналогично доказывается, что $\exists f(a+0) = \inf\limits_{(a,\beta)} f(x) \geq f(a)$ и $f(a) \leq f(a+0) < +\infty$. Тем самым все утверждения 1) теоремы доказаны.

2) Пусть $A = \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$. Нужно различать случаи $A < +\infty$ и $A = +\infty$, а также для интервала (α,β) : $\beta < +\infty$ и $\beta = +\infty$. В случае $\beta < +\infty$ и $A < +\infty$ доказательство, проведенное выше, сразу дает $A = \lim\limits_{x \to \beta-0} f(x) = f(\beta - 0)$. Рассмотрим случай $A < +\infty$ и $\beta = +\infty$, тогда по определению $A = \sup\limits_{(\alpha,+\infty)} f(x)$ имеем а) $f(x) \leq A$ $\forall x \in (\alpha, +\infty)$; б) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in (\alpha, +\infty)$ такое, что $A - \varepsilon < f(x_0) \leq A$. В силу монотонного возрастания $f(x)$ имеем $A - \varepsilon < f(x_0) \leq f(x) \leq A$ $\forall x > x_0$, т. е. $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(+\infty) = A$.

Рассмотрим теперь случай $\beta < +\infty$ и $A = +\infty$. Тогда по определению $\sup\limits_{(\alpha,\beta)} f(x) = +\infty$ видим, что $\forall K > 0$ $\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ такое, что $f(x_0) > K$, откуда в силу монотонного возрастания $f(x)$ имеем $f(x) \geq f(x_0) > K$ $\forall x \in (\beta - \delta, \beta) = (x_0, \beta)$, т. е. $\exists \lim\limits_{x \to \beta-0} f(x) = +\infty$.

Случай $\beta = +\infty$ и $A = +\infty$ рассмотреть самостоятельно.

Аналогично доказывается, что $\exists f(\alpha + 0) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$. Но тогда $-\infty \leq f(\alpha+0) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)} f(x) \leq \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f(x) = f(\beta - 0) \leq +\infty$, тем самым и утверждения 2) теоремы доказаны.

3) Пусть $\alpha < a < b < \beta$. Тогда по доказанному выше $\exists f(a+0) = \inf\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$ и $\exists f(b-0) = \sup\limits_{(\alpha,\beta)} f(x)$. В силу монотонного возрастания $f(x)$ на (α,β) $\forall x_0 \in (a,b)$ имеем $-\infty < f(a+0) = \inf\limits_{\alpha<x<\beta} f(x) \leq f(x_0) \leq \sup\limits_{\alpha<x<\beta} f(x) = f(b-0) < +\infty$; $-\infty < f(a+0) \leq f(b-0) < +\infty$. Тем самым утверждения 3) теоремы также доказаны.

З а д а н и е. Сформулируйте и докажите теоремы о существовании односторонних пределов у монотонно убывающей функции, заданной на интервале.

С л е д с т в и е. Монотонная на интервале (α,β) функция $f(x)$ имеет в каждой точке $a \in (\alpha,\beta)$ конечные односторонние пределы $f(a-0)$ и $f(a+0)$.

Пусть $f : y = f(x)$, $x \in \dot{U}(a)$, причем $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Пусть $\varphi : z = \varphi(y)$, $y \in \dot{V}(A)$ и $\exists \lim\limits_{y \to A} \varphi(y) = B$.

Пусть, наконец, $f(\dot{U}(a)) \subset \dot{V}(A)$. Тогда можно рассмотреть композицию функций $f(x)$ и $\varphi(y)$ $F = \varphi \circ f : z = \varphi[f(x)]$, $x \in \dot{U}(a)$. Можно ли утверждать, что $\exists \lim\limits_{x \to a} F(x) = B$?

Пример. Пусть $a=0$, $A=0$, $B=0$ и $f(x)=0\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\varphi(y)=\begin{cases}0 \text{ при } y\neq 0\ (\forall y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}),\\ 1 \text{ при } y=0.\end{cases}$$

$\varphi(y)$ определена в $V(A)$, но $\varphi(A)\neq B$, $f(\dot U(0))=\{A\}=\{0\}\subset V(A)$, но $f(\dot U(0))\not\subset V(A)$. Тогда $\exists\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=A$, $\exists\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=0=B$, но

$$F(x)=(\varphi\circ f)(x)=\varphi[f(x)]=1\,\forall x\in(-\infty,+\infty),$$

т. е. $\exists\lim\limits_{x\to 0}F(x)=1\neq 0=B$.

Пример. Пусть $a=0$, $A=0$, $B=0$ и $f(x)=0\ \forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\varphi(y)=\begin{cases}0 \text{ при } y\neq 0\ (\forall y\in\mathbf{R}\setminus\{0\}),\\ \text{не определена при } y=0.\end{cases}$$

$f(\dot U(a))=\{A\}\equiv\{0\}\overline{\in}\dot V(A)$, $\varphi(y)$ определена лишь на $\dot V(A)$. Тогда $\exists\lim\limits_{x\to 0=a}f(x)=A=0$, $\exists\lim\limits_{y\to 0=A}\varphi(y)=B=0$, но композиция (сложная функция) $F(x)=(\varphi\circ f)(x)$ вообще не определена ни при каких x, так что не имеет смысла говорить о $\lim\limits_{x\to a}F(x)$.

Теорема (о пределе композиции двух функций или о пределе сложной функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, $a\in M'$, $\exists\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$. Пусть при этом существует окрестность $U(a)$ такая, что $f(x)\neq A\ \forall x\in\dot U(a)\cap M$ (т. е. $A\overline{\in}f(\dot U(a)\cap M)$). Пусть функция $\varphi(y)$ определена на множестве Y, $A\in Y'$ и $\exists\lim\limits_{y\to A}\varphi(y)=B$. Пусть $Y\supset f(\dot U(a)\cap M)$. Тогда композиция $\varphi\circ f$ определена на множестве $\dot U(a)\cap M$ ($\varphi\circ f: z=\varphi[f(x)]$, $x\in\dot U(a)\cap M$, $z\in\mathbf{R}$) и $\exists\lim\limits_{x\to a}(\varphi\circ f)(x)=B$.*

Доказательство. Поскольку $A\in Y'$ и $\exists\lim\limits_{y\to A}\varphi(y)=B$, то $\forall\varepsilon>0\ \exists V(A)$ такая, что $|\varphi(y)-B|<\varepsilon\ \forall y\in\dot V(A)\cap Y$. Далее, $a\in M'$ и $\exists U(a)$ такая, что $Y\supset f(\dot U(a)\cap M)$, причем $A\overline{\in}f(\dot U(a)\cap M)$, поэтому композиция $F=\varphi\circ f$ определена на множестве $\dot U(a)\cap M$ так, что $F: z=\varphi[f(x)]$, $x\in\dot U(a)\cap M$, $z\in\mathbf{R}$. Из существования $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ в силу окрестностного определения предела $f(x)$ в точке $a\in M'$ вытекает, что для ранее выбранной окрестности $V(A)$ существует окрестность $U^{(1)}(a)\subset U(a)$ такая, что $f(\dot U^{(1)}(a)\cap M)\subset V(A)$. Но поскольку $A\overline{\in}f(\dot U^{(1)}(a)\cap M)$ и $Y\supset f(\dot U^{(1)}(a)\cap M)$, то это соотношение можно переписать так: $f(\dot U^{(1)}(a)\cap M)\subset\dot V(A)\cap Y$, т. е. $y=f(x)\in\dot V(A)\cap Y$ $\forall x\in\dot U^{(1)}(a)\cap M$. Но тогда для функции $F(x)=(\varphi\circ f)(x)$ имеем при $y=f(x)$, $z=\varphi(y)=\varphi[f(x)]=F(x)$, поэтому в силу выбора окрестности $V(A)$ $(|\varphi)y)-B|<\varepsilon)\Rightarrow(|F(x)-b|<\varepsilon)$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0 \exists$ окрестность $U^{(1)}(a) \subset U(a)$ такая, что $|F(x)-B| < \varepsilon$ $\forall x \in \dot{U}^{(1)}(a) \cap M$, но это и означает, что $\exists \lim\limits_{x \to a}(\varphi \circ f)(x) = B$.

Замечание. Если функция $\varphi(y)$ определена в точке $A \in Y'$, причем $\varphi(A) = B$ (где $B = \lim\limits_{y \to A} \varphi(y)$), то требование $A \overline{\in} f(\dot{U}(a) \cap M)$ в условиях теоремы о пределе сложной функции можно отбросить.

Попытайтесь доказать теорему о пределе сложной функции в измененной формулировке. Впрочем, это замечание будет рассмотрено в одном из параграфов главы 4 о непрерывных функциях.

Пример. $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax}{x} = a \ \forall a \in \mathbf{R}$. В самом деле, при $a = 0$ это очевидно. Пусть $a \neq 0$. Рассмотрим функции: $f : y = ax$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $x \neq 0$; $\varphi : z = \dfrac{\sin y}{y}$, $y \in (-\infty, +\infty)$, $y \neq 0$. Тогда $\exists \lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} ax = 0 = A$ и $\exists \lim\limits_{y \to A=0} \varphi(y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\sin y}{y} = 1 = B$. Поскольку $a \neq 0 \Rightarrow ax \neq 0 \ \forall x \neq 0$, то $A = 0 \overline{\in} f(\dot{U}(0)) \ \forall U(0)$. По теореме о пределе сложной функции имеем

$$\exists \lim_{x \to 0}(\varphi \circ f)(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1, \text{ откуда } \exists \lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(a \cdot \frac{\sin ax}{ax} \right) = a \cdot \lim_{x \to 0} \frac{\sin(ax)}{(ax)} = a \cdot 1 = a.$$

§ 5. Предел по Коши и предел по Гейне функции в точке

Понятие предела последовательности несколько проще понятия предела функции в точке, поэтому естественно попытаться свести (ε, δ) определение предела функции в точке к пределу числовой последовательности.

Определение. *Пусть $M \subset \mathbf{R}$, $M' \neq \varnothing$ и $a \in M'$. Последовательностью Гейне, связанной с точкой $a \in M'$, называется последовательность (ξ_n), сходящаяся к точке a, и такая, что $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a \ \forall n \in \mathbf{N}$.*

Замечание. Пусть $M' \neq \varnothing$, тогда $\forall a \in M' \exists$ последовательность Гейне (ξ_n), связанная с точкой a (причем последовательность (ξ_n) состоит из попарно различных элементов). В самом деле, если $M' \neq \varnothing$ и $a \in M'$, то, как было доказано в § 1 (о топологии числовой прямой) главы 3, всегда существует последовательность (ξ_n), сходящаяся к a и такая, что $\xi_n \in M \setminus \{a\} \ \forall n \in \mathbf{N}$ и $\xi_n \neq \xi_m \ \forall n \neq m$.

Определение (предела функции в точке по Гейне). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $a \in M'$. Тогда A*

является пределом функции $f(x)$ *в точке* a *по Гейне, если* $\forall$ *последовательности Гейне* (ξ_n), *связанной с точкой* $a \in M'$, *имеем* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(\xi_n) = A$. Запись: $f(x) \xrightarrow{(\Gamma)} A (x \to a)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A$.

Т е о р е м а (об эквивалентности (ε, δ) определения предела по Коши и предела по Гейне). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* M *и* $a \in M'$. *Тогда* $(\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\mathrm{K})}{=} A) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) (К) $\Rightarrow$ (Г). Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\mathrm{K})}{=} A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in M \cap \dot{U}_\delta(a)$. Пусть (ξ_n) – любая последовательность Гейне, связанная с $a \in M'$ так, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \xi_n = a$, $\xi_n \in M$ и $\xi_n \neq a\ \forall n \in \mathbf{N}$, поэтому для выбранных $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0\ \exists N(\delta) \in \mathbf{N}$ такое, что $\xi_n \in \dot{U}_\delta(a) \cap M\ \forall n \geq N(\delta)$, но тогда в силу выбора $\delta(\varepsilon)$ имеем $|f(\xi_n) - A| < \varepsilon$.

Итак, $\forall$ последовательности Гейне (ξ_n), связанной с $a \in M'$, имеем: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|f(\xi_n) - A| < \varepsilon\ \forall n \geq N$, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(\xi_n) = A$. Таким образом, $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A$, т. е. показано, что (К)$\Rightarrow$(Г).

2) (Г)$\Rightarrow$(К). Доказательство проведем от противного. Пусть $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A$, но A не есть предел $f(x)$ в точке a по Коши. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall U(a)\ \exists x_0 \in \dot{U}(a) \cap M$, для которого $|f(x_0) - A| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Рассмотрим систему проколотых окрестностей $\dot{U}_{1/n}(a) = \{x \in \mathbf{R} | 0 < |x - a| < 1/n\}\ \forall n \in \mathbf{N}$. Тогда по предположению $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists \overset{\circ}{\xi} \in \dot{U}_{1/n}(a) \cap M$ такое, что $|f(\overset{\circ}{\xi_n}) - A| \geq \varepsilon_0 > 0$, т. е. $A \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(\overset{\circ}{\xi_n})$. Но $\overset{\circ}{\xi_n} \in \dot{U}_{1/n}(a) \cap M\ \forall n \in \mathbf{N} \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to+\infty} \overset{\circ}{\xi_n} = a$, $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a$ $\forall n \in \mathbf{N}$, т. е. по построению $(\overset{\circ}{\xi_n})$ есть последовательность Гейне, связанная с точкой $a \in M'$. Поскольку $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A$, то должно быть: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(\overset{\circ}{\xi_n}) = A$. Противоречие. Итак, (Г)$\Rightarrow$(К).

П р и м е р. Число e. Ранее было доказано, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$. Забегая несколько вперед, рассмотрим показательно-степенную функцию $f : x \to (1 + x)^{1/x}$, $x \in M = (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ и докажем, что $\exists \lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e$. Точнее, докажем сначала, что существуют односторонние пределы

$$\lim_{x\to 0+0} (1 + x)^{1/x} = e \text{ и } \lim_{x\to 0-0} (1 + x)^{1/x} = e,$$

воспользовавшись определением односторонних пределов функции по Гейне.

Будем различать два случая: а) (x_n) – любая последовательность Гейне, связанная с 0, являющимся предельной точкой $(0, +\infty)$, так что $x_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$; б) (x_n) – любая последовательность Гейне, связанная с 0, являющимся предельной точкой множества $(-1, 0)$, так что $-1 < x_n < \ \forall n \in \mathbf{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

В случае а) имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ и $x_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Но тогда $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists m_n = [1/x_n] \in \mathbf{N}$ такое, что $m_n \le 1/x_n < m_n + 1\ \forall n \in \mathbf{N}$, поэтому

$$\left(\frac{1}{m_n} \ge x_n > \frac{1}{m_n+1} \forall n \in \mathbf{N}\right) \Rightarrow ((1 + 1/(m_n+1))^{m_n} <$$

$$< (1+x_n)^{1/x_n} < (1+1/m_n)^{m_n+1}) \Rightarrow (1+1/m_n+1)^{m_n+1}/(1+$$

$$+1/(m_n+1)) < (1+x_n)^{1/x_n} < (1+1/m_n)^{m_n} \cdot (1+1/m_n).$$

Но

$$(\exists \lim_{n\to+\infty} x_n = 0) \wedge (x_n > 0\, \forall n \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\lim_{n\to+\infty} (1/x_n) = +\infty),$$

откуда

$$(m_n + 1 > 1/x_n) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (m_n + 1) = \lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty.$$

Докажем, что $\lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 1/m_n)^{m_n} = e$. В самом деле, поскольку $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} (1+1/k)^k = e$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|(1+1/k_0)^{k_0} - e| < \varepsilon$. Но $\lim\limits_{n\to+\infty} m_n = +\infty$, поэтому для выбранного $k_0 > 0\ \exists n \in \mathbf{N}$ такое, что $m_n > k_0\ \forall n > N$. Но $a_k = (1 + 1/k)^k \uparrow\uparrow$, причем $a_k < e\ \forall k \in \mathbf{N}$ так, что $(e - a_k) \downarrow\downarrow$, и поэтому $|e - a_{m_n}| < |e - a_k|\ \forall m_n > k$. Но тогда в силу выбора k_0 имеем при $m_n > k_0$ оценку $|(1 + 1/m_n)^{m_n} - e| < \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 1/m_n)^{m_n} = e$. Доказательство того, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + 1/(m_n + 1))^{m_n+1} = e$ проводится аналогичным образом.

Итак,

$$\lim_{n\to+\infty} (1 + 1/(m_n+1))^{m_n+1}/(1 + 1/(m_n+1)) = e/1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} [(1 + 1/m_n)^{m_n} \cdot (1 + 1/m_n)] = e$$

и в силу оценочного признака существования предела последовательности имеем в случае а) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e$. По теореме об эквивалентности определений (одностороннего) предела функции в точке по Гейне и по Коши имеем $\exists \lim\limits_{x\to0+0} (1 + x)^{1/x} = e$.

В случае б) можно, без ограничения общности, считать, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$ и $x_n < 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Положим $x_n = -y_n$, тогда

$\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, $y_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. В силу теоремы 1′ из § 3 главы 3 видим, что $(1 > 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n) \Rightarrow (\exists N_0$ такое, что $0 < y_n < 1\ \forall n \geq N_0)$. Полагая $z_n = y_n/(1-y_n)\ \forall n \geq N_0$, получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$, $z_n > 0\ \forall n \geq N_0$, при этом $y_n = z_n/(z_n+1)$.

Итак, $\forall n \geq N_0$ имеем $(1+x_n)^{1/x_n} = (1-y_n)^{-1/y_n} = (1+y_n/(1-y_n))^{1/y_n} = (1+z_n)^{1+1/z_n} = (1+z_n)^{1/z_n}\cdot(1+z_n)$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n = 0$ и $z_n > 0\ \forall n \geq N_0$, то по доказанному в случае а) имеем $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}[(1+z_n)^{1/z_n}\cdot(1+z_n)] = e\cdot 1 = e$ так, что и в случае б) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(1+x_n)^{1/x_n} = e$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to 0-0}(1+x)^{1/x} = e$.

Итак, $\exists \lim\limits_{x\to 0+0}(1+x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0-0}(1+x)^{1/x} = e$, но тогда в силу критерия существования предела из § 4 главы 2 имеем

$$\exists \lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

§ 6. Дополнения к принципам полноты поля R

Теорема Вейерштрасса. *Если числовая последовательность (a_n) монотонно возрастает и ограничена сверху, то она сходится, причем* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \sup\limits_{n\in\mathbf{N}} a_n$.

Доказательство было проведено в § 4 главы 3.

Определение. *Система отрезков $\Delta_n = [a_n, b_n]$, $n \in \mathbf{N}$, называется стягивающейся, если 1) она является вложенной системой, т. е. $\Delta_{n+1} \subset \Delta_n\ \forall n \in \mathbf{N}$ $(a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N})$; 2) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$ (т. е. длина отрезка Δ_n стремится к нулю при $n \to +\infty$).*

Теорема Кантора (о стягивающейся системе отрезков). *Стягивающаяся система отрезков имеет, притом только одну, общую точку.*

Доказательство. По теореме Кантора для вложенной системы отрезков $\{\Delta_n\}$ $\exists c \in \mathbf{R}$ такое, что $c \in [a_n, b_n]\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Докажем, что $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Delta_n = \{c\}$. Допустим от противного, что $\exists c_1, c_2 \in \mathbf{R}$, $c_1 < c_2$ такие, что $c_1, c_2 \in \Delta_n\ \forall n \in \mathbf{N}$. Тогда $(a_n \leq c_1 < c_2 \leq b_n\ \forall n \in \mathbf{N}) \Rightarrow (b_n - a_n \geq c_2 - c_1 > 0\ \forall n \in \mathbf{N})$, что противоречит условию $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$.

На числовой прямой $\mathbf{R}$ существуют бесконечные множества, не имеющие предельных точек. Таковым, например, является множество $\mathbf{N} \subset \mathbf{R}$. Однако на отрезке каждое бесконечное множество имеет

хотя бы одну предельную точку. Это свойство отрезка называется свойством секвенциальной компактности, и оно отличает отрезок от всей прямой.

Теорема Больцано – Вейерштрасса (для множеств). *Если $M \subset [a,b]$ есть бесконечное подмножество отрезка $[a,b]$, то множество M имеет по крайней мере одну предельную точку, принадлежащую этому отрезку.*

Доказательство. Если $M \subset [a,b]$ и M бесконечно, то хотя бы одна из половин отрезка $\Delta_0 = [a,b]$ содержит бесконечное множество точек из M. Обозначим эту половину через Δ_1. Тогда $\Delta_1 \subset \Delta_0$, $\Delta_1 \cap M$ бесконечно и $|\Delta_1| = \dfrac{b-a}{2}$. Через $|\Delta| = \beta - \alpha$ будем обозначать длину отрезка $\Delta = [\alpha, \beta]$.

Разделим отрезок Δ_1 пополам и выберем ту его половину Δ_2, которая содержит бесконечное множество точек из M: $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$, $\Delta_2 \cap M$ бесконечно, $|\Delta_2| = \dfrac{b-a}{2^2}$. Продолжая процесс, получим вложенную систему отрезков $\{\Delta_n\}$, для которой $\Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \ldots \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$, $\Delta_n \cap M$ бесконечно и $|\Delta_n| = \dfrac{b-a}{2^n}$. Очевидно, $\lim\limits_{n\to+\infty} |\Delta_n| = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b-a}{2^n} = 0$ (по индукции легко доказывается неравенство $2^n > n$ $\forall n \in \mathbf{N}$). Но тогда вложенная система отрезков $\{\Delta_n\}$ оказывается стягивающейся. По теореме Кантора о стягивающейся системе отрезков $\exists c \in \mathbf{R}$ такое, что $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Delta_n = \{c\}$, причем $(c \in \Delta_n \subset [a,b]$ $\forall n \in \mathbf{N}) \Rightarrow c \in [a,b]$. Далее, $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - a_n) = 0$, поэтому $\forall \delta > 0$ $\exists m(\delta) \in \mathbf{N}$ такое, что $0 < b_m - a_m < \delta$ $\forall m > m(\delta)$. Но $c \in \Delta_m$, и поскольку $|x - c| \le b_m - a_m < \delta$ $\forall x \in \Delta_m$, то $\Delta_m \subset U_\delta(c)$ (при $m > m(\delta)$), причем в силу построения системы $\{\Delta_n\}$ множество $M \cap \Delta_m$ бесконечно.

Итак, $\forall \delta > 0$ $\exists \Delta_m \subset U_\delta(c)$, т. е. $\forall \delta > 0$ окрестность $U_\delta(c)$ содержит бесконечное множество точек из M, поэтому $c \in M'$.

Следствие. Любой отрезок числовой прямой обладает свойством секвенциальной компактности.

Теорема Больцано – Вейерштрасса (для числовых последовательностей). *Любая ограниченная числовая последовательность имеет хотя бы одну точку сгущения (хотя бы один частичный предел).*

Доказательство. Пусть (a_n) $(n \to a_n,\ n \in \mathbf{N},\ a_n \in \mathbf{R})$ – ограниченная числовая последовательность, тогда $\exists c > 0$ такое, что $|a_n| \le c$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Пусть $M = \{a_n\} \equiv \{x \in \mathbf{R} | x = a_n, n \in \mathbf{N}\}$. Тогда $M \subset [-c,c]$. Отрезок $[-c,c]$ секвенциально компактен, поэтому если $M \subset [-c,c]$ – бесконечное множество, то $M' \cap [-c,c] \neq \varnothing$

и $\exists b \in M' \cap [-c, c]$. Но тогда в любой окрестности $U(b)$ содержится бесконечное множество элементов последовательности (a_n), поэтому $b \in [-c, c]$ есть точка сгущения числовой последовательности (a_n). Если $M = \{a_n\} \equiv \{b_1, b_2, \ldots, b_m\} \in [-c, c]$ – конечное множество, то существует точка $b_l = b \in [-c, c]$ такая, что равенство $a_n = b$ имеет место для бесконечного множества индексов $n = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ $(n_k \uparrow\uparrow, n_k \geq k \, \forall k \in \mathbf{N})$. Но тогда $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{n_k} = b \in [-c, c]$, т. е. b есть точка сгущения последовательности (a_n).

Следствие. Из любой ограниченной числовой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Замечание. Для бесконечного ограниченного множества $M \subset [a, b]$ имеем $M' \neq \varnothing$ и $M' \subset [a, b]$. В самом деле, утверждение $M' \neq \varnothing$ вытекает из теоремы Больцано – Вейерштрасса о секвенциальной компактности отрезка, а в силу замкнутости отрезка имеем $M \subset [a, b] \Rightarrow (\overline{M} \subset \overline{[a, b]} = [a, b]) \Rightarrow (M' \subset \overline{M} \subset [a, b])$.

Следствие. Если (a_n) – ограниченная числовая последовательность и S множество всех ее точек сгущения, то $S \neq \varnothing$ и S ограничено.

Определение. *Пусть $A \subset \mathbf{R}$ и $M_\alpha \subset \mathbf{R}$ $\forall \alpha$. Система множеств $\{M_\alpha\}$ называется покрытием множества A, если $\bigcup\limits_\alpha M_\alpha \supset A$.*

Определение. *Будем говорить, что из покрытия $\{M_\alpha\}$ множества A можно выделить конечное подпокрытие, если существует конечное число множеств из системы $\{M_\alpha\}$, образующих покрытие A.*

Пример. Система всех интервалов вида $(x - 0,1, x + 0,1)$, где $x \in [0, 1]$, образует покрытие отрезка $[0, 1]$.

Определение. *Множество $K \subset \mathbf{R}$ называется компактным, если из любого покрытия множества K интервалами можно выделить конечное подпокрытие.*

Лемма Бореля – Лебега. *Из любого покрытия отрезка $[a, b]$ интервалами можно выделить конечное подпокрытие, т. е. любой отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ компактен (в $\mathbf{R}$).*

Доказательство. Пусть $[a, b] \subset \mathbf{R}$ и система $\{M_\alpha\} \equiv \{(\beta_\alpha, \gamma_\alpha)\}$ есть покрытие отрезка $[a, b]$ интервалами, т. е. $[a, b] \subset \bigcup\limits_\alpha M_\alpha$. Предполагая, что система $\{M_\alpha\}$ бесконечна, допустим, что отрезок $\Delta_0 = [a, b]$ не допускает выделения конечного подпокрытия. Разделим отрезок Δ_0 пополам: если бы обе его половины допускали конечное покрытие интервалами из системы $\{M_\alpha\}$, то и весь отрезок Δ_0 допускал бы конечное покрытие. Поэтому хотя бы одна из его половин Δ_1 не допускает выделения конечного подпокрытия: $\Delta_1 \subset \Delta_0$, Δ_1 не допускает конечного покрытия интервалами из $\{M_\alpha\}$, $|\Delta_1| = (b - a)/2$. Делим отрезок Δ_1 пополам и выбираем ту его половину Δ_2, которая

не допускает конечного покрытия: $\Delta_2 \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$, Δ_2 не допускает конечного покрытия, $|\Delta_2| = (b-a)/2^2$. Продолжая процесс, получаем систему отрезков $\{\Delta_n\} : \Delta_n \subset \Delta_{n-1} \subset \ldots \subset \Delta_1 \subset \Delta_0$, Δ_n не допускает конечного покрытия интервалами из $\{M_\alpha\}$ $|\Delta_n| = (b-a)/2^n$. Система отрезков $\{\Delta_n\}$ $(n \in \mathbf{N})$ стягивающаяся, и по теореме Кантора $\exists c \in \mathbf{R}$ такое, что $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} \Delta_n = \{c\}$ или $c \in \Delta_n [a,b]\ \forall n \in \mathbf{N}$. Но $c \in [a,b]$, поэтому $\exists$ интервал $M_\alpha = (\beta, \gamma) \ni c$ (при этом $\beta < c < \gamma \Rightarrow (c-\beta > 0, \gamma - c > 0)$).

Выберем $m \in \mathbf{N}$ таким, что $|\Delta_m| = (b-a)/2^m < \frac{1}{2}\min\{c-\beta, \gamma - c\}$, тогда $\Delta_m \subset (\beta, \gamma)$ (в противном случае было бы, например, $(a_m < \beta < c \leq b_m) \Rightarrow (b_m - a_m > c - \beta > 0)$ вопреки выбору $0 < b_m - a_m < (c-\beta)/2)$, т. е. оказалось, что отрезок Δ_m не допускающий по построению конечного покрытия интервалами из системы $\{M_\alpha\}$, покрыт одним интервалом из системы $\{M_\alpha\}$. Противоречие.

З а м е ч а н и е 1. В условиях леммы Бореля – Лебега нельзя заменить отрезок $[a,b]$ на интервал (a,b), т. е. интервал не компактен в $\mathbf{R}$.

П р и м е р. Пусть $(a,b) = (0,1)$, $M_n = (1/n, 2)$, $n \in \mathbf{N}$, тогда $(0,1) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} M_n$, а выделить конечное покрытие из системы $\{M_n\}$ нельзя (почему?).

З а м е ч а н и е 2. В условиях леммы Бореля – Лебега нельзя вместо (открытого) покрытия интервалами рассматривать покрытие отрезками: $M_\alpha = [\beta_\alpha, \gamma_\alpha]$.

П р и м е р. Пусть $[a,b] = [0,1]$, $M_1 = [0, 1/2]$, $M_n = [1/2 + 1/n, 1]$, $n = 3, 4, \ldots$, тогда $[0,1] \subset M_1 \cup \bigcup\limits_{n=3}^{+\infty} M_n$, но выделить из системы $\{M_n\}$ конечное подпокрытие нельзя.

§ 7. Критерии существования предела числовой последовательности, предела функции в точке

Т е о р е м а (критерий существования предела числовой последовательности). *Пусть* (a_n) *– числовая последовательность. Тогда* $((a_n)$ *сходится*$) \Leftrightarrow ((a_n)$ *ограничена и имеет только одну точку сгущения*$)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть (a_n) сходится, т. е. существует $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$, тогда последовательность (a_n) ограничена и ее предел a есть точка сгущения для (a_n).

Докажем, что других точек сгущения у (a_n) нет. Допустим от противного, что у (a_n) есть еще одна точка сгущения $b \neq a$. Тогда по аксиоме отделимости Хаусдорфа существуют окрестности $U(a)$ и $V(b)$

такие, что $U(a) \cap V(b) = \varnothing$. Поскольку $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$, то для окрестности $U(a)$ $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n \in U(a)$ $\forall n \geq N_0$, т. е. в окрестности $V(b)$ может содержаться не более $N_0 - 1$ элементов последовательности (a_n), что противоречит определению b как точки сгущения последовательности (a_n). Тем самым необходимость критерия доказана.

Достаточность. Пусть (a_n) – ограниченная числовая последовательность. Тогда по теореме Больцано – Вейерштрасса (a_n) имеет хотя бы одну точку сгущения. Пусть в соответствии с условием теоремы (a_n) имеет единственную точку сгущения $a \in \mathbf{R}$. Докажем, что $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$. Допустим от противного, что (a_n) не сходится к числу a. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что вне $U_{\varepsilon_0}(a)$ существует бесконечное множество элементов из последовательности (a_n), т. е. $\exists n_1 \geq 1$ такое, что $|a_{n_1} - a| \geq \varepsilon_0 > 0$; $\exists n_2 \geq 2$, $n_2 > n_1$ такое, что $|a_{n_2} - a| \geq \varepsilon_0 > 0$ и вообще $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists n_k \geq k$ и (при $k \geq 2$) $n_k > n_{k-1}$ такое, что $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon_0 > 0$, т. е. $n_k \uparrow\uparrow$ и $\sup\limits_k n_k = +\infty$. Поэтому последовательность (b_k) (где $b_k = a_{n_k}$) является подпоследовательностью ограниченной последовательности (a_n). Ограниченная последовательность (b_k) по теореме Больцано – Вейерштрасса имеет хотя бы одну точку сгущения b, являющуюся тем самым и точкой сгущения для последовательности (a_n). Поскольку (a_n) имеет единственную точку сгущения a, то $b = a$. Но тогда в окрестности $U_{\varepsilon_0}(b)$ $(b = a)$ точки b, являющейся точкой сгущения последовательности (b_k), должно содержаться бесконечное множество элементов из (b_k), в то время как по построению $b_k = a_{n_k} \overline{\in} U_{\varepsilon_0}(a) = U_{\varepsilon_0}(b)$ $\forall k \in \mathbf{N}$. Противоречие. Итак, $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Следствие. Если последовательность (a_n) сходится к a, то и любая ее подпоследовательность (a_{n_k}) также сходится к a.

Теорема. *Пусть (a_n) – ограниченная числовая последовательность и S – множество всех точек сгущения последовательности (a_n). Тогда 1) $S \neq \varnothing$; 2) множество S ограничено; 3) $\overline{S} = S$, т. е. множество S замкнутое; 4) $a^0 = \sup S \in S$, $a_0 = \inf S \in S$.*

Доказательство. Утверждения 1)–2) были доказаны ранее. Доказательство 3): $(a \in \overline{S}) \Rightarrow (U(a) \cap S \neq \varnothing$ и $\exists b \in U(a) \cap S)$, и поскольку $U(a) \equiv U(b)$, то $U(a)$ содержит бесконечное множество членов (a_n), т. е. $a \in S$, откуда $(\overline{S} \subset S) \Rightarrow (\overline{S} = S)$, т. е. множество S замкнуто. Для доказательства 4) заметим, что из ограниченности множества S в силу полноты $\mathbf{R}$ имеем $\exists a^0 = \sup S$, $a_0 = \inf S \in \mathbf{R}$.

Докажем, что $a^0 \in S$. (Доказательство включения $a_0 \in S$ провести самостоятельно.) В самом деле, пусть $a^0 = \sup S \in \mathbf{R}$. По определению $\sup S = a^0$ имеем: а) $a \leq a^0$ $\forall a \in S$ и б) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b \in S$ такое, что $a^0 - \varepsilon < b \leq a^0 \Rightarrow b \in U_\varepsilon(a^0)$. Итак, $S \cap U_\varepsilon(a^0) \neq \varnothing$ $\forall \varepsilon > 0$, другими словами, $S \cap U(a^0) \neq \varnothing$ $\forall U(a^0)$, т. е. $a^0 \in \overline{S} = S$.

Следствие. Если (a_n) – ограниченная числовая последовательность и S – множество ее точек сгущения, то $a^0 = \sup S \in S$ есть самая правая точка сгущения последовательности (a_n), а $a_0 = \inf S \in S$ есть самая левая точка сгущения (a_n).

Определение. *Пусть (a_n) – ограниченная числовая последовательность и S – множество точек сгущения (a_n). Тогда числа $a^0 = \sup S$ и $a_0 = \inf S$ называются соответственно верхним и нижним пределами последовательности (a_n).*

Обозначения:

$$a^0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_m = \lim_{n\to+\infty} \sup_{m>n} a_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \sup a_n,$$

$$a_0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_m = \lim_{n\to+\infty} \inf_{m>n} a_n \stackrel{def}{=} \lim_{n\to+\infty} \inf a_n.$$

Замечание. Пусть (a_n) – ограниченная числовая последовательность и S – множество ее точек сгущения. Из следствия к теореме о свойствах множества S вытекает, что верхний предел $a^0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ и нижний предел $a_0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ можно определить следующими эквивалентными способами:

I. $a^0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ есть наибольший частичный предел (самая правая точка сгущения) последовательности (a_n), $a_0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ есть наименьший частичный предел (самая левая точка сгущения) последовательности (a_n);

II. $a^0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0$ правее точки $a^0 + \varepsilon$ имеется не более конечного числа элементов из (a_n), но правее точки $a^0 - \varepsilon$ содержится бесконечное множество элементов из (a_n). Аналогично $a_0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$, если $\forall \varepsilon > 0$ левее точки $a_0 - \varepsilon$ имеется не более конечного числа элементов из (a_n), но левее точки $a_0 + \varepsilon$ содержится бесконечное множество элементов из (a_n);

III. $a^0 = \overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$, если 1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n < a^0 + \varepsilon$ $\forall n \geq N$; 2) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists n_k \geq k$ такое, что $a^0 - \varepsilon < a_{n_k}$. Аналогично $a_0 = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$, если 1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n > a_0 - \varepsilon$ $\forall n \geq N$; 2) $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists n_k \geq k$ такое, что $a_0 + \varepsilon > a_{n_k}$.

Следствие (критерий сходимости ограниченной числовой последовательности). Пусть (a_n) – ограниченная числовая последовательность. Тогда ((a_n) сходится) $\Leftrightarrow$ ($\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$).

Доказательство. Условие $\overline{\lim_{n\to+\infty}} a_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} a_n$ для ограниченной числовой последовательности (a_n) означает, что $S = \{a\}$,

так что у последовательности (a_n) имеется единственная точка сгущения. Но тогда применим доказанный ранее критерий сходимости числовых последовательностей.

Замечание. Не нужно смешивать понятия верхнего (нижнего) предела и точной верхней (нижней) грани для последовательности.

Пример. Пусть $a_n = (-1)^n(1 + 1/n)$. Тогда $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = 1$, $\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} a_n = -1$, $\sup\limits_n a_n = 3/2$, $\inf\limits_n a_n = -2$.

Определение. *Последовательность (a_n) называется последовательностью Коши, если* $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ *такое, что* $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$, $m \geq N$.

Теорема (критерий Коши существования предела у числовой последовательности). (*Числовая последовательность (a_n) сходится*) $\Leftrightarrow$ (*(a_n) есть последовательность Коши*).

Доказательство. Необходимость. Пусть (a_n) сходится, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a \in \mathbf{R}$. Тогда по определению предела последовательности $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a| < \varepsilon/2$ $\forall n \geq N$ и $|a_m - a| < \varepsilon/2$ $\forall m \geq N$, откуда $|a_n - a_m| = |(a_n - a) + (a - a_m)| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т. е. числовая последовательность (a_n) есть последовательность Коши.

Достаточность. Пусть числовая последовательность (a_n) есть последовательность Коши. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N$. Пусть $\varepsilon_0 = 1 > 0$, тогда $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a_m| < 1$ $\forall n, m \geq N_0$. Зафиксируем $n_0 > N_0$, тогда $|a_{n_0} - a_m| < 1$ $\forall m \geq N_0$ или $a_{n_0} - 1 < a_m < a_{n_0} + 1$ $\forall m \geq N_0$, т. е. последовательность (a_m) финально ограничена, но тогда она и просто ограничена. По теореме Больцано – Вейерштрасса ограниченная последовательность (a_n) имеет хотя бы одну точку сгущения a. Поскольку (a_n) есть последовательность Коши, то $\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$ $\forall n, m \geq N$. Из того, что a есть точка сгущения последовательности (a_n), вытекает, что для $\varepsilon/2 > 0\ \exists n_1 \geq N$ такое, что $|a_{n_1} - a| < \varepsilon/2$. Но тогда

$$|a_m - a| = |(a_m - a_{n_1}) + (a_{n_1} - a)| \leq$$

$$\leq |a_m - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a| < \varepsilon\ \forall m \geq N,$$

т. е. $\exists \lim\limits_{m\to+\infty} a_m = a$.

Следствие (критерий Коши сходимости числового ряда). (Ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$ сходится) $\Leftrightarrow$ ($\forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $\left|\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k\right| < \varepsilon$ $\forall n > m \geq N$).

Доказательство. Если $s_n = \sum\limits_{k=1}^{k} a_k$ – n-я частичная сумма

ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, то сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности (s_n). Применяя к этой последовательности критерий Коши существования предела, имеем в силу равенства $s_n - s_m = \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ наше следствие.

Т е о р е м а (критерий существования предела функции в точке). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $a \in M'$. Тогда* $(\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ *такое, что* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(a) \cap M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Тогда в силу (ε, δ) определения предела функции в точке $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $f|(x_1) - A| < \varepsilon/2$ $\forall x_1 \in \dot{U}_\delta(a) \cap M$ и $|f(x_2) - A| < \varepsilon/2$ $\forall x_2 \in \dot{U}_\delta(a) \cap M$, но тогда $|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - A) + (A - f(x_2))| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in \dot{U}_\delta(a) \cap M$.

Достаточность. Пусть для функции $f(x)$ и точки $a \in M'$ выполнены условия Коши. Пусть (ξ_n) – любая последовательность Гейне, связанная с точкой a, т. е. $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = a$, $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Положим $f(\xi_n) = a_n$ и докажем, что числовая последовательность (a_n) есть последовательность Коши. Пусть $\varepsilon > 0$ любое. Тогда в силу условия Коши $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, а в силу свойств последовательностей Гейне $\exists N(\delta) \in \mathbf{N}$ такие, что: 1) поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} \xi_n = a$ и $\xi_n \in M$, $\xi_n \neq a$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $\xi_n, \xi_m \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(a) \cap M$ $\forall n, m \geq N(\delta)$, и тогда 2) в силу выбора $\delta(\varepsilon) > 0$ по условию Коши имеем $|f(\xi_n) - f(\xi_m)| = |a_n - a_m| < \varepsilon$ $\forall n, m \geq N(\delta)$.

Таким образом, числовая последовательность (a_n) есть последовательность Коши, сходящаяся в силу критерия Коши для последовательностей. Итак, $\forall (\xi_n)$ – последовательности Гейне, связанной с точкой $a \in M'$, $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f(\xi_n) = A_\xi$.

Пусть (ξ_n) и (η_n) – две любые последовательности Гейне, связанные с точкой $a \in M'$, и пусть $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\xi_n) = A_1$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} f(\eta_n) = A_2$. Рассмотрим последовательность (ζ_n), где $\zeta_n = \xi_k$ при $n = 2k$ и $\zeta_n = \eta_k$ при $n = 2k - 1$ $(k \in \mathbf{N})$. Очевидно, имеем

$$(\xi_k \in M \, \forall k \in \mathbf{N}) \wedge (\eta_k \in M \, \forall k \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\zeta_n \in M \, \forall n \in \mathbf{N});$$

$$(\xi_k \neq a \, \forall k \in \mathbf{N}) \wedge (\eta_k \neq a \, \forall k \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\zeta_n \neq a \, \forall n \in \mathbf{N});$$

$$(\exists \lim_{k \to +\infty} \xi_k = \lim_{k \to +\infty} \eta_k = a) \Rightarrow (\exists \lim_{n \to +\infty} \zeta_n = a).$$

Таким образом, последовательность (ζ_n) есть последовательность Гейне, связанная с точкой $a \in M'$. Если $c_n = f(\zeta_n)$, то последовательность (c_n) имеет две точки сгущения A_1 и A_2. Но выше было

показано, что последовательность (c_n) обязана быть последовательностью Коши, а потому $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = A$. Стало быть, $A_1 = A_2 = A$. Итак, $\forall$ последовательности Гейне (ξ_n), связанной с точкой $a \in M'$, существует один и тот же единственный предел $\lim\limits_{n\to+\infty}(\xi_n) = A$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A$. Но тогда по теореме об эквивалентности определений предела функции в точке по Гейне и по Коши имеем

$$(\exists \lim_{x\to a} f(x) \overset{(\Gamma)}{=} A) \Rightarrow (\exists \lim_{x\to a} f(x) \overset{(К)}{=} A), \text{ т. е. } \exists \lim_{x\to a} f(x) = A.$$

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ определена на M и $\sup M = +\infty$, то для $x \to +\infty$ критерий Коши формулируется следующим образом: $(\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbf{R}) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists K > 0$ такое, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon\ \forall x_1, x_2 \in M \cap (K, +\infty))$.

П р и м е р. Для $f(x) = 1/x$, $x \neq 0$, при $x \to +\infty$ выполнен критерий Коши, поскольку $\forall \varepsilon > 0\ \exists K = 2/\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$ таких, что $x_1 > K$, $x_2 > K$, $|1/x_1 - 1/x_2| \leq |1/x_1| + |1/x_2| < 2/K = \varepsilon$.

§ 8. Сравнение асимптотического поведения функций

Знания того, что функции стремятся к пределам на множестве M при $x \to a \in M'$, равно как и знания значений самих пределов, еще не достаточно для решения всех задач о переходе к пределу в выражениях, составленных из этих функций. Например, при $x \to +\infty$ каждая из трех функций x, x^2 и $\sqrt{x}$ стремится к $+\infty$, однако если рассмотреть выражения

$$(x+1) - x,\ (x+1)^2 - x^2 \text{ и } \sqrt{x+1} - \sqrt{x}, \text{ то}$$

$$\lim_{x\to+\infty}[(x+1) - x] = 1;\ \lim_{x\to+\infty}[(x+1)^2 - x^2] = \lim_{x\to+\infty}(2x+1) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x+1} - \sqrt{x}] = \lim_{x\to+\infty} 1/(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0.$$

Поэтому важно знать не только предельные значения функций при $x \to a$ (если эти пределы существуют), но нужно знать и асимптотику поведения функций, т. е. «способ стремления» функций к своим пределам. Для этого необходимо установить классификацию во множестве функций, стремящихся при $x \to a$ к одному и тому же пределу, причем a может быть как числом, так и одним из символов $-\infty$, $+\infty$, ∞.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Скажем, что $f = O(g)$ $(x \to a)$, если существуют постоянная $C > 0$ и окрестность $U(a)$ точки a такие, что $|f(x)| \leq C|g(x)|\ \forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.*

Замечание. Если функция $f(x)$ определена на M и $a \in M'$, то $f = O(1)(x \to a)$ означает локальную ограниченность функции $f(x)$ в точке $a \in M'$.

Замечание. Если $\sup M = +\infty$, то равенство $f = O(1)$ $(x \to +\infty)$ означает финальную ограниченность $f(x)$ при $x \to +\infty$, т. е. существование $C > 0$ и $K > 0$ таких, что $|f(x)| \leq C$ $\forall x \in M \cap (K, +\infty)$.

Примеры. $\sin x = O(1)$ $(x \to 0)$, так как $|\sin x| \leq 1$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$; $\sin x = O(x)$ $(x \to 0)$, так как $|\sin x| \leq |x|$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$; $\sin^2 x = O(\sin x)$ $(x \to +\infty)$, так как $|\sin^2 x| \leq |\sin x|$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Теорема (о свойствах символа O). *Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h(x)$ определены на M и $a \in M'$. Тогда 1) $(f_1 = O(f_2)$ $(x \to a)) \wedge (f_2 = O(f_3)$ $(x \to a)) \Rightarrow (f_1 = O(f_3)$ $(x \to a))$ (транзитивность символа O); 2) теорема сложения $(f_i = O(h)$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)) \Rightarrow (f_1 + f_2 = O(h)$ $(x \to a))$; 3) теорема умножения $(f_i = O(g_i)$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)) \Rightarrow (f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$ $(x \to a))$.*

Доказательство. 1) Пусть $f_1 = O(f_2)$ $(x \to a)$ и $f_2 = O(f_3)$ $(x \to a)$. Тогда из определения $f_1 = O(f_2)$ $(x \to a) \Rightarrow \exists C_1 > 0$ и $\exists U(a)$ такие, что $|f_1(x)| \leq C_1 |f_2(x)|$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. Далее, из $f_2 = O(f_3)$ $(x \to a) \Rightarrow \exists C_2 > 0$ и $\exists V(a)$ такие, что $|f_2(x)| \leq C_2 |f_3(x)|$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$. Но тогда для $C = C_1 \cdot C_2 > 0$ и $W(a) \subset U(a) \cap V(a)$ имеем $|f_1(x)| \leq C |f_3(x)|$ $\forall x \in \dot{W}(a) \cap M$, т. е. $f_1 = O(f_3)$ $(x \to a)$.

2) Из условий $f_i = O(h)$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)$ имеем $\exists C_i > 0$ и $\exists U^{(i)}(a)$ $(i = 1, 2)$ такие, что $|f_i(x)| \leq C_i |h(x)|$ $\forall x \in \dot{U}^{(i)}(a) \cap M$ $(i = 1, 2)$, откуда для $C = C_1 + C_2 > 0$ и $V(a) \subset U^{(1)}(a) \cap U^{(2)}(a)$ имеем $|f_1(x) + f_2(x)| \leq C |h(x)|$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, т. е. $f_1 + f_2 = O(h)$ $(x \to a)$.

3) Из условий $f_i = O(g_i)$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2) \Rightarrow \exists C_i > 0$ и $\exists U^{(i)}(a)$ $(i = 1, 2)$ такие, что $|f_i(x)| \leq C_i |g_i(x)|$ $\forall x \in \dot{U}^{(i)}(a) \cap M$, откуда для $C = C_1 C_2 > 0$ и $V(a) \subset U^{(1)}(a) \cap U^{(2)}(a)$ имеем $|f_1(x) \cdot f_2(x)| \leq C |g_1(x) \cdot g_2(x)|$ $\forall x \in \dot{V}(a) \cap M$, т. е. $f_1 \cdot f_2 = O(g_1 \cdot g_2)$ $(x \to a)$.

Следствие. Пусть функции $f(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$ определены на M и $a \in M'$. Тогда 1) $O(O(f)) = O(f)$ $(x \to a)$; 2) $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j O(f) = O(f)$ $(x \to a)$ $(\lambda_j = \text{const})$; 3) $O(g_1) \cdot O(g_2) = O(g_1 \cdot g_2)$ $(x \to a)$.

Примеры. 1) $(\sin x = O(x)$ $(x \to 0)$; $x = O(1)$ $(x \to 0)) \Rightarrow \sin x = O(1)$ $(x \to 0)$; 2) $(x + 1 = O(x)$ $(x \to +\infty)$, $\sqrt{x} = O(x)$ $(x \to +\infty)) \Rightarrow x + \sqrt{x} + 1 = O(x)$ $(x \to +\infty)$.

Определение. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Если $f = O(g)$ $(x \to a)$ и $g = O(f)$ $(x \to a)$, то скажем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ подобны при $x \to a$.* Обозначение: $f \asymp g$ $(x \to a)$.

Замечание. $f \asymp g$ $(x \to a)$, если существуют постоянные

$C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и окрестность $U(a)$ такие, что

$$C_1|g(x)| \le |f(x)| \le C_2|g(x)| \,\forall x \in \dot{U}(a) \cap M.$$

Замечание. $f \asymp g$ $(x \to a)$ означает, что существуют $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ и $U(a)$ такие, что $0 < C_1 \le |f(x)| \le C_2 < +\infty$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.

Замечание. $(\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = c \ne 0) \Rightarrow (f \asymp 1 (x \to a))$.

Пример. $\sin^2 x = O(\sin x)$ $(x \to +\infty)$, но $\sin x \ne O(\sin^2 x)$ $(x \to +\infty)$, поэтому отношение $\sin^2 x \asymp \sin x$ $(x \to +\infty)$ неверно.

Теорема умножения (для отношения подобия). *Пусть функции $f_i(x)$, $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Пусть $f_i \asymp g_i$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)$. Тогда $f_1 \cdot f_2 \asymp g_1 \cdot g_2$ $(x \to a)$.*

Доказательство следует из теоремы умножения для символа O.

Замечание. Из $f_i \asymp g_i$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)$, вообще говоря, не следует $f_1 + f_2 \asymp g_1 + g_2$ $(x \to a)$ (т. е. теорема сложения для отношения подобия $\asymp$ неверна). Например, если $f_1(x) = g_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -(x^2 + x)$, $g_2(x) = -(x^2 + 1)$, тогда $f_i \asymp g_i$ $(x \to +\infty)$ $(i = 1, 2)$. Но $f_1(x) + f_2(x) = -x$, $g_1(x) + g_2(x) = -1$. Очевидно, $-x \ne O(-1)$ $(x \to +\infty)$, хотя $-1 = O(x)$ $(x \to +\infty)$, т. е. отношение $f_1 + f_2 \asymp g_1 + g_2$ $(x \to +\infty)$ неверно.

Определение. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Скажем, что $f = o(g)$ $(x \to a)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists U(a)$ такая, что $|f(x)| \le \varepsilon |g(x)|$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$.*

Замечание. Если $f = o(g)$ $(x \to a)$, то $f = O(g)$ $(x \to a)$.

Замечание. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Если существует $U(a)$ такая, что $g(x) \ne 0$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, то отношение $f = o(g)$ $(x \to a)$ означает, что существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{o(g(x))}{g(x)} = 0$.

Замечание. Если функция $f(x)$ определена на множестве M, $a \in M'$ и $f = o(1)$ $(x \to a)$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, т. е функция $f(x) = o(1)$ $(x \to a)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a$.

Пример. Поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0$, то $\sin x = o(1)$ $(x \to 0)$.

Пример. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и $\alpha < \beta$. Тогда $x^\alpha = o(x^\beta)$ $(x \to +\infty)$; $x^\beta = o(x^\alpha)$ $(x \to 0)$. В самом деле, при $\alpha < \beta$ имеем $\alpha - \beta < 0$, $\beta - \alpha > 0$, откуда $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha / x^\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha - \beta} = 0$; $\lim\limits_{x \to 0} x^\beta / x^\alpha = \lim\limits_{x \to 0} x^{\beta - \alpha} = 0$.

Замечание. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ и $\alpha(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Если $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$ и существует $U(a)$ такая, что $f(x) = \alpha(x) g(x)$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, то $f = o(g)$ $(x \to a)$.

Теорема (о свойствах символа o). *Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $g_1(x)$, $g_2(x)$, $h(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$.*

Тогда I а) $(f_1 = O(f_2)\ (x \to a)) \wedge (f_2 = o(f_3)\ (x \to a)) \Rightarrow (f_1 = o(f_3)\ (x \to a))$; *б)* $(f_1 = o(f_2)\ (x \to a)) \wedge (f_2 = O(f_3)\ (x \to a)) \Rightarrow (f_1 = o(f_3)\ (x \to a))$; *в) (теорема транзитивности)* $((f_1 = o(f_2)\ (x \to a)) \wedge (f_2 = o(f_3)\ (x \to a))) \Rightarrow (f_1 = o(f_3)\ (x \to a))$;

II теорема сложения $(f_i = o(h)\ (x \to a)\ (i = 1, 2)) \Rightarrow (f_1 + f_2 = o(h)\ (x \to a))$;

III теорема умножения $\{f_i = o(g_i)\ (x \to a)\ (i = 1, 2)$; $(f_1 = O(g_1)\ (x \to a)) \wedge (f_2 = o(g_2)\ (x \to a))$; $(f_1 = o(g_1)\ (x \to a)) \wedge (f_2 = O(g_2)\ (x \to a))\} \Rightarrow (f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)\ (x \to a))$. (Доказательство провести самостоятельно.)

Докажем, например, I а). Пусть $f_1 = O(f_2)\ (x \to a)$ и $f_2 = o(f_3)\ (x \to a)$. Тогда существуют $C > 0$ и $U(a)$ такие, что $|f_1(x)| \leq C|f_2(x)|$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. Далее, поскольку $f_2 = o(f_3)\ (x \to a)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists V(a)$ такая, что

$$|f_2(x)| < \frac{\varepsilon}{C}|f_3(x)|\ \forall x \in \dot{V}(a) \cap M.$$

Но тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists W(a) \subset U(a) \cap V(a)$ такая, что

$$|f_1(x)| \leq C|f_2(x)| \leq C\frac{\varepsilon}{C}|f_3(x)| = \varepsilon|f_3(x)|\ \forall x \in \dot{W}(a) \cap M,$$

т. е. $f_1 = o(f_3)\ (x \to a)$.

С л е д с т в и е. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Тогда:

1) $O(o(f)) = o(f)\ (x \to a)$; $o(O(f)) = o(f)\ (x \to a)$; $o(o(f)) = o(f)\ (x \to a)$;

2) $\sum\limits_{j=1}^{m} \lambda_j \cdot o(f) = o(f)\ (x \to a)$;

3) $o(f) \cdot o(g) = o(f \cdot g)\ (x \to a)$; $o(f) \cdot O(g) = o(f \cdot g)\ (x \to a)$.

П р и м е р. $(\sin x = o(1)\ (x \to 0)$; $\sin x = O(x)\ (x \to 0)) \Rightarrow (x \cdot \sin x = o(x)\ (x \to 0)$; $\sin^2 x = o(x)\ (x \to 0))$.

Т е о р е м а. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на* M *и* $a \in M'$. *Тогда* $(f(x) - g(x) = o(f(x))\ (x \to a)) \Rightarrow (f(x) - g(x) = o(g(x))\ (x \to a))$, *причем* $f = O(g)\ (x \to a)$ *и* $g = O(f)\ (x \to a)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) - g(x) = o(f(x))\ (x \to a)$. Тогда $\forall \varepsilon \in (0, 1)\ \exists U(a)$ такая, что

$$\forall x \in \dot{U}(a) \cap M \Rightarrow (\varepsilon|f(x)| \geq |f(x) - g(x)| \geq$$

$$\geq |f(x)| - |g(x)|) \Rightarrow ((1 - \varepsilon)|f(x)| \leq |g(x)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(|f(x) \leq \frac{1}{1 - \varepsilon}|g(x)|\right), \text{ т. е. } f = O(g)\ (x \to a).$$

Итак, $(f(x) - g(x) = o(f(x))\ (x \to a)) \Rightarrow (f = O(g)\ (x \to a))$, но $o(O(g)) = o(g)\ (x \to a)$, поэтому $f(x) - g(x) = o(g(x))\ (x \to a)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на множестве M и $a \in M'$. Скажем, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to a$, если $f(x) - g(x) = o(f(x))$ $(x \to a)$.* Запись: $f \sim g$ $(x \to a)$.

З а м е ч а н и е. Если $f(x)$ и $g(x)$ определены на M и $a \in M'$, то $(f \sim g(x \to a)) \Rightarrow (f \asymp g(x \to a))$, но не наоборот. В самом деле, $(f \sim g$ $(x \to a)) \Rightarrow (f = O(g)$ $(x \to a)) \wedge (g = O(f)$ $(x \to a)) \Rightarrow (f \sim g(x \to a))$.

З а м е ч а н и е. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на M и $a \in M'$, то $(f \sim g$ $(x \to a)) \Leftrightarrow (f = g + o(g)$ $(x \to a))$.

З а м е ч а н и е. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на M и $a \in M'$ и существует $U(a)$ такая, что $g(x) \neq 0$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$, то $f \sim g$ $(x \to a)$ означает, что существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. В самом деле, $(f \sim g$ $(x \to a)) \Rightarrow (f(x) = g(x) + o(g(x))$ $(x \to a))$, откуда в $\dot{U}(a) \cap M$ имеем $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1 + o(1)$ $(x \to a) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. (Обратное утверждение доказать самостоятельно.)

З а м е ч а н и е. Из $f \sim g$ $(x \to a)$ не следует $\exists \lim\limits_{x \to a}(f(x) - g(x)) = 0$.

Например, $(x^2 + x) \sim x^2$ $(x \to +\infty)$, но $(x^2 + x) - x^2 = x \to +\infty$ при $x \to +\infty$, т. е. эта функция даже не ограничена.

П р и м е р. Пусть $f(x)$ определена на M, $a \in M'$ и $f \sim c$ $(x \to a)$, где c – постоянная. Тогда существует $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

В самом деле, $(f \sim c$ $(x \to a)) \Rightarrow f(x) = c + o(c) = c + o(1)$ $(x \to a)$, откуда $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = c$.

П р и м е р. Пусть $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ – многочлен степени n, причем $a_0 \neq 0$, тогда $\mathcal{P}_n(x) \sim a_0 x^n$ $(x \to +\infty)$. В самом деле,

$$\mathcal{P}_n(x) - a_0 x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} o(x^n) = o(x^n)\,(x \to +\infty).$$

П р и м е р. $(1 + 1/x) \sin x \sim \sin x$ $(x \to +\infty)$, так как имеем $(1 + 1/x) \sin x - \sin x = (1/x) \sin x = o(\sin x)$ $(x \to +\infty)$.

З а м е ч а н и е. Если функции $f_i(x)$ и $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ определены на множестве M, $a \in M'$ и $f_i \sim g_i$ $(x \to a)$, то функции $f_1(x) + f_2(x)$ и $g_1(x) + g_2(x)$ могут и не быть эквивалентными при $x \to a$ (т. е. для отношения эквивалентности $\sim$ теорема сложения, вообще говоря, неверна).

Например: 1) $f_1(x) = x^2 \sim x^2 = g_1(x)$ $(x \to +\infty)$; $f_2(x) = -(x^2 + x) \sim -(x^2 + 1) = g_2(x)$ $(x \to +\infty)$, но функции $f_1(x) + f_2(x) = -x$ и $g_1(x) + g_2(x) = -1$ не эквивалентны при $x \to +\infty$;

2) $f_1(x) = x + x^2 \sim x + x^3 = g_1(x)$ $(x \to 0)$; $f_2(x) = -x + x^2 \sim -x = g_2(x)$ $(x \to 0)$, но функции $f_1(x) + f_2(x) = 2x^2$ и $g_1(x) + g_2(x) = x^3$ не

эквивалентны при $x \to 0$.

Теорема умножения (для эквивалентных функций). *Пусть* $f_i(x)$ *и* $g_i(x)$ $(i = 1, 2)$ *определены на множестве* M *и* $a \in M'$. *Тогда если* $f_i \sim g_i$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)$, *то* $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ $(x \to a)$.

Доказательство. $(f_i \sim g_i\ (x \to a)\ (i = 1, 2)) \Rightarrow (f_i = g_i + o(g_i)$ $(x \to a)\ (i = 1, 2))$, но тогда имеем $f_1 \cdot f_2 = (g_1 + o(g_1))(g_2 + o(g_2)) = g_1 \cdot g_2 + [g_1 \cdot o(g_2) + g_2 \cdot o(g_1) + o(g_1) \cdot o(g_2)] = g_1 \cdot g_2 + o(g_1 \cdot g_2)$ $(x \to a)$ $\Rightarrow f_1 \cdot f_2 = g_1 \cdot g_2 + o(g_1 \cdot g_2)$ $(x \to a)$, т. е. $f_1 \cdot f_2 \sim g_1 \cdot g_2$ $(x \to a)$.

Теорема о знаке. *Пусть* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на* M, $a \in M'$ *и существует окрестность* $U_\delta(a)$ *такая, что* $g(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in M \cap (a, a+\delta)$ *(или* $\forall x \in M \cap (a-\delta, a)$*). Тогда если* $f \sim g$ $(x \to a + 0)$ *(или при* $x \to a - 0$*), то существует окрестность* $V_{\delta_1}(a) \subset U_\delta(a)$ *такая, что* $f(x) > 0$ (< 0) $\forall x \in M \cap (a, a + \delta_1)$ *(соответственно* $\forall x \in M \cap (a - \delta_1, a)$*).*

Доказательство. Пусть $f \sim g$ $(x \to a + 0)$ и $g(x) > 0$ $\forall x \in M \cap (a, a + \delta)$, тогда $f = g + o(g)$ $(x \to a + 0)$, и поэтому $\forall \varepsilon \in (0, 1)$ $\exists V_{\delta_1}(a) \subset U_\delta(a)$ такая, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)| = \varepsilon g(x)$ $\forall x \in M \cap (a, a + \delta_1)$, откуда $f(x) \geq g(x) - \varepsilon g(x) = (1 - \varepsilon) g(x) > 0$ $\forall x \in M \cap (a, a + \delta_1)$.

Теорема о пределе частного. *Пусть функции* $f_i(x)$, $g_i(x)$ $(i - 1, 2)$ *определены на множестве* M, $a \in M'$ *и существует окрестность* $U(a)$ *такая, что* $f_2(x) \neq 0$, $g_2(x) \neq 0$ $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = A$ *и* $f_i \sim g_i$ $(x \to a)$ $(i = 1, 2)$. *Тогда*

$$\exists \lim_{x \to a} \frac{g_1(x)}{g_2(x)} = A.$$

Доказательство. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = A$, то имеет место представление $f_1(x)/f_2(x) = A + o(1)$ $(x \to a)$ в $\dot{U}(a) \cap M$, откуда $f_1 = A f_2 + o(f_2)$ $(x \to a)$, но $f_2 \sim g_2$ $(x \to a)$, поэтому $f_2 = g_2 + o(g_2)$ $(x \to a)$ и $f_2 = O(g_2)$ $(x \to a)$, откуда $f_1 = A g_2 + [A \cdot o(g_2) + o(O(g_2))] = A g_2 + o(g_2)$ $(x \to a)$ и, в частности, $f_1 = O(g_2)$ $(x \to a)$. Далее, $g_1 \sim f_1$ $(x \to a)$, поэтому $g_1 = f_1 + o(f_1)$ $(x \to a)$ или $g_1 = A g_2 + [o(g_2) + o(O(g_2))] = A g_2 + o(g_2)$ $(x \to a)$, т. е. $\forall x \in \dot{U}(a) \cap M$ $g_1(x)/g_2(x) = A + o(1)$ $(x \to a) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to a} g_1(x)/g_2(x) = A$.

Пример. $\sin x = x + o(x)$ $(x \to 0) \Rightarrow \sin x \sim x$ $(x \to 0)$; $\sin 2x = 2x + o(x)$ $(x \to 0) \Rightarrow \sin 2x \sim 2x$ $(x \to 0) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x \sin 2x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x \cdot 2x} = \dfrac{1}{2}$.

Пусть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, определенные на множестве M, являются бесконечно малыми при $x \to a$ (где $a \in M'$), т. е. $\alpha = o(1)$ $(x \to a)$; $\beta = o(1)$ $(x \to a)$.

О п р е д е л е н и е. *Бесконечно малые при* $x \to a$ *функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются бесконечно малыми одного порядка при* $x \to a$, *если* $\alpha \asymp \beta$ $(x \to a)$.

П р и м е р. Бесконечно малые $\alpha(x) = 1/x$ и $\beta(x) = 3/x$ (при $x \to +\infty$) одного порядка, так как $\beta(x)/3 = 1/x \leq \alpha(x) = 1/x \leq \beta(x) = 3/x \ \forall x \neq 0$.

О п р е д е л е н и е. *Бесконечно малые функции* $\alpha(x)$ *и* $\beta(x)$ *называются эквивалентными при* $x \to a$, *если* $\alpha \sim \beta$ $(x \to a)$.

П р и м е р. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$.

О п р е д е л е н и е. *Бесконечно малая функция* $\alpha(x)$ *при* $x \to a$ *называется бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая (при* $x \to a$*) функция* $\beta(x)$, *если* $\alpha = o(\beta)$ $(x \to a)$.

П р и м е р. Пусть $\alpha(x) = \sin^2 x$ и $\beta(x) = x \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$, тогда $\sin^2 x = o(x)$ $(x \to 0)$, так как $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + o(x))^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + o(x^2)}{x} = 0$.

Приведем следующие девять простейших разложений при $x \to 0$.

1) $\sin x = x + o(x)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $\exists \lim\limits_{x \to 0} \sin x/x = 1 \Rightarrow (\sin x/x = 1 + o(1)$ $(x \to 0)) \Rightarrow (\sin x = x + o(x)$ $(x \to 0)))$;

2) $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^2)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2/2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2 \sin^2 (x/2)}{x^2/2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4(x/2 + o(x))^2}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2(1 + o(1))}{x^2} = 1$);

3) $\operatorname{tg} x = x + o(x)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $\exists \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg} x/x = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = x + o(x)$ $(x \to 0)$);

4) $\arcsin x = x + o(x)$ $(x \to 0)$;

5) $\operatorname{arctg} x = x + o(x)$ $(x \to 0)$;

6) $\ln(1 + x) = x + o(x)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $\exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \ln[(1 + x)^{1/x}] = \ln e = 1$;

7) $e^x = 1 + x + o(x)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $e^x - 1 = z$, $x = \ln(1 + z) \Rightarrow \exists \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{z}{\ln(1 + z)} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{z}{z + o(z)} = 1$);

8) $a^x = 1 + x \ln a + o(x)$ $(x \to 0)$, $a > 0$, $a \neq 1$. $(a^x = \exp\{x \ln a\} = 1 + x \ln a + o(x)$ $(x \to 0))$;

9) $(1 + x)^a = 1 + ax + o(x)$ $(x \to 0)$ (в самом деле, $(1 + x)^a = \exp\{a \ln(1 + x)\} = \exp\{a(x + o(x))\} = 1 + a(x + o(x)) + o(x + o(x)) = 1 + ax + o(x)$ $(x \to 0))$.

§ 9. Предел числовой функции по базе

При рассмотрении теорем о пределах была отмечена двойственность формулировок ряда теорем для числовых функций и для числовых последовательностей, причем и доказательства этих теорем оказывались вполне аналогичными. Для выяснения этого явления проанализируем определения предела функции в точке и предела числовой последовательности. При окрестностном определении предела числовой функции $f(x)$ (заданной на множестве M) в точке $a \in M'$: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ требовалось, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ существовало множество $B_\delta = \dot{U}(a) \cap M$ такое, что $|f(x) - A| < \varepsilon \ \forall x \in B_\delta$. При этом в доказательствах всех теорем о пределах функции от системы множеств $\{B_\delta\}$ требовалось выполнение только двух свойств: 1) $B_\delta = \dot{U}_\delta(a) \cap M \neq \varnothing$ $\forall \delta > 0$ это свойство обеспечивалось тем, что $a \in M'$ и $U_\delta(a)$ есть окрестность точки a; 2) $\forall \delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ $\exists B_{\delta_3} = \dot{U}_{\delta_3}(a) \cap M$ такая, что $B_{\delta_3} \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$, т. е. $\dot{U}_{\delta_3}(a) \cap M \subset (\dot{U}_{\delta_1} \cap \dot{U}_{\delta_2}(a)) \cap M$ (например, $\forall \delta_3 \in (0, \min(\delta_1, \delta_2))$) (это свойство следует из указанного ранее свойства 2) проколотых окрестностей).

Аналогично в определении предела числовой последовательности $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ требовалось, чтобы $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ множество натуральных чисел $B_{N_0} = \{m \in \mathbf{N} | m \geq N_0\}$ такое, что, $|a_n - a| < \varepsilon \ \forall n \in B_{N_0}$. При доказательстве всех теорем о пределах последовательностей использовались только два свойства системы $\{B_n\}$: 1) $B_n \neq \varnothing \ \forall n \in \mathbf{N}$ и 2) $\forall n, m \in \mathbf{N}$ $\exists l \in \mathbf{N}$ такое, что $B_l \subset B_n \cap B_m$ (например, $\forall l \geq \max(m, n)$).

О п р е д е л е н и е. *Пусть дано множество M. Система множеств $\mathbf{B} = \{B\}$ (где $B \subset M$ суть подмножества M) называется базисом фильтра (или предфильтром, или просто базой) во множестве M, если: 1) $B \neq \varnothing \ \forall B \in \mathbf{B}$ и 2) $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ $\exists B_3 \in \mathbf{B}$ такое, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.*

Множества B из базы $\mathbf{B}$ будем называть элементами базы.

П р и м е р ы: 1) Если $a \in M'$, то система множеств $B = \dot{U}(a) \cap M$ $\forall \dot{U}(a)$ есть база в M, она обозначается символом $x \to a$;

2) если $a \in M$, то система множеств $B = U(a) \cap M$ $\forall U(a)$ есть база в M;

3) если $a \in (M_a^+)'$, где $M_a^+ = M \cap (a, +\infty)$, то система множеств $B_\delta = (a, a + \delta) \cap M$ $\forall \delta > 0$ есть база в M, она обозначается символом $x \to a + 0$;

4) если $a \in (M_a^-)'$, где $M_a^- = (-\infty, a) \cap M$, то система множеств $B_\delta = (a - \delta, a) \cap M$ $\forall \delta > 0$ есть база в M, она обозначается символом $x \to a - 0$;

5) система множеств $B_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ есть база в $\mathbf{N}$, она называется базисом фильтра Фреше и обозначается символом $n \to +\infty$;

6) если $\sup M = +\infty$, то система множеств $B_K = M \cap (K, +\infty)$ $\forall K > 0$ есть база в M, она обозначается символом $x \to +\infty$;

7) если $\inf M = -\infty$, то система множеств $B_K = (-\infty, -K) \cap M$ $\forall K > 0$ есть база в M, она обозначается символом $x \to -\infty$;

8) если $\sup\limits_{x \in M} |x| = +\infty$, то система множеств $B_K = \{x \in M \,||x| > K\}$ $\forall K > 0$ есть база в M, она обозначается символом $x \to \infty$;

9) если $[a, b] \subset (-\infty, +\infty)$ – заданный отрезок, то система всех окрестностей $\{(\alpha, \beta)\}$, содержащих отрезок $[a, b]$ ($[a, b] \subset (\alpha, \beta)$), есть база в $\mathbf{R}$;

10) множество всех окрестностей $\mathbf{B} = \{(\alpha, \beta)\}$ $\forall \alpha, \beta \in (-\infty, +\infty)$ $(\alpha < \beta)$ не является базой в $(-\infty, +\infty)$, так как, например, $(0, 1) \in \mathbf{B}$ и $(-1, 0) \in \mathbf{B}$, но $(0, 1) \cap (-1, 0) = \varnothing$, т. е. не выполнено требование 2) из определения базы.

Замечание. Из определения базы $\mathbf{B}$ в M следует, что если $B_0 \in \mathbf{B}$, то система множеств $\{\hat{B}\}$ всех элементов $\hat{B} \in \mathbf{B}$ таких, что $\hat{B} \subset B_0$, также есть база в M.

Определение. *Пусть (числовая) функция $f(x)$ определена на множестве M и $\mathbf{B}$ есть база (предфильтр) во множестве M. Скажем, что число $A \in \mathbf{R}$ есть предел функции $f(x)$ по базе $\mathbf{B}$ (вдоль предфильтра $\mathbf{B}$), если $\forall \varepsilon > 0$ существует элемент $B \in \mathbf{B}$ такой, что $|f(x) - A| < \varepsilon$ $\forall x \in B$.*

Обозначение: $A = \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)$.

Все доказанные ранее теоремы для пределов функции в точке могут быть сформулированы и доказаны для пределов функции по базе.

Задание. Переформулируйте и докажите теоремы из § 3, 4 и 8 этой главы для пределов функции по базе.

Пример.

Теорема о пределе суммы. *Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены на множестве M и $\mathbf{B}$ – база во множестве M, причем $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = A_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда*

$$\exists \lim_{\mathbf{B}} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2.$$

Доказательство. Поскольку $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = A_i$ $(i = 1, 2)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_i \in \mathbf{B}$ $(i = 1, 2)$ такие, что $|f_i(x) - A_i| < \varepsilon/2$ $\forall x \in B_i$ $(i = 1, 2)$. По свойству 1) базы $B_i \neq \varnothing$, а в силу свойства 2) базы существует элемент $B_3 \in \mathbf{B}$ такой, что $B_3 \subset B_1 \cap B_2$, но тогда $|(f_1(x) + f_2(x)) - (A_1 + A_2)| \leq |f_1(x) - A| + |f_2(x) - A| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$ $\forall x \in B_3$, т. е. $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $\mathbf{B} = \{B\}$ – база в M. Функция $f(x)$ называется локально*

ограниченной по базе $\mathbf{B}$, *если существуют постоянная* $C > 0$ *и элемент* $B_0 \in \mathbf{B}$ *такие, что* $|f(x)| \le C \ \forall x \in B_0$.

Т е о р е м а (о локальной ограниченности функции, имеющей предел по базе). *Пусть* $f(x)$ *определена на* M *и* $\mathbf{B}$ *– база в* M. *Если* $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A$, *то функция* $f(x)$ *локально ограничена по базе* $\mathbf{B}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения предела $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A$ вытекает, что для $\varepsilon_0 = 1 > 0 \ \exists B_0 \in \mathbf{B}$ такой, что $|f(x) - A| < 1 \ \forall x \in B_0$, т. е. $|f(x)| \le C = |A| + 1 \ \forall x \in B_0$, где $B_0 \in \mathbf{B}$, что и означает локальную ограниченность функции $f(x)$ по базе $\mathbf{B}$.

Л е м м а. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и ограничена на множестве* M. *Тогда* $\forall B \subset B_0$, *имеем*

$$\sup_{x_1, x_2 \in B} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup_{B} f(x) - \inf_{\mathbf{B}} f(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $l = \sup\limits_{B} f(x) - \inf\limits_{B} f(x)$. Заметим, что $\forall x_1, x_2 \in B \subset B_0 \Rightarrow -\infty < \inf\limits_{B} f(x) \le f(x_i) \le \sup\limits_{B} f(x) < +\infty$ $(i = 1, 2)$, откуда имеем 1) $|f(x_1) - f(x_2)| \le \sup\limits_{B} f(x) - \inf\limits_{B} f(x) = l$ $\forall x_1, x_2 \in B$.

Далее, в силу определений $\sup\limits_{B} f(x)$ и $\inf\limits_{B} f(x)$ имеем $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1^0, x_2^0 \in B$ такие, что $f(x_1^0) > \sup\limits_{B} f(x) - \varepsilon/2$ и $f(x_2^0) < \inf\limits_{B} f(x) + \varepsilon/2$, т. е. $f(x_1^0) - f(x_2^0) > l - \varepsilon$. Но тогда 2) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_1^0, x_2^0 \in B$ такие, что $|f(x_1^0) - f(x_2^0)| > l - \varepsilon$. Из 1) и 2) вытекает, что $l = \sup\limits_{x_1, x_2 \in B} |f(x_1) - f(x_2)|$.

Т е о р е м а. *Пусть числовая функция* $f(x)$ *определена на множестве* M *и* $\mathbf{B}$ *– база в* M. *Пусть* $f(x)$ *ограничена на элементе базы* $B_0 \in \mathbf{B}$. *Тогда* $\forall B_1, B_2 \in \mathbf{B}$ *таких, что* $B_1 \subset B_0$, $B_2 \subset B_0$, *имеем* $-\infty < \inf\limits_{B_1} f(x) \le \sup\limits_{B_2} f(x) < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу свойств базы $\mathbf{B}$ имеем $B_i \ne \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $B_1 \cap B_2 \ne \varnothing$, причем $B_i \subset B_0$ $(i = 1, 2)$, $B_1 \cap B_2 \subset B_0$. Но тогда, очевидно, $(-\infty < \inf\limits_{B_0} f(x) \le \inf\limits_{B_1} f(x) \le \inf\limits_{B_1 \cap B_2} f(x) \le \sup\limits_{B_1 \cap B_2} f(x) \le \sup\limits_{B_2} f(x) \le \sup\limits_{B_0} f(x) < +\infty) \Rightarrow (-\infty < \inf\limits_{B_1} f(x) \le \sup\limits_{B_2} f(x) < +\infty)$.

Т е о р е м а. *Пусть числовая функция* $f(x)$ *определена на множестве* M *и* $\mathbf{B}$ *– база во множестве* M. *Пусть* $f(x)$ *ограничена на элементе* $B_0 \in \mathbf{B}$. *Тогда существуют числа* $a_0, a^0 \in \mathbf{R}$ *такие, что* $a_0 = \sup\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \inf\limits_{x \in B} f(x)$, $a^0 = \inf\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \sup\limits_{x \in B} f(x)$, *причем* $-\infty < a_0 \le a^0 < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу ограниченности функции $f(x)$ на элементе $B_0 \in \mathbf{B}$ имеем $-\infty < \inf\limits_{B_0} f(x) \le \sup\limits_{B_0} f(x) < +\infty$. Рассмотрим

следующие множества A_0 и A^0 из $\mathbf{R}$. $A_0 = \{y \in \mathbf{R} | y = \inf\limits_{x \in B} f(x), B \subset B_0, B \in \mathbf{B}\}$, $A^0 = \{z \in \mathbf{R} | z = \sup\limits_{x \in B} f(x), B \subset B_0, B \in \mathbf{B}\}$. Поскольку $\inf\limits_{B_0} f(x) \in A_0$ и $\sup\limits_{B_0} f(x) \in A^0$, то $A_0 \neq \varnothing$, $A^0 \neq \varnothing$. Кроме того, в силу теоремы, доказанной выше, имеем $-\infty < \inf\limits_{B_1} f(x) \leq \sup\limits_{B_2} f(x) < +\infty$ $\forall B_i \subset \mathbf{B}$, $B_i \subset B_0$ $(i = 1, 2)$, откуда

$$(\forall y \in A_0) \wedge (\forall z \in A^0) \Rightarrow (y \leq z), \tag{9.1}$$

т. е. непустое числовое множество A_0 ограничено сверху, а непустое множество A^0 ограничено снизу в $\mathbf{R}$. В силу полноты $\mathbf{R}$ $\exists a_0 = \sup A_0 \in \mathbf{R}$ и $\exists a^0 = \inf A^0 \in \mathbf{R}$, причем из неравенства (9.1) вытекает: 1) любое $z \in A^0$ есть верхняя грань для множества A_0, т. е. $a_0 = \sup A_0 \leq z$ $\forall z \in A^0$. Но тогда имеем: 2) a_0 есть нижняя грань для множества A^0, и поэтому $(a_0 \leq a^0 = \inf A^0) \Rightarrow (-\infty < a_0 \leq a^0 < +\infty)$.

Замечание. Числа $a^0 = \inf\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \sup\limits_{x \in B} f(x) = \overline{\lim\limits_{\mathbf{B}}} f(x)$ и $a_0 = \sup\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \inf\limits_{x \in B} f(x) = \underline{\lim\limits_{\mathbf{B}}} f(x)$ называются соответственно верхним и нижним пределами функции $f(x)$ по базису фильтра $\mathbf{B}$.

Доказать самим эквивалентность определений а) и б), где

$$\text{а) } a^0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} a_n \text{ (старое) и}$$

$$\text{б) } a^0 = \overline{\lim_{n \to +\infty}} a_n = \inf_{\forall m \in \mathbf{N}} \sup_{\forall n \geq m} .$$

Теорема (критерий Коши существования предела числовой функции по базису фильтра). *Пусть числовая функция $f(x)$ определена на множестве M и $\mathbf{B}$ – базис фильтра на множестве M. Тогда* $(\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists$ *элемент* $B(\varepsilon) \in \mathbf{B}$ *такой, что* $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in B(\varepsilon))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A$, тогда в силу определения предела числовой функции по базису фильтра $\mathbf{B}$ видим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_1 \in \mathbf{B}$ такой, что $|f(x_i) - A| < \varepsilon/2$ $\forall x_i \in B_i$ $(i = 1, 2)$, т. е. $|f(x_1) - f(x_2)| = |(f(x_1) - A) + (A - f(x_2)| \leq |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \varepsilon$ $\forall x_1, x_2 \in B_1$.

Достаточность. Пусть выполнены условия критерия Коши, тогда для $\varepsilon_0 = 1 > 0$ $\exists B_0 \in \mathbf{B}$ такой, что $|f(x) - f(x_0)| < 1$ $\forall x, x_0 \in B_0$ $\Rightarrow |f(x)| \leq |f(x_0)| + 1 = C$ $\forall x \in B_0$, т. е. $f(x)$ ограничена на элементе $B_0 \in \mathbf{B}$ (и, в частности, $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{B}$). Но тогда по предыдущей теореме $\exists a^0 = \inf\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \sup\limits_{x \in B} f(x)$, $a_0 = \sup\limits_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \inf\limits_{x \in B} f(x)$, причем $-\infty < a_0 \leq a^0 < +\infty$ и, в частности,

$\forall B \subset B_0$, $B \in \mathbf{B}$ имеем

$$-\infty < \inf_B f(x) \le a_0 \le a^0 \le \sup_B f(x) < +\infty. \tag{9.2}$$

Докажем сначала, что $a_0 = a^0$. В самом деле, в силу условия Коши $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_1 \in \mathbf{B}$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \, \forall x_1, x_2 \in B_1. \tag{9.3}$$

Но в силу свойства (9.2) базы $\mathbf{B}$ $\exists B_2 \in \mathbf{B}$ такое, что $B_2 \subset B_1 \cap B_0$, используя лемму и (9.3), имеем

$$\varepsilon \ge \sup_{x_1, x_2 \in B_2} |f(x_1) - f(x_2)| = \sup_{B_2} f(x) - \inf_{B_2} f(x). \tag{9.4}$$

Но тогда из (9.2) получаем оценки $0 \le a^0 - a_0 \le \sup\limits_{B_2} f(x) - \inf\limits_{B_2} f(x) \le \varepsilon$ и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $a_0 = a^0 = A$, причем из (9.2) следует оценка $\inf\limits_{B_2} f(x) \le A \le \sup\limits_{B_2} f(x)$. Кроме того, очевидно, $\inf\limits_{B_2} f(t) \le f(x) \le \sup\limits_{B_2} f(t)$ $\forall x \in B_2$, т. е. $\forall x \in B_2 \Rightarrow |f(x) - A| \le \sup\limits_{B_2} f(t) - \inf\limits_{B_2} f(t) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in B_2} |f(x_1) - f(x_2)|$. Но в силу выбора (по $\varepsilon > 0$) элемента $B_2 \in \mathbf{B}$ из (9.4) имеем $|f(x) - A| \le \varepsilon$ $\forall x \in B_2$, но это и означает, что $A = \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)$.

Пусть теперь во множестве L заданы два базиса фильтра $\mathbf{B} = \{B\}$ и $\mathbf{D} = \{\mathcal{D}\}$.

О п р е д е л е н и е. *Базисы фильтра* $\mathbf{B}$ *и* $\mathbf{D}$ *во множестве* L *называются эквивалентными, если: 1)* $\forall B \in \mathbf{B}$ $\exists \mathcal{D}_0 \in \mathbf{D}$ *такой, что* $\mathcal{D}_0 \subset B$, *и 2)* $\forall \mathcal{D} \in \mathbf{D}$ $\exists B_0 \in \mathbf{B}$ *такой, что* $B_0 \subset \mathcal{D}$.

З а м е ч а н и е. Если базисы фильтра $\mathbf{B} = \{B\}$ и $\mathbf{D} = \{\mathcal{D}\}$, заданные во множестве L, эквивалентны, то $\forall B \in \mathbf{B}$ и $\forall \mathcal{D} \in \mathbf{D}$ $\exists B_1 \in \mathbf{B}$ и $\exists \mathcal{D}_1 \in \mathbf{D}$ такие, что $B_1 \subset B \cap \mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1 \subset B \cap \mathcal{D}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $B \in \mathbf{B}$ и $\mathcal{D} \in \mathbf{D}$. Поскольку базы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ эквивалентны, то $\exists B_0 \in \mathbf{B}$ такое, что $B_0 \subset \mathcal{D}$, и $\exists \mathcal{D}_0 \in \mathbf{D}$ такое, что $\mathcal{D}_0 \subset B$. Но тогда имеем $B \cap \mathcal{D} \supset B \cap B_0$ и $B \cap \mathcal{D} \supset \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_0$. В силу свойства 2) базы $\exists B_1 \in \mathbf{B}$ такое, что $B_1 \subset B \cap B_0 \subset B \cap \mathcal{D}$, и $\exists \mathcal{D}_1 \in \mathbf{D}$ такое, что $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_0 \subset B \cap \mathcal{D}$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Класс эквивалентных баз $\mathbf{B}$ во множестве L называется фильтром в L.

П р и м е р ы. Пусть $x_0 \in \overline{L} \subset \mathbf{R}$. Тогда следующие базисы фильтра во множестве L эквивалентны: 1) $\mathbf{A} = \{A\}$, где $A = [\alpha, \beta] \cap L$ $\forall (\alpha, \beta) \ni x_0$; 2) $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$, где $B_\delta = \Delta_\delta(x_0) \cap L$, $\Delta_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ $\forall \delta > 0$; 3) $\mathbf{D} = \{\mathcal{D}\}$, где $\mathcal{D} = U(x_0) \cap L$ $\forall U(x_0) = (\alpha, \beta) \ni x_0$.

Докажем, например, эквивалентность баз $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (эквивалентность баз $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ доказать самостоятельно). В самом деле, $\forall A \in \mathbf{A}$ имеем

$\mathbf{A} = [\alpha, \beta] \cap L \supset (\alpha, \beta) \cap L$, где $\alpha < x_0 < \beta$, но тогда $\exists \delta_0 > 0$ такое, что $\alpha < x_0 - \delta_0 < x_0 < x_0 + \delta_0 < \beta$, $B_{\delta_0} = \Delta_{\delta_0}(x_0) \cap L \subset [\alpha, \beta] \cap L = A$.

Итак, $\forall A \in \mathbf{A}\ \exists B_{\delta_0} \in \mathbf{B}$ такое, что $B_{\delta_0} \subset A$. С другой стороны, $\forall \delta > 0$ из $x_0 - \delta < x_0 < x_0 + \delta$ вытекает существование α_0, β_0 таких, что $0 < x_0 - \alpha_0 < \delta$, $0 < \beta_0 - x_0 < \delta$; $x_0 - \delta < \alpha_0 < x_0 < \beta_0 < x_0 + \delta \Rightarrow A = [\alpha_0, \beta_0] \cap L \subset B_\delta$, т. е. $\forall B_\delta \in \mathbf{B}\ \exists A_0 \in \mathbf{A}$ такое, что $A_0 \subset B_\delta$, что и завершает доказательство эквивалентности баз $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Т е о р е м а. *Пусть числовая функция $f(x)$ определена на множестве L и базисы фильтра $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ (во множестве L) эквивалентны. Тогда* $(\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{\mathbf{D}} f(x) = A)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_0(\varepsilon) \in \mathbf{B}$ такой, что $|f(x) - A| < \varepsilon\ \forall x \in B_0(\varepsilon)$.

Но база $\mathbf{D}$ эквивалентна базе $\mathbf{B}$, поэтому $\exists \mathcal{D}_0 \in \mathbf{D}$ такой, что $\mathcal{D}_0 \subset B_0(\varepsilon)$, откуда

$$|f(x) - A| < \varepsilon \forall x \in \mathcal{D}_0 \subset B_o(\varepsilon),$$

т. е. $\exists \lim\limits_{\mathbf{D}} f(x) = A$. Итак, доказано включение $(\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = A) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{\mathbf{D}} f(x) = A)$.

Обратное утверждение доказывается аналогично.

С л е д с т в и е. Пусть числовая функция $f(x)$ определена на множестве L и базы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ (во множестве L) эквивалентны. Тогда условия критерия Коши существования предела $f(x)$ по базам $\mathbf{B}$ и $\mathbf{D}$ выполняются одновременно.

Т е о р е м а. *Пусть числовая функция $f(x)$ определена на множестве L и базы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (во множестве L) эквивалентны. Если $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{A}$, то она локально ограничена и по базе $\mathbf{B}$, причем $\exists M, m \in \mathbf{R}$ такие, что*

$$M = \inf_{A \in \mathbf{A}} \sup_{x \in A} f(x) = \inf_{B \in \mathbf{B}} \sup_{x \in B} f(x);$$

$$m = \sup_{A \subset \mathbf{A}} \inf_{x \in A} f(x) = \sup_{B \in \mathbf{B}} \inf_{x \in B} f(x),$$

причем $-\infty < m \leq M < +\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть числовая функция $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{A}$, тогда существуют постоянная $C > 0$ и элемент $A_0 \in \mathbf{A}$ такие, что $|f(x)| \leq C\ \forall x \in A_0$, и, в частности, $\forall A \in \mathbf{A}$ такого, что $A \subset A_0$, имеем

$$-\infty < \sup_{x \in A} f(x) \leq \sup_{x \in A_0} f(x) < +\infty.$$

Но база $\mathbf{B}$ эквивалентна базе $\mathbf{A}$, и поэтому $\exists B_0 \in \mathbf{B}$ такой, что $B_0 \subset A_0$, и тогда $|f(x)| \leq C\ \forall x \in B_0 \subset A_0$, т. е. функция $f(x)$ локально ограничена по базе $\mathbf{B}$, причем $\forall B \in \mathbf{B}$ такого, что $B \subset B_0$, имеем

неравенства $\sup\limits_{B} f(x) \le \sup\limits_{B_0} f(x) \le \sup\limits_{A_0} f(x) < +\infty$. В силу ранее доказанной теоремы о существовании предела функции

$$\exists a^0 = \inf_{A \subset A_0, A \in \mathbf{A}} \sup_{x \in A} f(x) \in \mathbf{R},$$

$$\exists b^0 = \inf_{B \subset B_0, B \in \mathbf{B}} \sup_{x \in B} f(x) \in \mathbf{R}.$$

Рассмотрим теперь любые $A \subset A_0$ и $B \subset B_0$ такие, что $A \in \mathbf{A}$ и $B \in \mathbf{B}$. Поскольку базы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентны, то в силу замечания к определению эквивалентных баз $\exists A_1 \in \mathbf{A}$ и $\exists B_1 \in \mathbf{B}$ такие, что $A_1 \subset A \cap B \subset B \subset B_0$; $B_1 \subset A \cap B \subset A \subset A_0$, откуда имеем

$$\sup_{x \in A_1} f(x) \le \sup_{A \cap B} f(x) \le \sup_{x \in B} f(x) \, (\forall B \subset B_0), \tag{9.5}$$

$$\sup_{x \in B_1} f(x) \le \sup_{A \cap B} f(x) \le \sup_{x \in A} f(x) \, (\forall A \subset A_0). \tag{9.6}$$

Но из (9.5) и из (9.6) $\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix} a^0 \le b^0 \\ b^0 \le a^0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a^0 = b^0 = M \in \mathbf{R}$. В самом деле, поскольку $\forall B \subset B_0$ $\exists A_1 \in \mathbf{A}$ такое, что $\sup\limits_{A_1} f(x) \le \sup\limits_{B} f(x)$, то $a^0 = \inf\limits_{A \subset A_0} \sup\limits_{A} f(x)$, $a^0 \le \sup\limits_{A_1} f(x)$, так что $a^0 \le \sup\limits_{B} f(x)$ $\forall B \subset B_0$, и поэтому a^0 – нижняя грань чисел $\sup\limits_{B} f(x)$.

Тогда $a^0 \le b^0$, поскольку b^0 – точная нижняя грань (т. е. наибольшая из всех нижних граней).

Заметим, что число $M \in \mathbf{R}$ на самом деле не зависит от выбора элементов A_0 и B_0. Аналогично доказывается, что существует $m = a_0 = b_0 \in \mathbf{R}$, при этом всегда имеем $-\infty < m \le M < +\infty$.

С л е д с т в и е. Если базы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ (во множестве L) эквивалентны и функция $f(x)$ локально ограничена по этим базам, то

$$\overline{\lim_{\mathbf{A}}} f(x) = \overline{\lim_{\mathbf{B}}} f(x),$$

$$\underline{\lim_{\mathbf{A}}} f(x) = \underline{\lim_{\mathbf{B}}} f(x).$$

Глава 4

НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции

Будем рассматривать функцию $f(x)$, определенную на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Введем понятие непрерывности функции в точке $x_0 \in M$. Уже этим понятие непрерывности функции в точке отличается от понятия предела функции в точке, поскольку предел $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ определялся для $a \in M'$, причем точка a могла и не принадлежать множеству M.

Определение (окрестностное определение непрерывности функции в точке). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если для любой окрестности $V(f(x_0))$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $f(x) \in V(f(x_0))$ $\forall x \in U(x_0) \cap M$.* Запись: $f \in C(x_0)$.

Определение ((ε, δ)-определение (по Коши) непрерывности функции в точке). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in M$, удовлетворяющего неравенству*

$$(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Замечание. Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывна в точке $x_0 \in M$ ($f \in C(x_0)$), необходимо, чтобы функция $f(x)$ была определена в точке x_0, т. е. должно существовать $f(x_0)$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $x_0 \in M$. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in M$, если $\forall \varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in U(x_0) \cap M$.*

Замечание. Из определения непрерывности функции $f(x)$ (заданной на множестве M) в точке $x_0 \in M$ следует, что $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)$, где в качестве базы $\mathbf{B}$ в M рассмотрена система множеств $B = U(x_0) \cap M$ (подчеркнем, что $U(x_0)$ полная, а не проколотая окрестность точки $x_0 \in M$). Итак, имеем $(f \in C(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0))$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $M \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in M$. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, то говорят, что функция $f(x)$ разрывна в точке $x_0 \in M$.*

Замечание. Функция $f(x)$, определенная на множестве M, непрерывна в любой изолированной точке $x_0 \in M$. В самом деле, если $x_0 \in M$ – изолированная точка области определения M функции $f(x)$, то существует $U(x_0)$ такая, что $U(x_0) \cap M = \{x_0\}$. Но тогда $\forall \varepsilon > 0$

$\exists U^{(1)}(x_0) \subset U(x_0)$ такая, что $x = x_0\ \forall x \in U^{(1)}(x_0) \cap M$, и поэтому для «тех же» x имеем $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$, т. е. $f \in C(x_0)$. В частности, тогда $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)$, где $\mathbf{B} = \{B\}$ – база во множестве M с элементами $B = U(x_0) \cap M\ \forall U(x_0)$.

Замечание. Область определения M функции $f(x)$ можно представить в виде $M = M_C \cup M_D$, где M_C – множество всех точек из M, где функция $f(x)$ непрерывна, а M_D – множество всех точек разрыва функции $f(x)$. Очевидно, $M_D \subset M' \cap M$, т. е. точками разрыва функции $f(x)$ могут быть только предельные точки области определения M (принадлежащие M).

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $x_0 \in M \cap M'$. Тогда* $(f \in C(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $x_0 \in M \cap M'$ и $f \in C(x_0)$. Тогда существуют $f(x_0)$ и $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)$, где $\mathbf{B} = \{B\}$ – база в M с элементами $B = U(x_0) \cap M\ \forall U(x_0)$. Поскольку $x_0 \in M'$, то $\dot{U}(x_0) \cap M \neq \varnothing$ и $\dot{U}(x_0) \cap M \subset U(x_0) \cap M = B$, но тогда $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ существует элемент $B_1 = U^{(1)}(x_0) \cap M$ базы $\mathbf{B}$ такой, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in \dot{U}^{(1)}(x_0) \cap M \subset B_1 = U^{(1)}(x_0) \cap M$, откуда и следует, что существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Достаточность. Пусть $x_0 \in M \cap M'$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует проколотая окрестность $\dot{U}(x_0)$ такая, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in \dot{U}(x_0) \cap M.$$

Но для $x = x_0 \in M$ также имеем $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$. Таким образом, $\forall \varepsilon > 0$ существует полная окрестность $U(x_0)$ такая, что

$$(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in B = U(x_0) \cap M) \Rightarrow (\exists \lim_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)),$$

т. е. $f \in C(x_0)$.

Проведем классификацию точек разрыва $x_0 \in M \cap M'$ функции $f(x)$, определенной на множестве $M \subset \mathbf{R}$. Если $x_0 \in M_D \subset M \cap M'$, то возможны случаи: 1) $x_0 \in M \cap M'$, $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$. В этом случае точка $x_0 \in M$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$; 2) $x_0 \in M \cap M'$ и не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $x_0 \in M \cap M'$ есть точка разрыва функции $f(x)$. Если конечные односторонние пределы* $f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ *и* $f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ *существуют, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в*

точке $x_0 \in M$ разрыв 1-го рода. В противном случае точка $x_0 \in M$ называется точкой разрыва (функции $f(x)$) 2-го рода.

Пример. $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 0, x \in (-\infty, +\infty), \\ 1, x = 0. \end{cases}$ Очевидно, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$, так что точка $x_0 = 0$ есть точка устранимого разрыва функции $f(x)$. Если переопределить функцию $f(x)$ в точке $x_0 = 0$, рассмотрев функцию

$F(x) = \begin{cases} f(x), x \neq 0, x \in (-\infty, +\infty), \\ 0, x = 0, \end{cases}$ то функция $F(x)$ будет непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Пример.

Для функции $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, x > 0, \\ 0, x = 0, \\ -1, x < 0 \end{cases}$ точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва, при этом $\exists \lim\limits_{x \to +0} \operatorname{sgn} x = 1 \neq -1 = \lim\limits_{x \to -0} \operatorname{sgn} x$, поэтому точка $x_0 = 0$ есть точка разрыва 1-го рода.

Пример.

$f(x) = \begin{cases} 1, x - \text{рационально}, \\ 0, x - \text{иррационально}. \end{cases}$

Тогда $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ не существует односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, т. е. любая $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ есть точка разрыва 2-го рода функции $f(x)$. В самом деле, воспользуемся критерием Коши существования $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$ и заметим, что множество всех рациональных чисел $\mathbf{Q}$ плотно в $\mathbf{R}$. Кроме того, множество всех иррациональных чисел $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ также плотно в $\mathbf{R}$ (в $\mathbf{R}$ плотно, например, такое множество $\mathcal{P} = \{r \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} | r = q + \sqrt{2}/n \ \forall q \in \mathbf{Q}, \forall n \in \mathbf{N}\}$). Тогда $\delta > 0$ $\exists q_1 = \in \mathbf{Q}$ и $\exists r_1 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ такие, что $q_1, r_1 \in (x_0, x_0 + \delta)$, и поэтому $|f(q_1) - f(r_1)| = 1 > 0$, т. е. не выполнены условия критерия Коши для существования $f(x_0 + 0)$. Аналогично доказывается, что не может существовать $f(x_0 - 0)$.

Пример. $f(x) = \begin{cases} x, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$ Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon > 0$ такое, что $|f(x) - f(0)| \leq |x| < \delta = \varepsilon \ \forall x \in \dot{U}_\delta(0)$, т. е. $f \in C(0)$. Однако любая точка $x_0 \neq 0$ является точкой разрыва 2-го рода функции $f(x)$. В самом деле, пусть $x_0 > 0$, тогда $\forall x_0 > 2\delta > 0$ $\exists r_1 \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ и $\exists q_1 \in \mathbf{Q}$; $r_1, q_1 \in (x_0 - \delta, x_0)$, для которых $|f(r_1) - f(q_1)| = q_1 > x_0 - \delta \geq x_0/2 > 0$, т. е. опять условия критерия Коши не выполнены и поэтому не может существовать $f(x_0 - 0)$. Аналогично показывается, что и $f(x_0 + 0)$ при $x_0 \neq 0$ не существует.

Введем теперь полезное для дальнейшего понятия колебания функции на отрезке и в точке. Пусть числовая функция $f(x)$ определена на множестве $L \subset \mathbf{R}$ и локально ограничена в точке $x_0 \in \overline{L}$ так, что существуют постоянная $C > 0$ и окрестность $U_{\delta_0}(x_0)$ та-

кие, что $|f(x)| \le C\ \forall x \in U_{\delta_0}(x_0) \cap L$. Будем рассматривать отрезки $[\alpha,\beta] \subset U_{\delta_0}(x_0)$ и такие, что $x_0 \in (\alpha,\beta) \cap \overline{L}$. Положим

$$M(f;[\alpha,\beta]) = \sup_{x\in[\alpha,\beta]\cap L} f(x),$$

$$m(f;[\alpha,\beta]) = \inf_{x\in[\alpha,\beta]\cap L} f(x).$$

Определение. *Колебанием функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$ называется величина* $\omega(f;[\alpha,\beta]) = M(f;[\alpha,\beta]) - m(f;[\alpha,\beta])$. Заметим, что в силу леммы из § 9 гл. 3 имеем

$$\omega(f;[\alpha,\beta]) = \sup_{x_1,x_2\in[\alpha,\beta]\cap L} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Замечание. $\forall(\alpha',\beta') \subset (\alpha,\beta)$, $x_0 \in (\alpha',\beta')$ имеют место оценки

$$-\infty < m(f;[\alpha,\beta]) \le m(f;[\alpha',\beta']) \le M(f;[\alpha',\beta']) \le$$
$$\le M(f;[\alpha,\beta]) < +\infty;$$
$$0 \le \omega(f;[\alpha',\beta']) \le \omega(f;[\alpha,\beta]) < +\infty.$$

Положим $M(\delta) \equiv M(f;\Delta_\delta(x_0))$, $m(\delta) \equiv m(f;\Delta_\delta(x_0))$, $\Delta_\delta(x_0) = [x_0-\delta, x_0+\delta]\ \forall\delta \in (0,\delta_0)$. Тогда $\forall 0 < \delta_1 < \delta_2 < \delta_0$ имеем $-\infty < -C \le m(\delta_2) \le m(\delta_1) \le M(\delta_1) \le M(\delta_2) \le C < +\infty$, т. е. функция $M(\delta) \uparrow$ на $(0,\delta_0)$ и ограничена как сверху, так и снизу, а функция $m(\delta) \downarrow$ на $(0,\delta_0)$ и ограничена как снизу, так и сверху. В силу критерия существования предела у монотонных функции имеем $\exists \lim\limits_{\delta\to+0} M(\delta) = \inf\limits_{0<\delta<\delta_0} M(\delta) \equiv M(f;x_0)$; $\exists \lim\limits_{\delta\to+0} m(\delta) = \sup\limits_{0<\delta<\delta_0} m(\delta) \equiv m(f;x_0)$.

Очевидно, при этом имеют место оценки $(\forall\delta \in (0,\delta_0))\ -\infty < m(f;\Delta_\delta(x_0)) \le m(f;x_0) \le M(f;x_0) \le M(f;\Delta_\delta(x_0)) < +\infty$.

Определение. *Если функция $f(x)$ определена на множестве L и локально ограничена в точке $x_0 \in \overline{L}$, то величина $\omega(f;x_0) = M(f;x_0) - m(f;x_0)$ называется колебанием функции $f(x)$ в точке $x_0 \in \overline{L}$.*

Замечание. Очевидно, $\omega(f;x_0) = \lim\limits_{\delta\to+0} \omega(f;\Delta_\delta(x_0))$, причем $\forall\delta \in (0,\delta_0)$ имеем $0 \le \omega(f,x_0) \le \omega(f;\Delta_\delta(x_0)) < +\infty$.

Введем во множестве L два эквивалентных базиса фильтра $\mathbf{B} = \{B\}$ и $\mathbf{A} = \{A\}$, где $B_\delta = \Delta_\delta(x_0) \cap L\ \forall\delta \in (0,\delta_0)$ и $A = [\alpha,\beta] \cap L$ $\forall[\alpha,\beta] \subset U_{\delta_0}(x_0)$ и таких, что $[\alpha,\beta] \supset (\alpha,\beta) \ni x_0$.

Тогда имеем $M(f;x_0) = \inf\limits_{0<\delta<\delta_0} \sup\limits_{x\in B_\delta} f(x) = \overline{\lim\limits_{\mathbf{B}}} f(x)$, $m(f;x_0) = \sup\limits_{0<\delta<\delta_0} \inf\limits_{x\in B_\delta} f(x) = \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)$. Поскольку базы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}$ эквивалентны, то из последней теоремы § 9 гл. 3 имеем

$$M(f;x_0) = \overline{\lim_{\mathbf{A}}} f(x) = \inf_{[\alpha,\beta]\subset U_{\delta_0}(x_0)} \sup_{x\in[\alpha,\beta]\cap L} f(x) \overset{\text{def}}{=} \overline{\lim_{x\to0}} f(x),$$

$$m(f;x_0)=\underset{\mathbf{A}}{\lim}\,f(x)=\sup_{[\alpha,\beta]\subset U_{\delta_0}(x_0)}\inf_{x\in[\alpha,\beta]\cap L}f(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{x\to x_0}f(x),$$

$$\omega(f;x_0)\overset{\text{def}}{=}\overline{\lim_{x\to x_0}}\,f(x)-\underline{\lim_{x\to x_0}}\,f(x).$$

Замечание. Традиционное обозначение $x\to x_0$ здесь неудачно, поскольку рассматривается не база $\{\dot{U}(x_0)\cap L\}$, а база $\{U(x_0)\cap L\}$, эквивалентная **A** и **B**. Отметим, что $\forall[\alpha,\beta]\subset U_{\delta_0}(x_0)$ при $x_0\in(\alpha,\beta)$ имеем

$$-\infty<m(f;[\alpha,\beta])\le m(f;x_0)\le M(f;x_0)\le M(f;[\alpha,\beta])<+\infty;$$

$$0\le\omega(f;x_0)\le\omega(f;[\alpha,\beta])<+\infty.$$

Теорема (критерий непрерывности Бэра). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, $x_0\in M$ и $f(x)$ локально ограничена в точке x_0. Тогда* $(f\in C(x))\Leftrightarrow(\omega(f;x_0)=0))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f\in C(x_0)$. Если $x_0\in M$ – изолированная точка множества M, то, очевидно, $M(f;x_0)=m(f;x_0)=f(x_0)\Rightarrow\omega(f;x_0)=0$. Если $x_0\in M\cap M'$, то $f\in C(x_0)\Rightarrow\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, и поэтому функция $f(x)$ локально ограничена в точке $x_0\in M$, причем $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0$ такое, что $\forall\delta\in(0,\delta_1)$ и $\forall x\in\Delta_\delta(x_0)\cap M\subset U_{\delta_1}(x_0)\cap M\Rightarrow|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, но тогда $\forall x_1,x_2\in\Delta_\delta(x_0)\cap M$ имеем $|f(x_1)-f(x_2)|\le|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_0)-f(x_2)|<2\varepsilon$ т. е.

$$\omega(f;\Delta_\delta(x_0))=\sup_{x_1,x_2\in\Delta_\delta(x_0)\cap M}|f(x_1)-f(x_2)|\le2\varepsilon,$$

а потому $\forall\varepsilon>0$ и $\forall\delta\in(0,\delta_1(\varepsilon))$ получаем оценки

$$0\le\omega(f;x_0)\le\omega(f;\Delta_\delta(x_0))\le2\varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ имеем $\omega(f;x_0)=0$.

Достаточность. Пусть $f(x)$ локально ограничена в точке $x_0\in M$ и $\omega(f;x_0)=0$. Поскольку $\omega(f;x_0)=\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(f;\Delta_\delta(x_0))$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что $0\le\omega(f;\Delta_\delta(x_0))<\varepsilon$, но тогда $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall x\in U_\delta(x_0)\cap M\subset\Delta_\delta(x_0)\cap M$, т. е. $f\in C(x_0)$.

Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на интервале (a,b) и $x_0\in(a,b)$. Тогда, как было доказано, $\exists\lim\limits_{x\to x_0\pm0}f(x)=f(x_0\pm0)$, причем $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$, если $f(x)\uparrow$ на (a,b), и $f(x_0-0)\ge f(x_0)\ge f_0(x_0+0)$, если $f(x)\downarrow$ на (a,b). Пусть $f(x)\downarrow$ на (a,b), тогда $\forall\Delta_\delta(x_0)\subset(a,b)$ при $x_0\in(a,b)$ имеем $\omega(f;\Delta_\delta(x_0))=f(x_0+\delta)-f(x_0-\delta)$, и поэтому $\omega(f;x_0)=\lim\limits_{\delta\to+0}\omega(f;\Delta_\delta(x_0))=f(x_0+0)-f(x_0-0)$. Аналогично если $f(x)\downarrow$ на (a,b) и $x_0\in(a,b)$, то $\omega(f;x_0)=f(x_0-0)-f(x_0+0)$.

З а м е ч а н и е. Монотонная на интервале (a,b) функция может иметь разрывы только 1-го рода.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ монотонна на интервале (a,b) и $x_0 \in (a,b)$, то $(\omega(f;x_0)=0) \Leftrightarrow (f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0))$.

Из этого замечания в силу критерия непрерывности Бэра имеем:

Т е о р е м а (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть функция $f(x)$ монотонна на (a,b) и $x_0 \in (a,b)$. Тогда* $(f \in C(x_0)) \Leftrightarrow (f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0))$. В самом деле, в силу критерия непрерывности функции в точке имеем $f \in C(x) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x\to x_0\pm 0} f(x)=f(x_0)) \Leftrightarrow \omega(f;x_0)=0$ для монотонной функции.

Т е о р е м а (о мощности множества точек разрыва монотонной функции). *Пусть функция $f(x)$ монотонна на интервале (a,b). Тогда множество точек интервала (a,b), в которых функция $f(x)$ разрывна, не более чем счетно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $f(x) \uparrow$ на (a,b) и $M_{\mathcal{D}} \subset (a,b)$ – множество точек разрыва функции $f(x)$. Тогда $f(x-0) < f(+0)\ \forall x \in M_{\mathcal{D}}$. Любой точке $x \in M_{\mathcal{D}}$ поставим в соответствие рациональное число $q(x) \in \mathbf{Q}$ такое, что $f(x-0) < q(x) < f(x+0)$. Это возможно, поскольку множество $\mathbf{Q}$ плотно в $\mathbf{R}$. Пусть $x_1, x_2 \in M_{\mathcal{D}}$, $x_1 \neq x_2$. Для определенности, пусть $x_1 < x_2$, тогда $f(x_1-0) < q(x_1) < f(x_1+0) \leq f(x_2-0) < q(x_2) < f(x_2+0)$, т. е. $(x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow (q(x_1) \neq q(x_2))$. Тем самым установлена биекция $x \to q(x)$ между множеством $M_{\mathcal{D}}$ и подмножеством множества рациональных чисел $\mathbf{Q}$, которое не более чем счетно. Итак, множество $M_{\mathcal{D}}$ не более чем счетно.

§ 2. Локальные свойства функций, непрерывных в точке

Т е о р е м а (о сохранении знака). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $x_0 \in M$. Пусть $f \in C(x_0)$ и $f(x_0)>0$ (или $f(x_0)<0$). Тогда существуют постоянная $c>0$ и окрестность $U(x_0)$ такие, что $f(x)>c>0\ \forall x \in U(x_0)\cap M$ (соответственно $f(x)<-c<0\ \forall x \in U(x_0)\cap M$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in M$, $f(x_0)>0$ и $f \in C(x_0)$. Тогда $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x)=f(x_0)$, где $\mathbf{B}=\{B\}$ – базис фильтра в M с элементами $B=U(x_0)\cap M\ \forall U(x_0)$. Но тогда $\forall c>0$ такой, что $0<c<f(x_0)$, видим, что для $\varepsilon_0=f(x_0)-c>0$ существует окрестность $U(x_0)$ такая, что $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon_0\ \forall x \in U(x_0)\cap M = B \in \mathbf{B}$, т. е. $f(x)>f(x_0)-\varepsilon_0=c>0\ \forall x \in U(x_0)\cap M$.

Т е о р е м а (о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, $x_0 \in M$ и*

$f \in C(x_0)$. *Тогда функция* $f(x)$ *локально ограничена в точке* $x_0 \in M$.

Доказательство. Пусть $f \in C(x_0)$, где $x_0 \in M$, тогда $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = f(x_0)$, где $\mathbf{B} = \{B\}$ – база в M с элементами $B = U(x_0) \cap M$ $\forall U(x_0)$. Тогда для $\varepsilon_0 = 1 > 0$ $\exists U(x_0)$ такая, что $|f(x) - f(x_0)| < 1$ $\forall x \in U(x) \cap M = B \in \mathbf{B}$, т. е. $|f(x)| \leq |f(x_0)| + 1$ $\forall x \in B$, что и означает локальную ограниченность функции $f(x)$ в точке $x_0 \in M$.

Теорема (о непрерывности линейной функции). *Пусть* $f(x) = ax + b$ $\forall x \in M \subset \mathbf{R}$ *и* $x_0 \in M$. *Тогда* $f \in C(x_0)$.

Доказательство. Докажем, что существует $\lim\limits_{\mathbf{B}} f(x) = ax_0 + b$, где $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$ – база в M с элементами $B_\delta = U_\delta(x_0) \cap M$ $\forall \delta > 0$. В самом деле, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon/(|a| + 1) > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| = |a(x - x_0)| < |a|\ \ \delta < \varepsilon$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap M = B_\delta \in \mathbf{B}$, т. е. $f \in C(x_0)$.

Теорема (о непрерывности суммы непрерывных функций). *Пусть функции* $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *определены на множестве* M, $x_0 \in M$, $f_i \in C(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *и* λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – *постоянные. Тогда* $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) \in C(x_0)$, *где* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i\right)(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x)$ $\forall x \in M$.

Доказательство. Поскольку $f_i \in C(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = f_i(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где $\mathbf{B} = \{B\}$ – база в M с элементами $B = U(x_0) \cap M$ $\forall U(x_0)$. В силу теоремы о пределе суммы (по базе) имеем

$$\exists \lim_{\mathbf{B}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x_0), \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i \in C(x_0).$$

Теорема (о непрерывности произведения непрерывных функций). *Пусть функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *определены на множестве* M, $x_0 \in M$ *и* $f_i \in C(x_0)$ $(i = 1, 2)$. *Тогда* $f_1 \cdot f_2 \in C(x_0)$, *где* $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) f_2(x)$ $\forall x \in M$.

Доказательство. Поскольку $f_i \in C(x_0)$ $(i = 1, 2)$, то $\exists \lim\limits_{\mathbf{B}} f_i(x) = f_i(x_0)$ $(i = 1, 2)$, где $\mathbf{B}$ – база в M с элементами $B = U(x_0) \cap M$ $\forall U(x_0)$. Но тогда в силу теоремы о пределе произведения (по базе), доказательство которой проводится по схеме § 4 гл. 3, имеем

$$\exists \lim_{\mathbf{B}} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{\mathbf{B}} f_1(x) \cdot \lim_{\mathbf{B}} f_2(x) =$$

$$= f_1(x_0) \cdot f_2(x_0) \Rightarrow f_1 \cdot f_2 \in C(x_0).$$

Пример. Функция $f(x) = x^n$, $x \in (-\infty, +\infty)$, непрерывна $\forall x$ и $\forall n \in \mathbf{N}$. Более того, многочлен $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ непрерывен в любой точке $x \in (-\infty, +\infty)$.

Л е м м а. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* M, $x_0 \in M$ *и* $f \in C(x_0)$, *причем* $f(x_0) \neq 0$. *Тогда* $\dfrac{1}{f} \in C(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x_0 \in M \cap M'$ и $f(x_0) \neq 0$, тогда по теореме о знаке существуют $c > 0$ и окрестность $U(x_0)$ такие, что $|f(x)| > c > 0\ \forall x \in U(x_0) \cap M \Rightarrow 1/|f(x)| < 1/c\ \forall x \in U(x_0) \cap M$. Но тогда, применяя теорему о пределе дроби, имеем

$$\exists \lim_{x \to x_0} 1/f(x) = 1/f(x_0) \Rightarrow 1/f \in C(x_0).$$

Если $x_0 \in M$ – изолированная точка M, утверждение леммы очевидно.

П р и м е р. Функция f: $x \to 1/x$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $x \neq 0$, непрерывна в любой точке $x_0 \neq 0$.

Т е о р е м а (о непрерывности частного двух непрерывных функций). *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *определены на множестве* M, $x_0 \in M$ *и* $f, g \in C(x_0)$, *причем* $g(x_0) \neq 0$. *Тогда* $\dfrac{1}{f} \in C(x_0)$ (доказать самостоятельно).

Л е м м а. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* M *и* $f \in C(x_0)$, *где* $x_0 \in M$. *Пусть* $a_n \in M\ \forall n \in \mathbf{N}$ *и* $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$. *Тогда* $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C(x_0)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in U_{\delta(\varepsilon)}(x) \cap M$. Но $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = x_0$ ($a_n \in M \forall n \in \mathbf{N}$), и тогда для $\delta(\varepsilon) > 0\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $(a_n \in U_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap M \quad \forall n > N_0) \Rightarrow |f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $|f(a_n) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall n > N_0$, т. е. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

Т е о р е м а (о непрерывности композиции двух непрерывных функций). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* M, $x_0 \in M$ *и* $f \in C(x_0)$. *Пусть функция* $g(y)$ *определена на множестве* L *таком, что* $L \supset f(M)$ *и* $g \in C(y_0)$, *где* $y_0 = f(x_0)$. *Тогда* $g \circ f \in C(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $g \in C(y_0)$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon\ \forall y \in V_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \cap L$. Далее, поскольку $f \in C(x_0)$, то для выбранного (по $\varepsilon > 0$) $\delta(\varepsilon)\ \exists \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \delta(\varepsilon)\ \forall x \in U_{\eta(\varepsilon)}(x_0) \cap M$, откуда, полагая $y = f(x) \in f(M) \subset L$, $y_0 \in f(x_0) \in L$, имеем $|y - y_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow y \in V_{\delta(\varepsilon)}(y_0) \cap L$. Но в силу выбора $\delta(\varepsilon) > 0$ имеем $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ или (полагая $F(x) = g[f(x)]\ \forall x \in M$) $|g[f(x)] - g[f(x_0)]| = |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \eta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in U_{\eta(\varepsilon)}(x_0) \cap M$, т. е. $F = g \circ f \in C(x_0)$.

§ 3. Глобальные свойства числовых непрерывных функций

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $X \subset (-\infty, +\infty)$ *и* $M \subset X$. *Функция* $f(x)$, *определенная на множестве* X, *называется непрерывной на подмножестве* M *множества* X $(M \subset X)$, *если она непрерывна в каждой точке множества* M. Запись: $f \in C(M)$.

Таким образом, $f \in C(M)$, если при любом $x_0 \in M$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in U_\delta(x_0) \cap X$. При этом $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, т. е. выбор $\delta > 0$ зависит как от точки $x_0 \in M$, так и от $\varepsilon > 0$.

З а м е ч а н и е. При $M = X$ получаем определение функции, непрерывной на множестве X – ее области существования. Пусть $f : X \to \mathbf{R}$ и $M \subset X$. Рассмотрим $f_M : M \xrightarrow{f} \mathbf{R}$ – сужение функции $f(x)$ (определенной на множестве X) на подмножество $M \subset X$.

Т е о р е м а (о непрерывности сужения непрерывной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на множестве* X *и* $f_M(x)$ – *ее сужение на подмножество* $M \subset X$. *Тогда* $f \in C(X) \Rightarrow f_M \in C(M)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C(X)$ и $M \subset X$, то имеем, что $\forall x_0 \in M$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такое, что

$$(|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M \subset U_\delta(x_0) \cap X) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|f_M(x) - f_M(x_0)| < \varepsilon \forall x \in U_\delta(x_0) \cap M)),$$

откуда $f_M \in C(M)$.

З а м е ч а н и е. Из того, что $f_M \in C(M)$ (при $M \subset X$), вообще говоря, не следует, что $f \in C(X)$ (и даже не следует, что $f \in C(M)$). Например, при $X = \mathbf{R}$, $M = \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbf{Q}, \\ 0, x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$ Тогда функция $f(x)$ разрывна в любой точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$, хотя ее сужение на $\mathbf{Q}$, т. е. $f_Q(x) = 1$ $\forall x \in \mathbf{Q}$ непрерывна на $\mathbf{Q}$.

О п р е д е л е н и е. *Множество* $M \subset \mathbf{R}$ *называется (линейно) связным, если* $(\forall x_1, x_2 \in M, x_1 \le x_2) \Rightarrow ([x_1, x_2] \subset M)$.

Следующая теорема устанавливает структуру связных множеств на числовой прямой.

Т е о р е м а. *Любое связное множество числовой прямой является либо отрезком, либо интервалом, либо полуинтервалом:* $[a, b]$; (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ связно. Положим $a = \inf M$ и $b = \sup M$ (заметим, что $a = -\infty$, если множество M не ограничено снизу в $\mathbf{R}$, и $b = +\infty$, если множество M не ограничено сверху в $\mathbf{R}$).

Рассмотрим случаи: 1) $-\infty < a \le b < +\infty$. Тогда если $a \in M$ и $b \in M$, то в силу определения (линейной связности) множества M

$[a, b] \subset M$. Далее, поскольку $a = \inf M$ и $b = \sup M$, то не существует точек $x_1, x_2 \in M$ таких, что $x_1 < a$ и $x_2 > b$, т. е. $[a, b] \supset M$, откуда и вытекает равенство $M = [a, b]$. Далее, если $a \in M$, но $b \overline{\in} M$, то, в силу определения $b = \sup M$, $\forall x_0 \in \mathbf{R}$, такого, что $a < x_0 < b$, $\exists x_1 \in M$, для которого имеем $x_0 < x_1 < b$. Но в силу связности множества M : $[a, x_1] \subset M$, и поэтому $x_0 \in M$, т. е. $M = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\} = [a, b)$.

Аналогично если $a \overline{\in} M$, но $b \in M$, то $M = (a, b]$, и, наконец, если $a \overline{\in} M$ и $b \overline{\in} M$, то $M = (a, b)$.

2) $-\infty < a < b = +\infty$. Тогда $M = [a, +\infty)$ при $a \in M$ и $M = (a, +\infty)$ при $a \overline{\in} M$.

3) $-\infty = a < b < +\infty$. Тогда $M = (-\infty, b]$ при $b \in M$ и $M = (-\infty, b)$ при $b \overline{\in} M$.

4) $-\infty = a < b = +\infty$. Тогда $M = (-\infty, +\infty)$.

Т е о р е м а (о нуле непрерывной функции). *Пусть* $f \in C([a, b])$ *и* $f(a) \cdot f(b) < 0$. *Тогда существует* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f(c) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о, основанное на принципе полноты $\mathbf{R}$ Кантора. Пусть $\Delta_0 = [a, b]$, $f \in C(\Delta_0)$ и, для определенности, $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$. Доказательство проведем методом «деления пополам». Разделим отрезок Δ_0 пополам и обозначим середину отрезка Δ_0 через c_0. Возможны три случая: 1) $f(c_0) = 0$, и тогда теорема доказана при $c = c_0 \in (a, b)$; 2) $f(c_0) > 0$ или 3) $f(c_0) < 0$. В случаях 2) и 3) выберем ту из половин Δ_0 (обозначив ее через $\Delta_1 = [a_1, b_1]$), для которой $f(a_1) > 0$ и $f(b_1) < 0$. Тогда

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 = [a_1, b_1], |\Delta_1| = (b - a)/2, f(a_1) > 0, f(b_1) < 0.$$

Продолжая процесс, делим отрезок Δ_1 пополам и т. д. Наш процесс либо оборвется, т. е. для середины c_{n-1} отрезка $\Delta_{n-1} = [a_{n-1}, b_{n-1}]$ будем иметь $f(c_{n-1}) = 0$ (и тогда теорема доказана при $c = c_{n-1}$), либо $\forall n \geq 0$ имеем

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_{n-1} \supset \Delta_n;$$

$$|\Delta_n| = (b - a)/2^n, \Delta_n = [a_n, b_n],$$

$$f(a_n) > 0, f(b_n) < 0.$$

Вложенная система отрезков $\{\Delta_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ является стягивающейся, поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} |\Delta_n| = \lim\limits_{n \to +\infty} (b - a)/2^n = 0$. По теореме Кантора для стягивающейся системы отрезков следует, что существует $c \in \Delta_0$ такое, что $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} \Delta_n = \{c\}$, причем $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n = c$, $a_n \leq c \leq b_n$ $\forall n \geq 0$. Поскольку $f \in C([a, b])$ и $f(a_n) > 0$, $f(b_n) < 0$ $\forall n \in \mathbf{N_0}$, то, используя лемму из § 2 и теорему о предельном переходе в неравенствах, имеем

$$f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \geq 0, f(c) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \leq 0, \text{ т. е. } f(c) = 0,$$

причем, учитывая неравенства $f(a) > 0$ и $f(b) < 0$, получаем $a < c < b$.

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} -1, x \in [-1, 0), \\ 1, x \in [0, 1]. \end{cases}$ Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-1, 1]$, и хотя $f(-1) < 0$ и $f(1) > 0$, не существует точки $c \in (-1, 1)$ такой, что $f(c) = 0$.

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} -1, x \in [0, 1], \\ 1, x \in [2, 3]. \end{cases}$ Множество $M = [0, 1] \cup [2, 3]$, являющееся областью определения функции $f(x)$, не связно, $f \in C(M)$, и хотя $f(0) < 0$, $f(3) > 0$, не существует точки $c \in M$ такой, что $f(c) = 0$.

Замечание. Если в условиях теоремы о нуле непрерывной функции заменить отрезок на несвязное множество $M \subset (-\infty, +\infty)$, то теорема перестает быть верной.

Следствие. Пусть $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$, $a_0 \neq 0$ и n нечетно. Тогда существует $c \in (-\infty, +\infty)$ такое, что $\mathcal{P}_n(c) = 0$, т. е. многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по меньшей мере один действительный корень.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $a_0 = 1$, в противном случае нужно рассматривать многочлен $Q_n(x) = \mathcal{P}_n(x)/a_0$. Поскольку

$$\mathcal{P}_n(x) - x^n = \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = \begin{cases} o(x^n)(x \to -\infty), \\ o(x^n)(x \to +\infty), \end{cases}$$

то $\mathcal{P}_n \sim x^n (x \to -\infty)$ и $\mathcal{P}_n \sim x^n (x \to +\infty)$. Но при нечетном n имеем $x^n < 0 \ \forall x < 0$ и $x^n > 0 \ \forall x > 0$. По теореме о знаке для эквивалентных функций из § 9 гл. 3 имеем: 1) поскольку $\mathcal{P}_n \sim x^n (x \to -\infty)$, то $\exists c_1 > 0$ такое, что $\mathcal{P}_n(x) < 0 \ \forall x \in (-\infty, -c_1)$, и, в частности, $\exists x_1 \in (-\infty, c_1)$ такое, что $\mathcal{P}_n(x_1) < 0$; 2) поскольку $\mathcal{P}_n \sim x^n (x \to +\infty)$, то $\exists c_2 > 0$ такое, что $\mathcal{P}_n(x) > 0 \ \forall x \in (c_2, +\infty)$, и, в частности, $\exists x_2 \in (c_2, +\infty)$ такое, что $\mathcal{P}_n(x_2) > 0$. Итак, $\exists x_1, x_2$ такие, что $x_1 < x_2$, $\mathcal{P}_n \in C([x_1, x_2])$, $\mathcal{P}_n(x_1) < 0$, $\mathcal{P}_n(x_2) > 0$. Тогда по теореме о нуле непрерывной функции $\exists c \in (x_1, x_2)$ такое, что $\mathcal{P}_n(c) = 0$.

Теорема Больцано (о промежуточных значениях непрерывной функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $f \in C([a, b])$ и $f(a) \neq f(b)$ (например, $f(a) = A < B = f(b)$). Тогда для любого числа C, находящегося между $f(a)$ и $f(b)$, $(A < C < B)$ $\exists c \in (a, b)$ такая, что $f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть $f \in C([a, b])$, $f(a) = A < B = f(b)$ и $A < C < B$ $(\forall C)$. Фиксируя C, рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - C$. Тогда имеем $F \in C([a, b])$, $F(a) = f(a) - C = A - C < 0$, $F(b) = f(b) - C = B - C > 0$, и по теореме о нуле непрерывной функции $\exists c \in (a, b)$ такое, что $F(c) = 0$, т. е. $f(c) = C$.

Т е о р е м а (о сохранении связности при непрерывном отображении). *Пусть функция* $f(x)$ *определена на связном множестве* $M \subset (-\infty, +\infty)$. *Тогда если* $f \in C(M)$, *то множество* $f(M)$ *связно в* $\mathbf{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество M (линейно) связно в $\mathbf{R}$, $f \in C(M)$ и $Y = f(M) \subset \mathbf{R}$. Для доказательства (линейной) связности множества Y в $\mathbf{R}$ нужно показать, что $\forall A, B \in Y$ таких, что $A < B \Rightarrow [A, B] \subset Y$ или, что $C \in Y$ $\forall C \in (A, B)$. Но если $A < B$ и $A, B \in Y = f(M)$, то существуют $a, b \in M$, для которых имеем $f(a) = A$ и $f(b) = B$. Пусть для определенности $a < b$ (равенство $a = b$ при $A < B$ невозможно в силу однозначности отображения $f : M \to Y$). Тогда в силу связности (линейной) множества M в $\mathbf{R}$ имеем $[a, b] \subset M$ и по теореме Больцано о промежуточных значениях непрерывной функции $\exists c \in (a, b) \subset M$ такое, что $f(c) = C$. Но $f(c) \in f(M) = Y$, т. е. $C \in Y$. Итак, множество $Y = f(M)$ (линейно) связно в $\mathbf{R}$.

Т е о р е м а В е й е р ш т р а с с а (об ограниченности функции, непрерывной на отрезке). *Пусть* $f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$. *Если* $f \in C([a, b])$, *то функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[a, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C([a, b])$, то $f \in C(x_0)$ $\forall x_0 \in [a, b]$. Но в силу локальных свойств непрерывной функции $f(x)$ локально ограничена в точке $x_0 \in [a, b]$, т. е. существуют постоянная $K(x_0) > 0$ и окрестность $U(x_0)$ такие, что $|f(x)| \leq K(x_0)$ $\forall x \in U(x_0) \cap [a, b]$. Заметим, что $[a, b] \subset \bigcup\limits_{x \in [a,b]} U(x)$, т. е. система интервалов $\{U(x); x \in [a, b]\}$ есть покрытие отрезка $[a, b]$. По лемме Бореля – Лебега отрезок $[a, b]$ компактен, т. е. существует конечное подпокрытие отрезка $[a, b]$ интервалами из системы $\{U(x)\}$, т. е. $\exists x_i \in [a, b]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $[a, b] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} U(x_i)$. Заметим, что при $i = 1, 2, \ldots, n$ каждой окрестности $U(x_i)$ соответствует в силу построения такая постоянная $K(x_i) > 0$, что $|f(x)| \leq K(x_i)$ $\forall x \in U(x_i) \cap [a, b]$. Положим $K = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} K(x_i) > 0$, тогда $\forall x \in [a, b]$ $\exists m$ $(1 \leq m \leq n)$ такое, что $x \in U(_m)$, а потому $|f(x)| \leq K(x_m) \leq K$. Итак, $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in [a, b]$, т. е. функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Если в условиях теоремы Вейерштрасса отрезок $[a, b]$ заменить на интервал (a, b), то теорема перестает быть верной.

П р и м е р. Пусть $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1)$, тогда $f \in C((0, 1))$, но функция $f(x) = 1/x$ не является ограниченной на интервале $(0, 1)$.

З а м е ч а н и е. В теореме Вейерштрасса нельзя отказаться и от условия $f \in C([a, b])$. Например, при

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

функция $f(x)$ не непрерывна на $[0,1]$ и не ограничена на отрезке $[0,1]$.

Теорема Вейерштрасса (о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных верхней и нижней граней). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$ и $f \in C([a,b])$. Пусть $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ и $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Тогда существуют $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$.*

Доказательство. Поскольку $f \in C([a,b])$, то по предыдущей теореме Вейерштрасса функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$, и поэтому точные грани M и m конечны. В силу определения точной верхней грани $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ имеем $f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$, но $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x_0 \in [a,b]$ такое, что $M - \varepsilon < f(x_0) \le M$. Поэтому $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists \alpha_n \in [a,b]$ такое, что $M - 1/n < f(\alpha_n) \le M$. По теореме Больцано – Вейерштрасса из ограниченной последовательности (α_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (α_{n_k}), $a \le \alpha_{n_k} \le b$, $k \in \mathbf{N}$, так, что существует x_1 такое, что $\lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_{n_k} = x_1$, при этом, очевидно, $x_1 \in [a,b]$. Поскольку $f \in C([a,b])$, то $f \in C(x_1)$, и поэтому $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} f(\alpha_{n_k}) = f(x_1)$, но $M - 1/n_k < f(\alpha_{n_k}) \le M$ $\forall k \in \mathbf{N}$, переходя к пределу в этом неравенстве (при $k \to +\infty$), имеем $M \le f(x_1) \le M$, т. е. $f(x_1) = M$, где $x_1 \in [a,b]$. Аналогично доказывается, что $\exists x_2 \in [a,b]$ такая, что $f(x_2) = m$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M. Тогда точка $x_0 \in M$ называется точкой максимума функции $f(x)$ на множестве M, если $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in M$.* Значение $f(x_0)$ называется при этом максимумом функции $f(x)$ на множестве M и обозначается $f(x_0) = \max\limits_{M} f(x)$. Аналогично определяются точка минимума и минимум функции $f(x)$ на множестве M ($\min\limits_{M} f(x)$).

Следствие. Функция, непрерывная на отрезке, имеет на этом отрезке максимум и минимум.

Замечание. В теореме Вейерштрасса (о максимуме и минимуме) нельзя (в условиях) заменить отрезок на интервал.

Пример. Пусть $f(x) = 1/x$, $x \in (0,1)$, тогда $f \in C((0,1))$, но $M = \sup\limits_{x \in (0,1)} (1/x) = +\infty$.

Пример. Пусть $f(x) = x$, $x \in (0,1)$, тогда $M = 1$ и $m = 0$, но не существует точек $x_1, x_2 \in (0,1)$ таких, что $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = 0$.

Замечание. В теореме Вейерштрасса (о максимуме и минимуме) нельзя отказаться и от условия $f \in C([a,b])$.

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ тогда $M = \sup\limits_{[0,1]} f(x) = 1$, но не существует точки $x_1 \in [0,1]$ такой, что $f(x_1) = 1$.

Теорема (о Д-свойстве (свойстве Дарбу) для непрерывной

функции). *Непрерывный образ отрезка есть отрезок.*

Доказательство. Пусть $f \in C([a,b])$. Тогда по теореме Вейерштрасса о достижениях максимума и минимума существуют $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = M$, $f(x_2) = m$, где $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$. Отрезок $[a,b]$ есть связное множество в $\mathbf{R}$, и по теореме о сохранении связности при непрерывном отображении следует, что множество $f([a,b])$ (линейно) связно в $\mathbf{R}$. Поэтому из $m, M \in f([a,b])$ следует, что $[m,M] \subset f([a,b])$, но $m \le f(x) \le M$ $\forall x \in [a,b]$, т. е. $[m,M] \supset f([a,b])$. Таким образом, $f([a,b]) = [m,M]$, т. е. образ отрезка есть отрезок.

Замечание. В случае $m = M$ отрезок $[m,M]$ вырождается в точку. Так будет для постоянной функции $f(x) = c$ $\forall x \in [a,b]$.

Замечание. Итак, доказано: если $f \in C(A)$, где множество A связно в $\mathbf{R}$, то функция $f(x)$ обладает свойством Дарбу, т. е. $(\forall [a,b] \subset A) \Rightarrow f([a,b])$ – отрезок. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, так как существуют разрывные на связном множестве функции, обладающие свойством Дарбу.

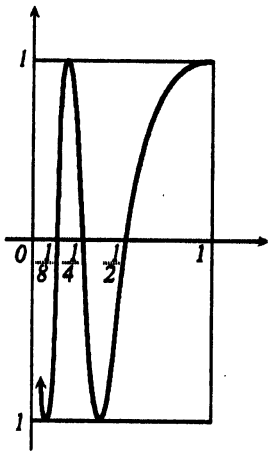


Рис. 7

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi/2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Тогда (рис. 7) $\forall [a,b] \subset [0,1]$ образ $f([a,b])$ есть отрезок, и, в частности, $f([0,1]) = [-1,1]$, однако функция $f(x)$ разрывна при $x = 0$.

Теорема (критерий непрерывности монотонной функции). *Пусть функция $f(x)$ определена и монотонна на связном множестве $M \subset \mathbf{R}$. Тогда $(f \in C(M)) \Leftrightarrow$ (функция $f(x)$ обладает на множестве M свойством Дарбу).* (Попробуйте доказать самостоятельно.)

Доказательство. Необходимость. Если $f \in C(M)$, то из теоремы Дарбу вытекает, что функция $f(x)$ обладает Д-свойством.

Достаточность. Пусть для определенности $f \uparrow$ на M и обладает на связном в $\mathbf{R}$ множестве M свойством Дарбу. Поскольку M (линейно) связно в $\mathbf{R}$, то множество M есть либо отрезок $[a,b]$, либо полуинтервал $[a,b)$ или $(a,b]$, либо интервал (a,b) (при этом полуинтервал или интервал могут быть неограниченными).

Пусть для определенности $M = (a,b]$. Покажем, что $\forall x_0 \in (a,b]$ имеют место равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ и $f(x_0) = f(x_0 + 0)$ (если $x_0 \ne b$). Докажем, например, равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Итак, $x_0 \in (a,b]$.

Пусть $x_1 \in (a, x_0)$. Поскольку $f(x) \uparrow$ на $(a, b]$, то $f(x_1) \leq f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$. Если при этом $f(x_1) = f(x_0)$, то равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ доказано.

Пусть $f(x_1) < f(x_0)$. В силу монотонного возрастания функции $f(x)$ на $(a, b]$ и свойства Дарбу имеем $f([x_1, x_0]) = [f(x_1), f(x_0)]$. Но тогда $\forall \varepsilon > 0$ такого, что $f(x_1) < f(x_0) - \varepsilon < f(x_0)$, имеем $f(x_0) - \varepsilon \in f([x_1, x_0])$, т. е. существует $x_2 \in (x_1, x_0)$ такое, что $f(x_2) = f(x_0) - \varepsilon$. Но тогда $\forall x \in (x_2, x_0) \subset M \Rightarrow f(x_0) - \varepsilon = f(x_2) \leq f(x) \leq f(x_0)$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to x_0 - 0$, получаем $f(x_0) - \varepsilon \leq f(x_0 - 0) \leq f(x_0)$ и в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем равенство $f(x_0 - 0) = f(x_0)$. Аналогично доказывается равенство $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, если $x_0 \neq b$. Итак, $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$ $\forall x_0 \in M$, т. е. в силу ранее доказанного критерия непрерывности монотонной функции $f \in C(x_0)$ $\forall x_0 \in M$, т. е. $f \in C(M)$.

О п р е д е л е н и е. *Функция $f(x)$, определенная на множестве $M \subset (-\infty, +\infty)$, называется равномерно непрерывной на множестве M, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x_1, x_2 \in M$, для которых $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.*

Подчеркнем, что $\delta(\varepsilon) > 0$ в определении равномерной непрерывности функции $f(x)$ на множестве M зависит только от $\varepsilon > 0$ и не зависит от выбора точек $x_1, x_2 \in M$.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве M, то $f \in C(M)$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Напомним определение $f \in C(M)$ для функции $f(x)$, заданной на множестве M : $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall x_0 \in M$ $\exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ такое, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\forall x \in M \cap U_\delta(x_0)$. В этом определении величина $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ зависит не только от $\varepsilon > 0$, но и от выбора точки $x_0 \in M$.

П р и м е р. Пусть $f(x) = 1/x$, $x \in (0, 1]$, тогда $f \in C((0, 1])$, но функция $x \to 1/x$ не является равномерно непрерывной на $(0, 1]$, так как $\exists \varepsilon_0 = 1 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ $\exists x_n^{(1)} = 1/n$, $x_n^{(2)} = 1/(n+1)$, для которых при любом $n > 2/\delta$ $|x_n^{(1)} - x_n^{(2)}| < 2/n < \delta$, но

$$|f(x_n^{(1)}) - f(x_n^{(2)})| = |1/x_n^{(1)} - 1/x_n^{(2)}| = |(n+1) - n| = 1 = \varepsilon_0 > 0.$$

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и $f \in C(M)$. Функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на множестве M, если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall \delta > 0$ существует пара точек $x_\delta^{(1)}, x_\delta^{(2)} \in M$ таких, что $|x_\delta^{(1)} - x_\delta^{(2)}| < \delta$, но $|f(x_\delta^{(1)}) - f(x_\delta^{(2)})| \geq \varepsilon_0 > 0$.*

Т е о р е м а К а н т о р а (о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и $f \in C([a, b])$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Допустим, что $f \in C([a,b])$, но при этом функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на отрезке $[a,b]$. Тогда $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall n \in \mathbf{N}$ существует пара точек $\alpha_n, \beta_n \in [a,b]$ таких, что $|\alpha_n - \beta_n| < 1/n$, но $|f(\alpha_n) - f(\beta_n)| \geq \varepsilon_0 > 0$.

Рассмотрим числовую последовательность (α_n). Поскольку $a \leq \alpha_n \leq b \; \forall n \in \mathbf{N}$, то последовательность (α_n) ограничена и в силу теоремы Больцано – Вейерштрасса существует сходящаяся подпоследовательность $(\alpha_{n_k}) \lim\limits_{k \to +\infty} \alpha_{n_k} = x_0$, причем $a \leq \alpha_{n_k} \leq b \; \forall k \Rightarrow x_0 \in [a,b]$. Заметим также, что $\forall k \in \mathbf{N}$ имеем

$$|\beta_{n_k} - x_0| \leq |\alpha_{n_k} - x_0| + |\beta_{n_k} - \alpha_{n_k}| < |\alpha_{n_k} - x_0| + 1/n_k,$$

откуда вытекает, что $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} \beta_{n_k} = x_0$. Но $f \in C([a,b]) \Rightarrow f \in C(x_0)$, поэтому $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} f(\alpha_{n_k}) = \lim\limits_{k \to +\infty} f(\beta_{n_k}) = f(x_0)$ и, в частности, переходя к пределу при $k \to +\infty$ в неравенстве $|f(\alpha_{n_k}) - f(\beta_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$, имеем $|f(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0 > 0$. Противоречие.

Замечание. Ранее рассмотренный пример показывает, что в условиях теоремы Кантора нельзя заменить отрезок на полуинтервал.

Замечание. В условиях теоремы Кантора нельзя заменить отрезок на неограниченное связное множество $[a, +\infty)$.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in [0, +\infty)$, тогда $f \in C([0, +\infty))$, но для $\varepsilon_0 = 1 > 0$ и $\forall \delta > 0 \; \exists x_n^{(1)} = \sqrt{n}$, $x_n^{(2)} = \sqrt{n+1}$ так, что при любом $n > 1/\delta^2 \Rightarrow |x_n^{(2)} - x_n^{(1)}| = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 1/(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) < 1/\sqrt{n} < \delta$, $|f(x_n^{(2)}) - f(x_n^{(1)})| = |(n+1) - n| = 1 = \varepsilon_0 > 0$, т. е. функция $x \to x^2$ не является равномерно непрерывной на $[0, +\infty)$.

Замечание. В условиях теоремы Кантора отрезок можно заменить на любое секвенциально компактное или компактное (в $\mathbf{R}$) множество. Напомним определение из § 2 гл. 1.

Определение. *Пусть $M \subset \mathbf{R}$, $L \subset \mathbf{R}$ и функция $f : M \to L$ есть биекция. Пусть $y \in L = f(M)$, тогда полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит из единственной точки $x \in M$, такой, что $f(x) = y$. Если ввести функцию $f^{-1} : y \to x = f^{-1}(y)$, то она отображает множество L на множество M взаимно однозначно и называется обратной биекцией. При этом имеют место соотношения*

$$f^{-1}(f(x)) = x \, \forall x \in M = f^{-1}(L) \text{ и } f(f^{-1}(y)) = y \, \forall y \in L = f(M).$$

Определение. *Гомеоморфизмом множества $M \subset \mathbf{R}$ на множество $L \subset \mathbf{R}$ называется любая биекция M на L, непрерывная вместе со своей обратной биекцией.*

Итак, если биекция $f : M \to L$ осуществляет гомеоморфизм M на L, то $f \in C(M)$ и $f^{-1} \in C(L)$.

Т е о р е м а (о существовании и непрерывности обратной функции для строго монотонной непрерывной функции). *Пусть функция* $f(x)$ *определена, строго монотонна и непрерывна на промежутке* $|a,b|$ *(являющемся интервалом, полуинтервалом или отрезком числовой прямой). Тогда: 1) отображение* $f : |a,b| \to f(|a,b|)$ *есть биекция, причем множество* $f(|a,b|)$ *есть промежуток* $|\alpha,\beta|$ *и обратная биекция* $f^{-1} : |\alpha,\beta| \to |a,b|$ *есть строго монотонная функция на* $|\alpha,\beta|$*; 2) образ* $f(|a,b|) = |\alpha,\beta|$ *есть промежуток в* $\mathbf{R}$ *того же вида, что и промежуток* $|a,b|$ *(так что, например, при*

$$f \uparrow\uparrow \text{ на } |a,b| : (\alpha \in |\alpha,\beta|) \Leftrightarrow (a \in |a,b|);\ (\beta \in |\alpha,\beta|) \Leftrightarrow (b \in |a,b|));$$

3) обратная биекция $f^{-1} \in C(|\alpha,\beta|)$*, т. е. биекция* $f : |a,b| \to |\alpha,\beta|$ *осуществляет гомеоморфизм промежутка* $|a,b|$ *на промежуток* $|\alpha,\beta|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем для определенности считать, что $f(x) \uparrow\uparrow$ на $|a,b|$. Доказательство теоремы проведем поэтапно.

1) Поскольку промежуток $|a,b|$ есть (линейно) связное в $\mathbf{R}$ множество, то из условия $f \in C(|a,b|)$ в силу теоремы о сохранении связности (при непрерывном отображении) вытекает, что образ $f|a,b|$ есть (линейно) связное множество в $\mathbf{R}$, т. е. $f(|a,b|) = |\alpha,\beta|$, где $|\alpha,\beta|$ – промежуток в $\mathbf{R}$. Докажем, что отображение $f : |a,b| \to |\alpha,\beta|$ есть биекция, для чего покажем, что $\forall x_1, x_2 \in |a,b|\ f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Допустим от противного, что существуют $x_1, x_2 \in |a,b|$ такие, что $x_1 < x_2$, но $f(x_1) = f(x_2)$. В силу условия $f \uparrow\uparrow$ на $|a,b|$ имеем $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in |a,b|) \Rightarrow (f(x_1) < f(x_2))$. Противоречие.

Итак, отображение $f : |a,b| \to |\alpha,\beta|$ есть биекция, а потому существует обратная биекция $f^{-1} : |\alpha,\beta| \to |a,b|$.

Докажем, что $f^{-1}(y) \uparrow\uparrow$ на $|\alpha,\beta|$. Пусть $y_1, y_2 \in |\alpha,\beta|$ и $y_1 < y_2$. Тогда существуют $x_1, x_2 \in |a,b|$ такие, что $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$, так что $x_1 = f^{-1}(y_1)$ и $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Поскольку отображение f есть биекция, то $y_1 \neq y_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$. Неравенство $x_1 > x_2$ невозможно, так как тогда из условия $f(x) \uparrow\uparrow$ на $|a,b|$ имели бы $f(x_1) = y_1 > y_2 = f(x_2)$ вопреки предположению.

Итак, $x_1 < x_2$, т. е. $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Тем самым показано, что $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)\ \forall y_1, y_2 \in |\alpha,\beta|$, $y_1 < y_2$, т. е. $f^{-1}(y) \uparrow\uparrow$ на $|\alpha,\beta|$.

2) Докажем теперь, что $\alpha \in |\alpha,\beta| \Leftrightarrow a \in |a,b|$. Пусть $a \in |a,b|$, тогда $y_0 = f(a) \in |\alpha,\beta|$. Если $\alpha \neq y_0$, то, поскольку $\alpha = \inf|\alpha,\beta|$ имеем $\alpha < y_0$. Но тогда в силу определения точной нижней грани $\exists y_1 \in f(|a,b|)$ такое, что $\alpha \leq y_1 < y_0$. Но $y_1 \in f(|a,b|)$, т. е. $\exists x_1 \in |a,b|$ такое, что $f(x_1) = y_1$. По доказанному в п. 1) обратная биекция $f^{-1} \uparrow\uparrow$ на $|\alpha,\beta|$, поэтому из $y_1 = f(x_1) < y_0 = f(a)$ $\Rightarrow x_1 < a = \inf|a,b|$, что невозможно, поскольку $x_1 \in |a,b|$. Итак, $f(a) = \alpha$, т. е. $\alpha \in f(|a,b|) = |\alpha,\beta|$. Утверждение $a \in |a,b| \Rightarrow \alpha \in |\alpha,\beta|$

доказано. Обратное утверждение $\alpha \in |\alpha, \beta| \Rightarrow a \in |a, b|$ доказывается аналогично с использованием условия $f(x) \uparrow\uparrow$ на $|a, b|$. (Провести это доказательство самостоятельно.) Итак, если $f(x) \uparrow\uparrow$ на $|a, b|$, то $(\alpha \in |\alpha, \beta|) \Leftrightarrow (\alpha \in |a, b|)$; $(\beta \in |\alpha, \beta|) \Leftrightarrow (\beta \in |a, b|)$ (что доказывается аналогичным образом). Но тогда промежуток $|\alpha, \beta|$ имеет тот же вид (интервал, полуинтервал или отрезок), что и промежуток $|a, b|$.

3) Докажем теперь, что $f^{-1} \in C(y_0)\ \forall y_0 \in |\alpha, \beta|$. Пусть $x_0 = f^{-1}(y_0) \in |a, b|$. Пусть сначала x_0 – внутренняя точка промежутка $|a, b|$, т. е. существует интервал $(x_1, x_2) \subset |a, b|$ такой, что $x_0 \in (x_1, x_2)$. По доказанному выше в п. 2) образ любого интервала из $|a, b|$ при биекции f есть интервал, лежащий в промежутке $|\alpha, \beta|$. Но тогда $\forall \varepsilon > 0$ такого, что $U_\varepsilon(x_0) \subset (x_1, x_2) \subset |a, b|$, имеем $f(U_\varepsilon(x_0)) = V(y_0) \subset |\alpha, \beta|$, причем поскольку f есть биекция окрестности $U_\varepsilon(x_0)$ на окрестность $V(y_0)$, то имеем

$$f^{-1}(V(y_0)) = U_\varepsilon(x_0),$$

и поэтому $x = f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(x_0)\ \forall y \in V(y_0)$.

Итак, для любой окрестности $U_\varepsilon(f^{-1}(y_0)) \subset (x_1, x_2)$ существует окрестность $V(y_0) \subset |\alpha, \beta|$ такая, что $f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))\ \forall y \in V(y_0)$, т. е. $f^{-1} \in C(y_0)$.

Пусть теперь $x_0 = f^{-1}(y_0) \in |a, b|$ – граничная точка промежутка $|a, b|$, например $x_0 = a$, тогда, как было показано в п. 2), $y_0 = f(a) = \alpha \in |\alpha, \beta|$ и, кроме того, биекция f переводит любой полуинтервал $[x_0, x_1) \subset |a, b|$ в полуинтервал $[y_0, y_1)$, содержащийся в промежутке $|\alpha, \beta|$. Но тогда $\forall \varepsilon > 0$ такого, что $x_0 + \varepsilon < b$, имеем $f([x_0, x_0 + \varepsilon)) = [y_0, y_0 + \delta) \subset |\alpha, \beta|$, причем поскольку f – биекция, то $f^{-1}([y_0, y_0 + \delta)) = [x_0, x_0 + \varepsilon)$ и $x = f^{-1}(y) \in [x_0, x_0 + \varepsilon)\ \forall y \in V_\delta(y_0) \cap |\alpha, \beta| = [y_0, y_0 + \delta)$.

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $(x_0 + \varepsilon < b)$ $\exists \delta > 0$ такое, что $f^{-1}(y) \in U_\varepsilon(f^{-1}(y_0))$ $\forall y \in V_\delta(y_0) \cap |\alpha, \beta|$, т. е. $f^{-1} \in C(y_0)$.

Таким образом, $f^{-1} \in C(y_0)\ \forall y \in |\alpha, \beta|$, т. е. $f^{-1} \in C(|\alpha, \beta|)$.

З а м е ч а н и е. В силу п. 2) доказательства теоремы об обратной функции следует, что отображение $x \to f(x)$ переводи любую внутреннюю точку $x_0 \in |a, b|$ во внутреннюю точку $y_0 = f(x_0) \in f(|a, b|)$ и обратно, отображение $y \to f^{-1}(y)$ переводит любую внутреннюю точку $y_0 \in f(|a, b|)$ во внутреннюю точку $x_0 \in f^{-1}(y_0) \in |a, b|$, а потому при гомеоморфизме f промежутка $|a, b|$ на промежуток $|\alpha, \beta|$ граничные точки (если они есть) переходят в граничные.

Т е о р е м а (о гомеоморфизме). *Пусть $|a, b|$ – промежуток из* $\mathbf{R}$. *Для того чтобы биекция f промежутка $|a, b|$ на $f(|a, b|)$ была гомеоморфизмом, необходимо и достаточно чтобы f была строго монотонной и непрерывной на $|a, b|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность следует из теоремы об обратной функции.

Необходимость. Пусть отображение $x \to f(x)$ осуществляет гомеоморфизм промежутка $|a,b|$ на $f(|a,b|)$. Тогда отображение $f : |a,b| \to f(|a,b|)$ есть биекция, причем $f \in C(|a,b|)$. Докажем, что отображение $f : x \to f(x)$ строго монотонно на $|a,b|$. Допустим от противного, что функция $f(x)$ не является монотонной на $|a,b|$. Тогда существуют $x_1, x_2, x_3 \in |a,b|$ такие, что $x_1 < x_2 < x_3$, причем $f(x_2)$ не заключено между $f(x_1)$ и $f(x_3)$. Пусть, например, $f(x_2) \geq f(x_1)$ и $f(x_2) \geq f(x_3)$. Поскольку f биективно отображает $|a,b|$ на $f(|a,b|)$, то $(x_1 \neq x_3) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_3))$.

Допустим, что $f(x_1) < f(x_3)$. Но $(x_2 \neq x_3) \Rightarrow (f(x_2) \neq f(x_3))$, так что $(f(x_2) \geq f(x_3)) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_3))$. Таким образом, $f(x_2) > f(x_3) > f(x_1)$. Поскольку $f \in C(|a,b|) \Rightarrow f \in C([x_1,x_2])$, то в силу теоремы Больцано (о промежуточных значениях непрерывной функции) $\exists x_0 \in (x_1,x_2)$ такое, что $f(x_0) = f(x_3)$, причем, очевидно, $x_0 \neq x_3$. Противоречие со взаимной однозначностью отображения $f : |a,b| \to f(|a,b|)$. Итак, функция $f(x)$ монотонна на промежутке $|a,b|$, и в силу биективности отображения f функция $f(x)$ строго монотонна.

Замечание. Если $f : |a,b| \to f(|a,b|)$ есть гомеоморфизм, то в силу теоремы об обратной функции образ $f(|a,b|)$ есть промежуток $|\alpha,b|$ того же вида, что и $|a,b|$.

Замечание. Если отображение $x \to f(x)$ есть биекция $|a,b|$ на $f(|a,b|)$, но $f \overline{\in} C(|a,b|)$, то функция $f(x)$ может и не быть строго монотонной на $|a,b|$.

Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1-x, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ тогда существует $f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & y \in \mathbf{Q}, \\ 1-y, & y \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}, \end{cases}$ при этом функция $f(x)$ является биекцией $(-\infty,+\infty)$ на $(-\infty,+\infty)$, не будучи ни непрерывной, ни монотонной.

Замечание. Если отображение $x \to f(x)$ осуществляет гомеоморфизм интервала или полуинтервала $|a,b|$ на промежуток $|\alpha,\beta| = f(|a,b|)$ (являющийся также интервалом или полуинтервалом), то ограниченность (соответственно не ограниченность) промежутка $|a,b|$, вообще говоря, не сохраняется для промежутка $|\alpha,\beta| = f(|a,b|)$.

Пример. Отображение $x \to \operatorname{tg} x$ осуществляет гомеоморфизм ограниченного интервала $(-\pi/2, \pi/2)$ на неограниченный интервал.

Пример. $\forall (a,b) \subset (-\infty,+\infty)$ отображение $x \to f(x)$, где $f(x) = -\left(\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}\right)$ есть гомеоморфизм (a,b) на $(-\infty,+\infty)$. (Доказать самостоятельно, что $f \in C((a,b))$ и $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a,b).)

§ 4. Элементарные функции и их непрерывность

Ранее были доказаны непрерывность степенной функции $x \to x^n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ и непрерывность многочлена $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. Из теоремы о непрерывности частного (от деления двух непрерывных функций) следует, что функция $x \to 1/x^n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ непрерывна на $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ и рациональная функция $x \to \mathcal{P}_n(x)/Q_m(x)$ непрерывна на $(-\infty, +\infty) \setminus \bigcup\limits_j \{\alpha_j\}$, где α_j – действительный корень знаменателя.

Т е о р е м а (о степенной функции с натуральным показателем). *Степенная функция $x \to x^n$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ осуществляет гомеоморфизм промежутка $[0, +\infty)$ на себя, при этом:*
1) $x^n \in C([0, +\infty))$; 2) $0^n = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$; 3) $x^n \uparrow\uparrow$ на $[0, +\infty)$.

Далее, существует обратная функция $y \to y^{1/n}$, обладающая свойствами:
1) $y^{1/n} \in C([0, +\infty))$; 2) $0^{1/n} = 0$, $\lim\limits_{y \to +\infty} y^{1/n} = +\infty$; 3) $y^{1/n} \uparrow\uparrow$ на $[0, +\infty)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Свойство 1) $x^n \in C([0, +\infty))$ было доказано ранее.

2) Равенство $0^n = 0$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ очевидно, и поскольку $n \geq 1$ $\forall n \in \mathbf{N}$, то $x^n \geq x$ $\forall x > 1$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$.

3) Имеем $(\forall x_2 > x_1 \geq 0) \Rightarrow (x_2^n - x_1^n = (x_2 - x_1) \sum\limits_{k=0}^{n-1} x_2^k x_1^{n-1-k} > 0)$, т. е. $x^n \uparrow\uparrow$ на $[0, +\infty)$.

Теперь все утверждения теоремы, в том числе и свойства 1)–3) обратной функции $y \to y^{1/n}$, вытекают из теоремы об обратной функции.

З а м е ч а н и е. Из теоремы (о степенной функции с натуральным показателем) следует, что $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall a \geq 0$ существует, и притом единственное, число $x \geq 0$ такое, что $x^n = a$. Это число обозначается через $a^{1/n}$ или $\sqrt[n]{a}$.

З а м е ч а н и я. Меняя обозначения x и y, называют обратной к функции $x \to x^n$ (на $[0, +\infty)$) функцию $x \to x^{1/n}$ (на $[0, +\infty)$). Введем обозначение $x^{-n} = (1/x)^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\forall x \neq 0$. Тогда, очевидно, функция $x \to x^{-n}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ непрерывна на $(-\infty, +\infty) \setminus \{0\}$.

Т е о р е м а (о степенной функции с отрицательным натуральным показателем). *Степенная функция $x \to x^{-n}$ $(\forall n \in \mathbf{N})$ осуществляет гомеоморфизм интервала $(0, +\infty)$ на себя, причем: 1) $x^{-n} \in C((0, +\infty))$; 2) $\lim\limits_{x \to +0} x^{-n} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{-n} = 0$; 3) $x^{-n} \downarrow\downarrow$ на $(0, +\infty)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) и 2) докажите сами. Для проверки свойства 3) заметим, что $x^n \uparrow\uparrow$ на $(0, +\infty)$, поэтому

$\forall 0 < x_1 < x_2$ имеем $x_2^{-n} - x_1^{-n} = (x_1^n - x_2^n)/(x_1^n x_2^n) < 0$, т. е. $x^{-n} \downarrow\downarrow$ на $(0, +\infty)$.

Введем обозначения $\forall a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $\forall q \in \mathbf{Q}$, где $q = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$; $a^0 = 1$, $a^1 = a$, $a^q = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$, $a^{-q} = (1/a)^q$.

Л е м м а. *Если* $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$ *и* $q \in \mathbf{Q}$, *то имеем:*

1) $(a^{q_1})^{q_2} = a^{q_1 \cdot q_2}$ $\forall q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$;

2) $a^q \cdot b^q = (a \cdot b)^q$ $\forall q \in \mathbf{Q}$, $a > 0$, $b > 0$;

3) $a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{q_1 + q_2}$ $\forall q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$, $a > 0$;

4) $a^q > 1 = a^0$ $\forall q \in \mathbf{Q}$, $q > 0$, $a > 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждения 1) и 2) проверьте сами.

3) Пусть $q_1 = m_1/n_1$, $q_2 = m_2/n_2$, где $m_1, m_2 \in \mathbf{Z}$, $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$. Тогда, учитывая, что $m_1 \cdot n_2$, $m_2 \cdot n_1 \in \mathbf{Z}$, имеем $a^{q_1} \cdot a^{q_2} = a^{m_1/n_1} \cdot a^{m_2/n_2} = (a^{1/n_1 n_2})^{m_1 n_2} \cdot (a^{1/n_1 n_2})^{m_2 n_1} = (a^{1/n_1 n_2})^{m_1 n_2 + m_2 n_1} = a^{(m_1 n_2 + m_2 n_1)/n_1 n_2} = a^{m_1/n_1 + m_2/n_2} = a^{q_1 + q_2}$.

4) Пусть $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$, и $q \in \mathbf{Q}$, причем $q = m/n > 0$. Допустим от противного, что $a^{m/n} \leq 1$, тогда очевидно, что $(\underbrace{a^{m/n} \ldots a^{m/n}}_{n} \leq \underbrace{1 \ldots 1}_{n})$ $\Rightarrow (a^m \leq 1)$, с другой стороны, $(a > 1) \Rightarrow (\underbrace{a \ldots a}_{m} > \underbrace{1 \ldots 1}_{m}) \Rightarrow (a^m > 1)$. Противоречие.

Итак, $a^q > 1$ $\forall q > 0$, $q \in \mathbf{Q}$.

Т е о р е м а (о степенной функции с рациональным показателем). *Степенная функция* $x \to x^q$ $(\forall q \in \mathbf{Q} \setminus \{0\})$ *осуществляет гомеоморфизм интервала* $(0, +\infty)$ *на себя, причем:*

1) $x^q \in C((0, +\infty))$; *2)* $\lim\limits_{x \to +0} x^q = 0$ $(q > 0)$, $\lim\limits_{x \to +0} x^q = +\infty$ $(q < 0)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^q = \begin{cases} +\infty, & q > 0, \\ 0, & q < 0; \end{cases}$ *3)* $x^q \uparrow\uparrow$ *на* $(0, +\infty)$ *при* $q > 0$ *и* $x^q \downarrow\downarrow$ *на* $(0, +\infty)$ *при* $q < 0$. (Доказательство провести самостоятельно.)

З а м е ч а н и е. $x^0 = 1$ $\forall x \in (0, +\infty)$.

З а м е ч а н и е. $\forall n \in \mathbf{N}$ все решения уравнения $x^n = a$, где $x, a \in \mathbf{R}$, можно выразить с помощью символов $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$. Если $n = 2k$ (четное), то $x^{2k} \geq 0$, и поэтому уравнение $x^{2k} = a$ имеет решение только в случае $a \geq 0$. Но если x_0 есть решение, то и $(-x_0)$ – тоже решение уравнения $x^{2k} = a$, поэтому при $a > 0$ единственным положительным решением уравнения $x^{2k} = a$ будет $a^{1/2k}$, другим (отрицательным) решением будет число $-a^{1/2k}$. Для записи обоих решений уравнения $x^{2k} = a$ применяется символ $\pm \sqrt[2k]{a}$, где $a > 0$ и $\sqrt[2k]{a} > 0$. Если $n = 2k + 1$ (нечетно), то $a \in \mathbf{R}$ может быть и отрицательным. Поскольку функция $x \to x^{2k+1}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ возрастает от $-\infty$ до $+\infty$, то уравнение $x^{2k+1} = a$ имеет единственное решение $\forall a \in \mathbf{R}$. Если $a > 0$, то таким решением будет $\sqrt[2k+1]{a} > 0$, если же $a < 0$, то, полагая $a = -b$, имеем $x^{2k+1} = -b$ или $(-x)^{2k+1} = b \Rightarrow -x = b^{1/2k+1}$, т. е. $x = -\sqrt[2k+1]{-a}$ есть решение уравнения $x^{2k+1} = a$ для $a < 0$.

Теорема (о показательной функции на множестве $\mathbf{Q}$). *Функция $x \to a^x$ определена на множестве $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ и $\forall a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, обладает следующими свойствами: 1) $a^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$, если $a > 1$, и $a^x \downarrow\downarrow$ на $\mathbf{Q}$, если $0 < a < 1$; 2)* $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1, \\ +\infty, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty, & a > 1, \\ 0, & 0 < a < 1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$; *3)* $a^x \in C(\mathbf{Q})$.

Доказательство. 1) Пусть $a > 1$ и $x_1, x_2 \in \mathbf{Q}$ любые такие, что $x_1 < x_2$, тогда в силу 4) леммы имеем $(x_2 - x_1 > 0) \Rightarrow (a^{x_2 - x_1} > 1) \Rightarrow (a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1) > 0) \Rightarrow (a^{x_2} > a^{x_1})$, т. е. при $a > 1$ $a^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$. Пусть теперь $0 < a < 1$. По доказанному выше имеем $(1/a)^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$, и тогда, очевидно, для функции $a^x = 1/(1/a)^x$ имеем $a^x \downarrow\downarrow$ на $\mathbf{Q}$.

2) Пусть сначала $a > 1$. Ранее было доказано важное неравенство $(1 + p)^n \geq 1 + np$ $\forall p > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Поскольку $a > 1$, то $a = 1 + p$, где $p > 0$, и поэтому $a^n \geq 1 + np$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Но $a^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$ при $a > 1$, откуда $a^x > a^n$ $\forall x > n$, $x \in \mathbf{Q}$.

Заметим, что в силу теоремы Архимеда $\forall N \in \mathbf{N}$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $1 + pn_0 > N$. Но тогда $\forall N \in \mathbf{N}$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a^x > a^{n_0} \geq 1 + pn_0 > N$ $\forall x > n_0$ $(x \in \mathbf{Q})$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$. Очевидно, $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} 1/a^{-x} = 0$. При $0 < a < 1$ по доказанному имеем $\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = \lim\limits_{x \to +\infty} (1/a)^{-x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (1/a)^{-x} = +\infty$. Далее, пусть опять $a > 1$, тогда $a = (1 + p)^n$, где $p = a^{1/n} - 1 > 0$, поэтому из нашего неравенства имеем оценку $a \geq 1 + n(a^{1/n} - 1) \Rightarrow \left(0 \leq a^{1/n} - 1 \leq \dfrac{a - 1}{n}\right)$, откуда $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{1/n} = 1$, а также $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{-1/n} = 1$.

Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, воспользовавшись определением предела по Гейне. Пусть (q_n) – любая последовательность Гейне, связанная с 0, такая, что $q_n \in \mathbf{Q}$, $q_n \neq 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0$ (такие последовательности существуют в силу плотности $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$). Но по доказанному выше $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{1/n} = 1$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} a^{-1/n} = 1$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon$. Далее, $(\lim\limits_{n \to +\infty} q_n = 0) \Rightarrow (\exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $-1/n_0 < q_n < 1/n_0$ $\forall n > N)$, но тогда поскольку $a^q \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$, то $1 - \varepsilon < a^{-1/n_0} < a^{q_n} < a^{1/n_0} < 1 + \varepsilon$, т. е. $(-\varepsilon < a^{q_n} - 1 < \varepsilon) \Rightarrow (|a^{q_n} - 1| < \varepsilon) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{n \to +\infty} a^{q_n} = 1)$.

Итак, $\lim\limits_{x \to 0} a^x \overset{(\Gamma)}{=} 1$. В силу эквивалентности определений предела по Гейне и по Коши в случае $a > 1$ имеем $\exists \lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$, но тогда и при $0 < a < 1$ $\exists \lim\limits_{x \to 0} a^x = 1$.

3) Пусть $x_0 \in \mathbf{Q}$, где x_0 – любая (фиксированная) точка. Тогда $\forall x \in \mathbf{Q}$ имеем $a^x - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)$, откуда, используя 2), получаем $(\exists \lim\limits_{x\to x_0} a^{x-x_0} = 1) \Rightarrow (\lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}) \Rightarrow (a^x \in C(x_0)\,\forall x_0 \in \mathbf{Q}) \Rightarrow a^x \in C(\mathbf{Q})$.

Замечание. Если $a = 1$, то $a^x = 1\ \forall x \in \mathbf{Q}$. Если $a = 0$, то $a^x = 0\ \forall x \in \mathbf{Q} \setminus \{0\}$; значение 0^0 не определено.

Определение. *Пусть $a \in \mathbf{R}$, $a > 1$ и $x \in \mathbf{R}$. Положим $a^x = \sup\limits_{q\in\mathbf{Q}, q\le x} a^q$. При $0 < q < 1$ имеем $b = 1/a > 1$, и поэтому определен символ $b^x\ \forall x \in \mathbf{R}$, тогда полагаем $a^x = b^{-x}\ \forall x \in \mathbf{R}$, где введено обозначение $b^{-x} = 1/b^x$.*

Замечание. Если $x_0 = m_0/n_0 \in \mathbf{Q}$, где $m_0 \in \mathbf{Z}$, $n_0 \in \mathbf{N}$, то, очевидно, $a^{x_0} = a^{m_0/n_0} = (a^{1/n_0})^{m_0}$ и в соответствии с ранее введенными обозначениями имеем, в частности, $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Теорема (о показательной функции, определенной на $\mathbf{R}$). *Показательная функция $x \to a^x$ $(a > 0, a \ne 1, a \in \mathbf{R})$ осуществляет гомеоморфизм интервала $(-\infty, +\infty)$ на интервал $(0, +\infty)$, при этом обратная функция $y = \log_a y$ называется логарифмической функцией.*

Показательная функция обладает следующими свойствами:

1) $a^x \uparrow\uparrow$ на $(-\infty, +\infty)$ при $a > 1$ и $a^x \downarrow\downarrow$ на $(-\infty, +\infty)$ при $0 < a < 1$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} 0, a > 1, \\ +\infty\, 0 < a < 1, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} +\infty\, a > 1, \\ 0, 0 < a < 1; \end{cases}$

3) $a^x \in C((-\infty, +\infty))$;

4) $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}\ \forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$;

5) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$, $\forall b > 0$, $b \ne 1$;

6) $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}\ \forall x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$;

7) $a^{-x} = 1/a^x$, $(1/a)^x = 1/a^x$, $a^{x_1}/a^{x_2} = a^{x_1-x_2}\ \forall x, x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$; $a^0 = 1$, $a^1 = a$.

Логарифмическая функция $x \to \log_a x$ $(a \in \mathbf{R}, a > 0, a \ne 1)$ осуществляет гомеоморфизм интервала $(0, +\infty)$ на интервал $(-\infty, +\infty)$ и обладает свойствами:

1) $\log_a x \uparrow\uparrow$ на $(0, +\infty)$ при $a > 1$ и $\log_a x \downarrow\downarrow$ на $(0, +\infty)$ при $0 < a < 1$;

2) $\lim\limits_{x\to+0} = \begin{cases} -\infty, a > 1, \\ +\infty, 0 < a < 1 \end{cases}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} = \begin{cases} +\infty, a > 1, \\ -\infty, 0 < a < 1; \end{cases}$

3) $\log_a x \in C((0, +\infty))$;

4) $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2\ \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ и, в частности, $\log_a(1/x) = -\log_a x\ \forall x \in (0, +\infty)$;

5) $\log_a[(x_1)^{x_2}] = x_2 \log_a x_1\ \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty)$.

Доказательство. Сначала рассмотрим показательную функцию $x \to a^x$. 1) Пусть $x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, $x_1 < x_2$. Тогда в силу плотности $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$ $\exists q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ такие, что $x_1 < q_1 < q_2 < x_2$, и поскольку $a^x \uparrow\uparrow$ на $\mathbf{Q}$, то, используя определение символа $a^x\ \forall x \in \mathbf{R}$,

имеем $a^{x_1} = \sup\limits_{q\in\mathbf{Q},q\le x_1} a^q \le a^{q_1} < a^{q_2} \le \sup\limits_{q\in\mathbf{Q},q\le x_2} a^q = a^{x_2} \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$, т. е. функция $a^x \uparrow\uparrow$ на $(-\infty,+\infty)$.

2) $\forall x \in (-\infty,+\infty) \Rightarrow (m_n = [x] \le x < m_n + 1)$, но тогда поскольку функция $a^x \uparrow\uparrow$ на $(-\infty,+\infty)$, то $a^x \ge a^{m_n}$. По ранее доказанному $\lim\limits_{m_n\to+\infty} a^{m_n} = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$. Далее, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = -\lim\limits_{x\to-\infty} 1/a^{-x} = 0$.

3) Пусть $x_0 \in \mathbf{R}$ – любое, но фиксированное. Докажем предварительно лемму.

Л е м м а. *Если* $x_0 \in \mathbf{R}$, *то* $\forall\varepsilon > 0\ \exists q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ *такие, что* $q_1 < x_0 < q_2$ *и* $0 < a^{q_2} - a^{q_1} < \varepsilon$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу плотности $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists q_n', q_n'' \in \mathbf{Q}$ такие, что $q_n' < x_0 < q_n'' < x_0 + 1$, $0 < q_n'' - q_n' < 1/n$, но тогда в силу свойств показательной функции $q \to a^q$; определенной на $\mathbf{Q}$, имеем $0 < a^{q_n''} - a^{q_n'} = a^{q_n'}(a^{q_n''-q_n'} - 1) \le a^{x_0+1}(a^{1/n} - 1)$. Но, как было доказано ранее, существует $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{1/n} = 1$, поэтому $\forall\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a^{x_0+1}(a^{1/n_0} - 1) < \varepsilon$, откуда, полагая $q_1 = q_{n_0}'$, $q_2 = q_{n_0}''$, имеем оценки $q_1 < x_0 < q_2$ и $0 < a^{q_2} - a^{q_1} < \varepsilon$.

Теперь воспользуемся определением предела функции в точке по Гейне. Рассмотрим любую последовательность Гейне (x_n), связанную с точкой x_0, так что $x_n \in \mathbf{R}$, $x_n \ne x_0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$. По лемме $\forall\varepsilon > 0$ $\exists q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ такие, что $q_1 < x_0 < q_2$ и $0 < a^{q_2} - a^{q_1} < \varepsilon$. Поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, то $\exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $q_1 < x_n < q_2$ $\forall n > N$, и тогда поскольку $a^x \uparrow\uparrow$ на $(-\infty,+\infty)$, то имеем оценки $a^{q_1} < a^{x_0} < a^{q_2}$ и $a^{q_1} < a^{x_n} < a^{q_2}$ $\forall n > N$, откуда в силу выбора $q_1, q_2 \in \mathbf{Q}$ получаем оценки $|a^{x_n} - a^{x_0}| < a^{q_2} - a^{q_1} < \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a^{x_n} - a^{x_0} \Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} a^x \overset{(\Gamma)}{=} a^{x_0}$.

Итак, $\forall x_0 \in \mathbf{R}\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} a^x = a^{x_0}$, и поэтому, используя (предельный) критерий непрерывности функции в точке, имеем $a^x \in C(x_0)$ $\forall x_0 \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow a^x \in C(\mathbf{R})$.

Свойства 4)–6) для показательной функции проверяются единообразно с помощью 3). Проверим, например, свойство 4).

Пусть $x_1, x_2 \in (-\infty,+\infty)$ – любые, но фиксированные, и пусть последовательности (α_n) и (β_n) $(\alpha_n, \beta_n \in \mathbf{Q}\ \forall n)$ таковы, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = x_1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = x_2$ (выбор таких последовательностей возможен в силу плотности $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$). В силу свойств функции $q \to a^q$, определенной на $\mathbf{Q}$, имеем $a^{\alpha_n} \cdot a^{\beta_n} = a^{\alpha_n+\beta_n}$. Поскольку $a^x \in C((-\infty,+\infty))$, то в этом равенстве можно перейти к пределу при $n \to +\infty$. Но тогда $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$. Свойства 7) для показательной функции вытекают из свойств 1)–6). Проверку свойств 1)–5) для логарифмической

функции $x \to \log_a x$ проведите самостоятельно, используя свойства гомеоморфизма $y \to a^y$ интервала $(-\infty, +\infty)$ на интервал $(0, +\infty)$ и, заметив, в частности, что свойства 4) и 5) для логарифмической функции следуют из следующих свойств показательной функции:

$$a^{y_1+y_2} = a^{y_1} \cdot a^{y-2} \text{ (где } x_1 = a^{y_1}, x_2 = a^{y_2}) \text{ и}$$

$$(a^{y_1})^{x_2} = a^{y_1 \cdot x_2} \text{ (где } x_1 = a^{y_1}).$$

Замечание. При $a = 1$ имеем $a^x = 1 \ \forall x \in (-\infty, +\infty)$. График показательной функции изображен на рис. 8 (при $a > 1$) и рис. 9 (при $0 < a < 1$).

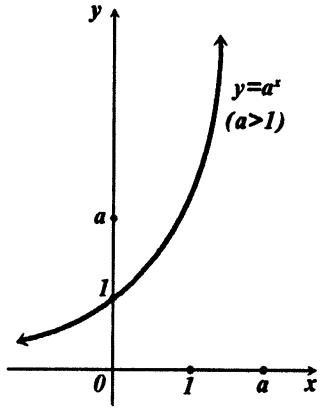


Рис. 8

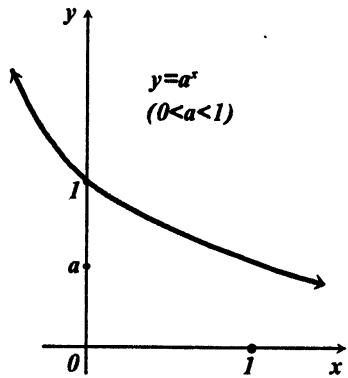


Рис. 9

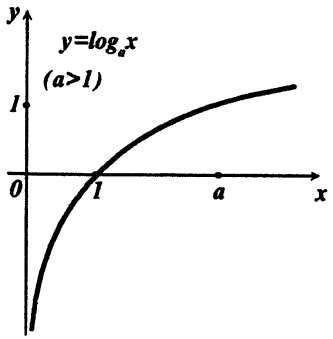


Рис. 10

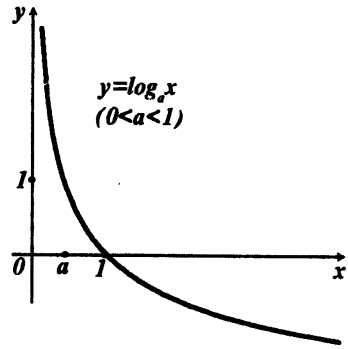


Рис. 11

Замечание. Если $a = e > 1$, то полагают $\log_e x = \ln x$. График логарифмической функции изображен на рис. 10 (при $a > 1$) и рис. 11 (при $0 < a < 1$).

Замечание. Если $a, b \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$, то $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a = \log_a x / \log_a b$; $\log_b x = \ln x / \ln b$.

В самом деле, $\forall x > 0$ имеет место тождество $x = a^{\log_a x}$, откуда $\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a$, а стало быть,

$$\log_a x = \log_b x \cdot \log_a b \Rightarrow \log_b a \cdot \log_a b = 1.$$

О п р е д е л е н и е. *Обозначим через $x \to x^\alpha$ функцию, которая любым $x > 0$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ ставит в соответствие число x^α. Эта функция называется степенной функцией.*

З а м е ч а н и е. Поскольку при $a > 0$, $a \neq 1$ имеем $x = a^{\log_a x}$, $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$, то $x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$ и, в частности, $x^\alpha = \exp\{\alpha \ln x\}$.

Таким образом, степенная функция $x \to x^\alpha$, определенная на интервале $(0, +\infty)$, является композицией логарифмической функции $x \to \log_a x$ и показательной функции $y \to a^{\alpha y}$.

Т е о р е м а (о степенной функции с действительным показателем). *Степенная функция $x \to x^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$ осуществляет гомеоморфизм интервала $(0, +\infty)$ на интервал $(0, +\infty)$ и обладает следующими свойствами:*

1) $x^\alpha \uparrow\uparrow$ *на* $(0, +\infty)$ *при* $\alpha > 0$ *и* $x^\alpha \downarrow\downarrow$ *на* $(0, +\infty)$ *при* $\alpha < 0$;

2) $\lim\limits_{x \to +0} x^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ +\infty, & \alpha < 0 \end{cases}$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha < 0; \end{cases}$

3) $x^\alpha \in C((0, +\infty))$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha \neq 0$;

4) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$ $\forall x > 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$;

5) $x_1^\alpha \cdot x_2^\alpha = (x_1 \cdot x_2)^\alpha$ $\forall x_1 > 0$, $x_2 > 0$; $\forall \alpha \in \mathbf{R}$;

6) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ $\forall x > 0$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) и 2). Пусть (x_n) – любая последовательность Гейне, связанная с 0, причем $x_n > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$. Тогда из свойств логарифмической и показательной функций имеем $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln x_n = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \exp\{\alpha \ln x_n\} = \begin{cases} 0, & \alpha > 0, \\ +\infty, & \alpha < 0. \end{cases}$

3) Заметим, что $x^\alpha = F(x)$, $x \in (0, +\infty)$, где $F = \varphi \circ f$, причем $f(x) = \ln x$, $x \in (0, +\infty)$; $f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$; $f \in C((0, +\infty))$; $\varphi(y) = e^{\alpha y}$, $y \in (-\infty, +\infty)$; $\varphi((-\infty, +\infty)) = (0, +\infty)$, $\varphi \in C((-\infty, +\infty))$.

В силу теоремы о непрерывности композиции непрерывных функций имеем $F = \varphi \circ f \in C((0, +\infty)) \Rightarrow x^\alpha \in C((0, +\infty))$.

Свойства 4)–6) проверяются единообразным способом. Например, $x^\alpha \cdot x^\beta = e^{\alpha \ln x} \cdot e^{\beta \ln x} = e^{(\alpha+\beta) \ln x} = x^{\alpha+\beta}$ $\forall x > 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

З а м е ч а н и е. При $\alpha = 0 \Rightarrow x^\alpha = 1$ $\forall x \in (0, +\infty)$. График степенной функции изображен на рис. 12 (при $\alpha > 0$) и рис. 13 (при $\alpha < 0$).

О п р е д е л е н и е. *Тригонометрическими функциями называются функции:* $y = \sin x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $y = \cos x$, $x \in (-\infty, +\infty)$; $y = \operatorname{tg} x$ $(= \sin x / \cos x)$, $x \neq (2k+1)\pi/2$; $y = \operatorname{ctg} x$ $(= \cos x / \sin x)$, $x \neq k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Отметим некоторые свойства тригонометрических функций, известные из школы (к этим свойствам мы вернемся во 2-м томе курса математического анализа при изучении степенных рядов):

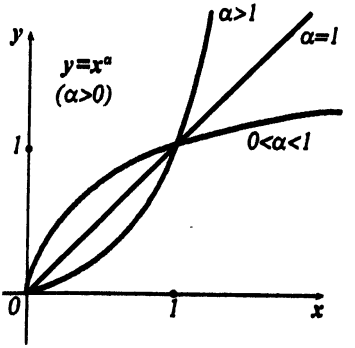


Рис 12

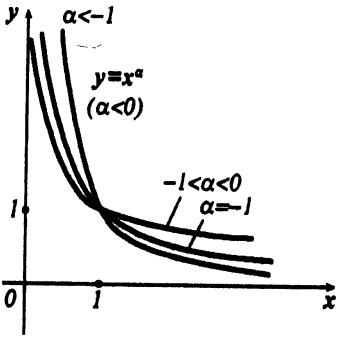


Рис. 13

1) $\sin(x+2k\pi)=\sin x$; $\cos(x+2k\pi)=\cos x$; $\operatorname{tg}(x+k\pi)=\operatorname{tg}x$; $\operatorname{ctg}(x+k\pi)=\operatorname{ctg}x$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$;

2) $\sin(x_1+x_2)=\sin x_1\cdot\cos x_2+\cos x_1\cdot\sin x_2$; $\cos(x_1+x_2)=\cos x_1\cdot\cos x_2-\sin x_1\cdot\sin x_2$; $\sin^2 x+\cos^2 x=1$;

3) $\sin(-x)=-\sin x$; $\cos(-x)=\cos x$ $\forall x\in(-\infty,+\infty)$;

4) $\sin x,\cos x\in C((-\infty,\infty))$.

Для доказательства свойства 4) заметим, что $\sin x-\sin x_0=2\cos\dfrac{x+x_0}{2}\cdot\sin\dfrac{x-x_0}{2}$, откуда $|\sin x-\sin x_0|\le 2|\sin(x-x_0)/2|\le 2|x-x_0|/2=|x-x_0|$. Таким образом, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\varepsilon>0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющего неравенству $|x-x_0|<\delta$, имеем $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$, т. е. $(\sin x\in C(x_0)\ \forall x_0\in-\infty,+\infty))\Rightarrow(\sin x\in C((-\infty,+\infty)))$.

Для доказательства непрерывности функции $x\to\cos x$ используется равенство $\cos x-\cos x_0=-2\sin\dfrac{x+x_0}{2}\cdot\sin\dfrac{x-x_0}{2}$. Заметим, что в силу теоремы о непрерывности частного (от деления двух непрерывных функций) функции $x\to\operatorname{tg}x$ и $x\to\operatorname{ctg}x$ также непрерывны в своих областях определения.

Графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$ изображены на рис. 14, а функций $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ – на рис. 15.

Т е о р е м а (об обратных тригонометрических функциях). *Функция $x\to\sin x$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[-\pi/2,\pi/2]$ на отрезок $[-1,1]$, причем обратная функция $y\to\arcsin y$ такова, что (меняя обозначения x и y):*

1) $\arcsin x\uparrow\uparrow$ *на* $[-1,1]$;

2) $\lim\limits_{x\to-1+0}\arcsin x=-\pi/2$, $\lim\limits_{x\to1-0}\arcsin x=\pi/2$;

3) $\arcsin x\in C([-1,1])$.

Функция $x \to \cos x$ *осуществляет гомеоморфизм отрезка* $[0, \pi]$ *на отрезок* $[-1, 1]$, *причем для обратной функции* $y \to \arccos y$ *имеем:*

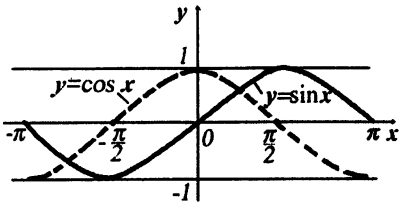


Рис. 14

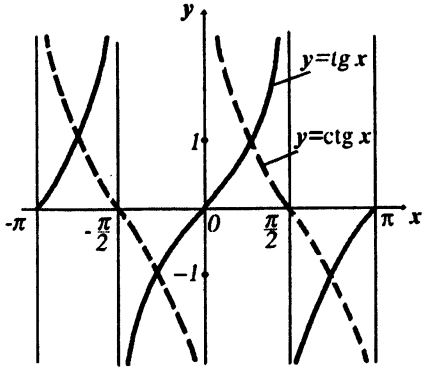


Рис. 15

1) $\arccos x \downarrow\downarrow$ *на* $[-1, 1]$;

2) $\lim\limits_{x \to -1+0} \arccos x = \pi/2$ *и* $\lim\limits_{x \to 1-0} \arcsin x = 0$;

3) $\arccos x \in C([-1, 1])$.

Функция $x \to \operatorname{tg} x$ *осуществляет гомеоморфизм интервала* $(-\pi/2, \pi/2)$ *на интервал* $(-\infty, +\infty)$, *причем для обратной функции* $y \to \operatorname{arctg} y$ *имеем:*

1) $\operatorname{arctg} x \uparrow\uparrow$ *на* $(-\infty, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$ *и* $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$;

3) $\operatorname{arctg} x \in C((-\infty, +\infty))$.

Функция $x \to \operatorname{ctg} x$ *осуществляет гомеоморфизм интервала* $(0, \pi)$ *на интервал* $(-\infty, +\infty)$, *причем для обратной функции* $y \to \operatorname{arcctg} y$ *имеем:*

1) $\operatorname{arcctg} x \downarrow\downarrow$ *на* $(-\infty, +\infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi$ *и* $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arcctg} x = 0$;

3) $\operatorname{arcctg} x \in C((-\infty, +\infty))$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $x \to \sin x$. Пусть $-\pi/2 \le x_1 < x_2 \le \pi/2$, тогда $0 < x_2 - x_1 \le \pi$, и поэтому $(-\pi < x_1 + x_2 < \pi) \Rightarrow (\sin x_2 - \sin x_1 = 2\sin(x_2 - x_1)/2 \cdot \cos(x_1 + x_2)/2 > 0) \Rightarrow (\sin x_2 > \sin x_1) \Rightarrow (\sin x \uparrow\uparrow$ на $[-\pi/2, \pi/2])$. Таким образом, $\sin x \in C([-\pi/2, \pi/2])$, $\sin([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$ и $\sin x \uparrow\uparrow$ на $[-\pi/2, \pi/2]$. В силу теоремы об обратной функции видим, что функция $x \to \sin x$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[-\pi/2, \pi/2]$ на отрезок $[-1, 1]$ и существует обратная функция $\varphi(y)$ такая, что $\varphi(y) \uparrow\uparrow$ на $[-1, 1]$, $\varphi(-1) = -\pi/2$, $\varphi(1) = \pi/2$ и $\varphi \in C([-1, 1])$. Эта функция обозначается через $\arcsin y$, для которой (меняя x и y) имеем:

1) $\arcsin x \uparrow\uparrow$ на $[-1, 1]$;

2) $\lim\limits_{x\to -1+0} \arcsin x = -\pi/2$ и $\lim\limits_{x\to 1-0} \arcsin x = \pi/2$;

3) $\arcsin x \in C([-1,1])$.

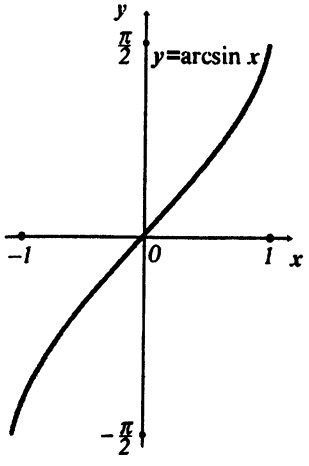


Рис. 16

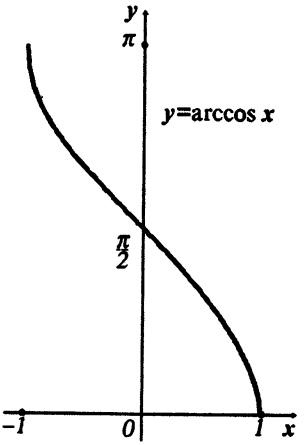


Рис. 17

Остальные утверждения теоремы докажите самостоятельно.

Графики обратных тригонометрических функций изображены на рис. 16–19.

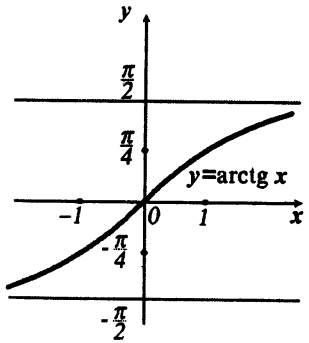


Рис. 18

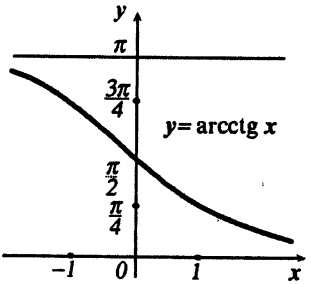


Рис. 19

З а м е ч а н и е. Итак, все простейшие элементарные функции:

1) рациональная функция $x \to \mathcal{P}_n(x)/Q_m(x)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$;

2) показательная функция $x \to a^x$;

3) логарифмическая функция $x \to \log_a x$;

4) степенная функция $x \to x^\alpha$;

5) тригонометрические функции $x \to \sin x$, $x \to \cos x$, $x \to \operatorname{tg} x$ и $x \to \operatorname{ctg} x$;

6) обратные тригонометрические функции $x \to \arcsin x$, $x \to \arccos x$, $x \to \operatorname{arctg} x$ и $x \to \operatorname{arcctg} x$ являются непрерывными функциями в своих естественных (т. е. максимальных) областях существования.

Напомним, что элементарной функцией называется функция, полученная из простейших элементарных функций посредством конечного числа арифметических действий и композиций. Вспоминая теоремы об алгебраических действиях над непрерывными функциями и теорему о непрерывности композиции непрерывных функций, имеем теорему.

Т е о р е м а. *Любая элементарная функция непрерывна в своей естественной области определения.*

П р и м е р ы. Функция $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ является элементарной, поскольку $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ $\forall x \neq 0$, причем $|x| = \sqrt{x^2}$, $x \neq 0$, поэтому $f \in C(\mathbf{R} \setminus \{0\})$. Функция $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0, \\ 0 \text{ при } x = 0, \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$ не является элементарной. Функция $x \to \operatorname{sgn} x$ разрывна в точке $x_0 = 0$.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ФУНКЦИИ (ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ)

§ 1. Дифференцируемость функции в точке

Пусть функция $x \to f(x)$ определена на множестве $M \subset (-\infty, +\infty)$. Рассмотрим открытое множество $\overset{\circ}{M}$, т. е. множество всех внутренних точек x из M. Введем понятие дифференцируемости функции $f(x)$ во внутренней точке $x_0 \in \overset{\circ}{M}$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0) \subset M$ точки $x_0 \in \overset{\circ}{M}$. Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если существует число A такое, что имеет место представление*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot |\Delta x| \ \forall x_0 + \Delta x \in U(x_0), \quad (1.1)$$

где функция $\alpha(\Delta x)$ является бесконечно малой при $\Delta x \to 0$, так что

в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ *имеем* $\alpha(\Delta x) = o(1)$ $(\Delta x \to 0)$. Запись: $f \in \mathcal{D}(x_0)$.

Замечание 1. При фиксированном $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ число A не зависит от «приращения» Δx. (Но, вообще говоря, $A = A_f(x_0)$, т. е. зависит как от функции f, так и от точки x_0.)

Поскольку $\alpha(\Delta x) = o(1)$ $(\Delta x \to 0)$, то имеем

Определение. *Функция* $f : M \to \mathbf{R}$ *называется дифференцируемой в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, *если существует число* A *такое, что в проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0) \subset M$ *имеет место представление*

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) \ (\Delta x \to 0).$$

Замечание 2. Функция $\alpha(\Delta x)$ из представления (1.1) при $\Delta x \neq 0$ определена однозначно равенством $\alpha(\Delta x) = (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - A\Delta x)/|\Delta x|$. При $\Delta x = 0$ значение $\alpha(0)$ может быть любым, но мы в дальнейшем будем считать $\alpha(0) = 0$, так что функция $\alpha(\Delta x)$ становится непрерывной при $\Delta x = 0$ $(\alpha \in C(0))$.

Пример. Пусть $f(x) = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, тогда $\forall x_0$ имеем $(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 \Rightarrow (A = 2x_0, (\Delta x)^2 = o(\Delta x)(\Delta x \to 0))$, т. е. функция $x \to x^2$ дифференцируема $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание 3. Если функция $f(x)$, определенная в окрестности $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0, то в окрестности $U(x_0)$ отображение $x \to f(x)$ с точностью до $o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$ можно заменить линейным (аффинным) отображением $x \to f(x_0) + l(x - x_0)$, где $l : h \to A \cdot h$ есть линейное отображение (линейная форма) в $\mathbf{R}$. Таким образом, приходим к следующему (эквивалентному) определению дифференцируемости числовой функции в точке.

Определение. *Функция* $f : U(x_0) \to \mathbf{R}$ *дифференцируема в точке* x_0, *если существует такое линейное отображение* $l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *что*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - l(\Delta x)|}{|\Delta x|} = 0.$$

Замечание 4. Линейное отображение $l : h \to A \cdot h$ из определения дифференцируемой функции $f(x)$ в точке x_0 называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается символом $df(x_0)$ (так что $df(x_0) : h \to A \cdot h$). Итак, имеем

Определение. *Функция* $f : U(x_0) \to \mathbf{R}$ *дифференцируема в точке* x_0, *если существует линейное отображение (линейная форма)* $df(x_0) : h \to A \cdot h$ *такое, что в окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *имеет место представление* $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = df(x_0)(\Delta x) + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, *при этом число* $df(x_0)(\Delta x)$ *есть значение дифференциала* $df(x_0)$ *(как линейной формы) при* $h = \Delta x$.

Т е о р е м а (единственности дифференциала). *Пусть функция $f(x)$, определенная в окрестности $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0. Тогда число A (соответственно дифференциал $df(x_0): h \to A \cdot h$) определяется единственным образом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0 и в $U(x_0)$ имеют место два представления:

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A_i\Delta x+o(\Delta x),\ (\Delta x\to 0);\ i=1,2.$$

Тогда $(A_1-A_2)\Delta x=o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$ и при $\Delta x\neq 0$ имеем $A_1-A_2=o(1)$ $(\Delta x\to 0)\Rightarrow A_1=A_2$. Таким образом, число A (а стало быть, и линейная форма $df(x_0): h\to A\cdot h$) определяется однозначно.

З а м е ч а н и е. Если ввести понятие приращения функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, соответствующее приращению аргумента Δx (в точке x_0), то для функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0, имеем представления $\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$ или $\Delta y=df(x_0)\cdot(\Delta x)+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$, т. е. при $A\neq 0$ $\Delta y\sim A\Delta x$ $(\Delta x\to 0)$ или $\Delta y\sim df(x_0)(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$. Таким образом, значение дифференциала $df(x_0)(\Delta x)$ (при $A\neq 0$) есть главная линейная часть приращения функции Δy.

Т е о р е м а (о непрерывности дифференцируемой функции). *Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ и дифференцируема в точке x_0. Тогда $f\in C(x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеем представление $f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+o(x-x_0)$ $(x\to x_0)$, откуда $(\exists\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0)\Rightarrow(\exists\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0))\Rightarrow(f\in C(x_0))$.

З а м е ч а н и е. Если $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и $f\in C(x_0)$, то функция $f(x)$ может и не быть дифференцируемой в точке x_0.

П р и м е р. Пусть $f: x\to|x|$, $x\in(-\infty,+\infty)$. Тогда $f\in C((-\infty,+\infty))$, но функция $x\to|x|$ не дифференцируема в точке $x_0=0$. В самом деле, для $x_0=0$ $\Delta y=|\Delta x|$, и если бы функция $f(x)=|x|$ была дифференцируема в точке $x_0=0$, то по определению $\exists A$ такое, что $\Delta y=|\Delta x|\Rightarrow|\Delta x|=A\Delta x+o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$, причем в силу теоремы единственности дифференциала число A определено единственным образом. В частности, при $\Delta x>0\Rightarrow(\Delta y=\Delta x)\Rightarrow A=1$, а при $\Delta x<0\Rightarrow(\Delta y=-\Delta x)\Rightarrow A=-1$. Противоречие.

§ 2. Производная функции в точке

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется предел (если он существует)* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. *Производная*

функции $f(x)$ *в точке* x_0 *обозначается символами* $f'(x_0) = \mathrm{D}f(x_0) = \dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Итак,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Теорема (критерий дифференцируемости функции в точке). *Пусть функция* $f(x)$ *определена в окрестности* $U(x_0)$. *Тогда* (*функция* $f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0) $\Leftrightarrow$ (*в точке* x_0 *существует* (*конечная*) *производная* $f'(x_0)$).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $f(x)$, определенная в $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0. Тогда имеем представление $\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, откуда ввиду $\Delta x \neq 0$ имеем $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + o(1)$ $(\Delta x \to 0) \Rightarrow \left(\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A\right) \Rightarrow \exists f'(x_0) = A.$

Достаточность. Пусть $f(x)$ определена в $U(x_0)$ и существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$. Тогда, полагая $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, имеем в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ представление $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)$ $(\Delta x \to 0) \Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$. Таким образом, функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Следствие. Если функция $f(x)$, определенная в $U(x_0)$, дифференцируема в точке x_0, то в $\dot{U}(x_0)$ имеем представление $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$ и $df(x_0) : h \to f'(x_0) \cdot h$, в частности, для значения дифференциала функции $f(x)$ при $h = \Delta x$ имеем $df(x_0)(\Delta x) = f'(x_0)\Delta x$ (заметим попутно, что из теоремы единственности дифференциала вытекает, что $A = f'(x_0)$).

Пример. Пусть $p : x \to x$ – тождественное отображение $\mathbf{R}$ на $\mathbf{R}$. Тогда функция $p(x)$ дифференцируема $\forall x \in (-\infty, +\infty)$. В самом деле, $\dfrac{\Delta p(x)}{\Delta x} = \dfrac{(x + \Delta x) - x}{\Delta x} = 1$ $\forall \Delta x \neq 0 \Rightarrow p'(x) = 1$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$ и в силу критерия дифференцируемости $p(x)$ дифференцируема, причем для дифференциала dp имеем $dp : h \to 1 \cdot h$.

Положим $dx \equiv dp$. Тогда дифференциал (независимого переменного) $dx : h \to h$ есть линейная форма, для которой при любом $h \in \mathbf{R}$ $dx(h) = h$.

Пусть теперь функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда для ее дифференциала $df(x_0)$ имеем представление $df(x_0) : h \to f'(x_0)h$ и, в частности, $df(x_0)(h) = f'(x_0)h = f'(x_0)dx(h)$, поэтому имеет смысл запись для линейной формы $df(x_0) = f'(x_0)dx$ или, полагая $y = f(x)$ и $dy = df(x)$, получаем часто употребляемую форму записи для дифференциала $dy = f'(x)dx$, $dy = y' \cdot dx$ $(y' = f'(x))$.

Отметим также обозначение для производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция* $f(x)$ *определена* $\forall x \in U(x_0) \cap [x_0, +\infty)$ (*или* $\forall x \in U(x_0) \cap (-\infty, x_0]$).

Если существует правосторонний (левосторонний) предел

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ (x \to x_0 - 0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

то этот предел называется правой (левой) производной функции $f(x)$ *в точке* x_0 *и обозначается символами* $f'_+(x_0) = \mathrm{D}^+ f(x_0)$ (*соответственно* $f'_-(x_0) = \mathrm{D}^- f(x_0)$).

Из критерия существования предела функции в точке имеем:

Т е о р е м а (критерий существования производной). *Пусть функция* $f(x)$ *определена в* $U(x_0)$. *Тогда* $(\exists f'(x_0)) \Leftrightarrow (\exists$ (*конечные*) $\mathrm{D}^+ f(x_0)$, $\mathrm{D}^- f(x_0)$, *причем* $\mathrm{D}^+ f(x_0) = \mathrm{D}^- f(x_0) = f'(x_0))$.

П р и м е р. Пусть $f : x \to |x|$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда, очевидно, $\mathrm{D}^+ f(0) = 1$ и $\mathrm{D}^- f(0) = -1$, но производная $\mathrm{D}f(0)$ не существует (еще одно доказательство недифференцируемости функции $x \to |x|$ в точке $x_0 = 0$).

З а м е ч а н и е. До сих пор для функции $f(x)$, определенной в $U(x_0)$, рассматривались лишь конечные производные $f'(x_0)$.

Иногда удобно пользоваться понятиями бесконечной производной, полагая $f'(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$, если $f \in C(x_0)$ и

$$\exists \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0))/(x - x_0) = +\infty\,(-\infty).$$

(Отметим, что при $\mathrm{D}f(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$ функция $f(x)$ не является дифференцируемой в точке x_0!).

Аналогичным образом вводятся бесконечные односторонние производные

$$\mathrm{D}^+ f(x_0) = +\infty,\ \mathrm{D}^- f(x_0) = +\infty\,(-\infty)$$

(если $f(x_0) = f(x_0 + 0)$, $f(x_0) = f(x_0 - 0)$ соответственно).

П р и м е р. Пусть $f : x \to \sqrt{|x|}$, $x \in (-1, 1)$. Тогда

$$\mathrm{D}^+ f(0) = \lim_{x \to +0} \sqrt{|x|}/x = +\infty;\ \mathrm{D}^+ f(0) = \lim_{x \to -0} \sqrt{|x|}/x = -\infty.$$

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ определена на интервале (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ существует конечная производная $f'(x)$, то говорят, что $f(x)$ дифференцируема на интервале (a, b). Запись: $f \in \mathcal{D}((a, b))$. Если $f \in \mathcal{D}((a, b))$ и $f' \in C((a, b))$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на интервале (a, b). Запись: $f \in C^{(1)}((a, b))$.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$ (полуоткрытом или замкнутом), $f \in \mathcal{D}((a, b))$ и при $a \in |a, b|$ существует конечная правосторонняя производная $\mathrm{D}^+ f(a)$, и при $b \in$

$|a, b|$ существует конечная левосторонняя производная $\mathrm{D}^- f(b)$, то говорят, что функция $f(x)$ дифференцируема на промежутке $|a, b|$. Запись: $f \in \mathcal{D}(|a, b|)$. Если $f \in \mathcal{D}(|a, b|)$ и функция

$$F(x) = \begin{cases} \mathrm{D}^+ f(a), & x = a \,(\text{если } |a, b|), \\ \mathrm{D} f(x), & x \in (a, b), \\ \mathrm{D}^- f(b), & x = b \,(\text{если } b \in |a, b|) \end{cases}$$

непрерывна на промежутке $|a, b|$, то говорят, что функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $|a, b|$. Запись: $f \in C^{(1)}(|a, b|)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и имеет на отрезке $[a, b]$ разрывы только первого рода. Пусть существуют точки $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b$ такие, что функции*

$$f_i(x) = \begin{cases} f(a_i + 0), & x = a_i, \\ f(x), & a_i < x < a_{i+1};\ i = 0, 1, \ldots, m-1, \\ f(a_{i+1} - 0), & x = a_{i+1} \end{cases}$$

непрерывно дифференцируемы на отрезках $[a_i, a_{i+1}]$ (т. е. $f_i \in C^{(1)}([a_i, a_{i+1}])$; $i = 0, 1, \ldots, m-1$). Тогда говорят, что функция $f(x)$ кусочно-непрерывно дифференцируема на отрезке $[a, b]$ (рис. 20).

Рис. 20

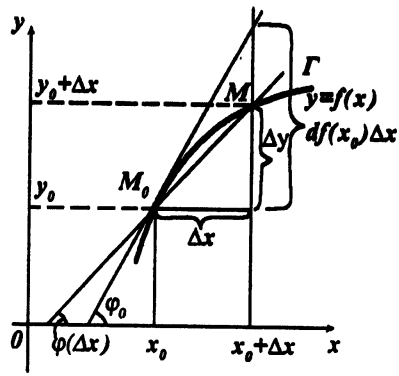


Рис. 21

З а м е ч а н и е. Очевидно, $f \in \mathcal{D}(|a, b|) \Rightarrow f \in C(|a, b|)$, но существуют функции, непрерывные на $(-\infty, +\infty)$ и не имеющие производной ни в одной точке $x_0 \in (-\infty, +\infty)$ (см. пример Ван-дер-Вардена, приведенный в учебнике [3]).

§ 3. Касательная к графику функции

Пусть дана функция $f : (a, b) \to \mathbf{R}$ и множество $\Gamma = \{(x, y) | y = f(x), x \in (a, b)\} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}$ есть ее график. Тогда, очевидно, $((x, y) \in \Gamma) \Rightarrow (y = f(x), x \in (a, b))$.

Определение. *Если существует конечная производная* $f'(x_0)$, *то касательной к графику* Γ *функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *называется график функции* $x \to f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, *определенной* $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание. Касательная к графику Γ является прямой, проходящей через точку $(x_0, f(x_0))$ и имеющей уравнение $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, при этом значение производной $f'(x_0)$ будет угловым коэффициентом касательной в точке $M_0 = (x_0, f(x_0))$. Если точки M_0, $M \in \Gamma$, где Γ – график функции f, то прямая, проходящая через точки M_0 и M, называется секущей, ее уравнение, как известно из аналитической геометрии, будет $\dfrac{y - y_0}{\Delta y} = \dfrac{x - x_0}{\Delta x}$ или $y = y_0 + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$ (рис. 21, где введены обозначения $M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$).

Теорема (о касательной как предельном положении секущей). *Если функция* $f : U(x_0) \to \mathbf{R}$ *дифференцируема в точке* x_0, *то предельным положением секущей, проходящей через точки* $M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ *при* $\Delta x \to 0$, *будет касательная к графику* Γ *функции* $x \to f(x)$ *в точке* $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$.

Доказательство. Из уравнения секущей $y = y_0 + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$ следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \varphi(\Delta x)$, где $\varphi(\Delta x)$ – угол, образованный секущей M_0M с осью абсцисс Ox, так что $\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Поскольку $f \in \mathcal{D}(x_0)$, то $\exists f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, и в силу непрерывности функции $x \to \operatorname{arctg} x$ видим, что

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{arctg} f'(x_0) = \varphi_0.$$

Итак, при $\Delta x \to 0$ существует предельное значение угла наклона секущей M_0M, а стало быть, существует и предельное положение секущей, проходящей через точку M_0 (при $M \to M_0$). Для отыскания предельного положения секущей перейдем к пределу в уравнении секущей $y = y_0 + \dfrac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Получаем уравнение касательной к графику Γ функции $x \to f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0)) : y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Определение. *Если* $f'(x_0) = +\infty(-\infty)$, *то касательной к графику* Γ *функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *(при* $f \in C(x_0)$*) называется множество* $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x = x_0, -\infty < y < +\infty\}$. Касательная в случае $f'(x_0) = +\infty(-\infty)$ есть прямая с уравнением $x = x_0$, $-\infty < y < +\infty$.

Определение. *Если существует конечная правая производная* $D^+ f'(x_0)$, *то правой полукасательной к графику* Γ *функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *называется график функции* $x \to f(x_0) + D^+ f(x_0)(x - x_0)$, *определенной* $\forall x \geq x_0$.

Определение. *Если существует конечная левая производная* $D^- f(x_0)$, *то левой полукасательной к графику* Γ *функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *называется график функции* $x \to f(x_0) + D^- f(x_0)(x - x_0)$, *определенной* $\forall x \leq x_0$.

Определение. *Если* $D^+ f(x_0) = +\infty(-\infty)$, *то правой полукасательной к графику* Γ *функции* f *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *называется множество точек* (x, y) *таких, что* $x = x_0$, $y \geq f(x_0)$ $(y \leq f(x_0))$.

Аналогично определяется левая полукасательная в случае

$$D^- f(x_0) = +\infty(-\infty) : x = x_0,\ y \leq f(x_0)\ (y \geq f(x_0))$$

(рис. 22).

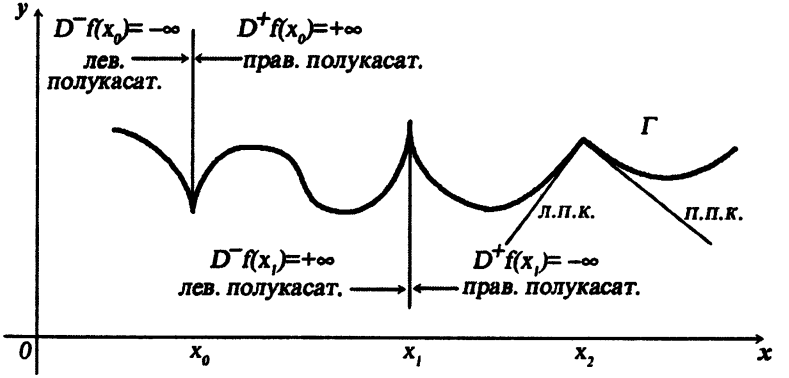


Рис. 22

§ 4. Правила дифференцирования

Теорема. *Пусть* $u(x)$ *и* $v(x)$ *определены в* $U(x_0)$ *и* $u, v \in \mathcal{D}(x_0)$. *Тогда:*

1) $(u + v)' = u' + v'$;

2) $(c \cdot u)' = c \cdot u'$ *для постоянной* $c \neq 0$;

3) $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$;

4) $\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v'}$, *если* $v(x_0) \neq 0$.

Доказательство. Давая аргументу приращение Δx, имеем:

1) $\Delta(u + v) = (u + \Delta u + v + \Delta v) - (u + v) = \Delta u + \Delta v$, откуда $(\Delta(u + v)/\Delta x = \Delta u/\Delta x + \Delta v/\Delta x\ (\Rightarrow)\ (u + v)' = u' + v')$;

2) $(\Delta(c \cdot u) = c \cdot \Delta u) \Rightarrow (\Delta(c \cdot u)/\Delta x = c \cdot \Delta u/\Delta x) \Rightarrow ((c \cdot u)' = c \cdot u')$;

3) $(\Delta(u\cdot v)=(u+\Delta u)\cdot(v+\Delta v)-u\cdot v=v\cdot\Delta u+u\Delta v+\Delta u\cdot\Delta v)\Rightarrow$ $(\Delta(u\cdot v)/\Delta x=v\cdot\Delta u/\Delta x+u\cdot\Delta v/\Delta x+\Delta v\cdot\Delta u/\Delta x)\Rightarrow((u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$ (поскольку $v\in\mathcal{D}(x_0))\Rightarrow((v\in C(x_0)))\Rightarrow(\Delta v\to 0$ при $\Delta x\to 0)$, а $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u/\Delta x=u'$);

4) $\Delta(u/v)=(u+\Delta u)/(v+\Delta v)-u/v=(v\Delta u-u\Delta v)/v\cdot(v+\Delta v)\Rightarrow$ $\Delta(u/v)/\Delta x=(v\cdot\Delta u/\Delta x-u\cdot\Delta v/\Delta x)/v\cdot(v+\Delta v)$.

Если $v(x_0)\neq 0$, то $v\in(x_0)\Rightarrow v(x_0)+\Delta v\neq 0$ при достаточно малом Δx, а потому, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, имеем

$$(u/v)'=(v\cdot u'-u\cdot v')/v^2.$$

Теорема (о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций). *Пусть* $f: U(x_0)\to V(y_0)$ (*где* $y_0=f(x_0)$) *и* $g: V(y_0)\to\mathbf{R}$. *Пусть* $f\in\mathcal{D}(x_0)$ *и* $g\in\mathcal{D}(y_0)$. *Тогда* $h=g\circ f\in\mathcal{D}(x_0)$, *причем* $\mathrm{D}\,h(x_0)=\mathrm{D}\,g(f(x_0))\cdot\mathrm{D}\,f(x_0)$.

Доказательство. Поскольку $f\in\mathcal{D}(x_0)$, то в окрестности $U(x_0)$ имеет место представление ($\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$):

$$\Delta y=\mathrm{D}\,f(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)|\Delta x|,$$

где $\alpha\in C(0)$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=\alpha(0)=0$.

Заметим, что при $x_0+\Delta x\in U(x_0)$ имеем $y_0+\Delta y\in V(y_0)$, где $V(y_0)$ – область определения функции $z=-g(y)$. Далее, $g\in\mathcal{D}(y_0)$, поэтому в окрестности $V(y_0)$ имеет место представление ($\Delta z=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)$): $\Delta z=\mathrm{D}\,g(y_0)\cdot\Delta y+\beta(\Delta y)\cdot|\Delta y|$, где $\beta\in C(0)$ и $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\beta(\Delta y)=\beta(0)=0$. Заметим, что $f\in\mathcal{D}(x_0)\Rightarrow f\in C(x_0)$, поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\Rightarrow(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\beta(\Delta y)=\beta(0)=0)$ (обратите внимание на то, что при $\Delta x\neq 0$ может быть $\Delta y=0$, и тогда в силу нашего соглашения $\beta(\Delta y)|_{\Delta y=0}=\beta(0)=0$). Но тогда в окрестности $U(x_0)$ имеет место представление

$$\Delta z=\mathrm{D}\,g(y_0)\cdot\mathrm{D}\,f(x_0)\cdot\Delta x+[\mathrm{D}\,g(y_0)\cdot\alpha(\Delta x)\cdot|\Delta x|+$$

$$+\beta(\Delta y)\cdot|\Delta y|]\equiv\mathrm{D}\,g(y_0)\cdot\mathrm{D}\,f(x_0)\cdot\Delta x+\gamma(\Delta x).$$

Но

$$|\gamma(\Delta x)|\leq(|\mathrm{D}\,g(y_0)|\cdot|\alpha(\Delta x)|+|\beta(\Delta y)|(|\mathrm{D}\,f(x_0)|+$$

$$+|\alpha(\Delta x)|)|\Delta x|\equiv r(\Delta x)\cdot|\Delta x|,$$

откуда в силу соотношений $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta y)=\beta(0)=0$ имеем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}r(\Delta x)=0$, т. е. $\gamma(\Delta x)=o(\Delta x)$ $(\Delta x\to 0)$.

Итак, в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеет место представление $(h(x)=g(f(x))$, $h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=\Delta z)$ $h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=$

$\mathrm{D}\,g(f(x_0)) \cdot \mathrm{D}\,f(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$, т. е. $h = g \circ f \in \mathcal{D}(x_0)$, причем в силу теоремы единственности дифференциала имеем

$$\mathrm{D}\,h(x_0) = \mathrm{D}\,g(f(x_0)) \cdot \mathrm{D}\,f(x_0).$$

Замечание. В дифференциальных обозначениях теорема о производной сложной функции выражается следующим образом: поскольку $f \in \mathcal{D}(x)$, то дифференциал функции f имеет вид $dy = f'(x)dx$, далее, поскольку $g \in \mathcal{D}(y)$, то дифференциал функции g имеет вид $dz = g'(y)dy$.

В силу доказанной теоремы видим, что дифференциал сложной функции $h = g \circ f$ получается из дифференциала функции g, если заменить y на $f(x)$, а dy на дифференциал $f'(x)dx$, т. е. $dz = h'(x)dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx$.

Замечание (об инвариантности формы 1-го дифференциала). Если $g \in \mathcal{D}(y)$, то первый дифференциал функции g записывается в форме $dz = g'(y)dy$ (при этом аргумент y есть независимая переменная). Пусть теперь $y = f(x)$, $f \in \mathcal{D}(x)$ и $dy = f'(x)dx$, тогда по теореме (с производной сложной функции) для 1-го дифференциала функции g имеем запись: $dz = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx \Rightarrow dz = g'(y)dy$, т. е. 1-й дифференциал функции $z = g(y)$ и в случае $y = f(x)$ записывается в (прежней) форме $dz = g'(y)dy$.

Замечание. Форму для вычисления производной сложной функции $y = y(x)$, где $x = x(t)$, можно записать в виде

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Теорема (о производной обратной функции). *Пусть функция $f(x)$, определенная на промежутке $|a, b|$, строго монотонна и непрерывна на $|a, b|$. Тогда если функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0 \in (a, b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то обратная функция $\varphi(y) \equiv f^{-1}(y)$, определенная на промежутке $|c, d| = f(|a, b|)$, имеет производную в точке $y_0 = f(x_0) \in (c, d)$, причем $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$.*

Доказательство. Поскольку функция $f(x)$ строго монотонна и непрерывна на промежутке $|a, b|$, то в силу теоремы об обратной функции обратная функция $\varphi(y) \equiv f^{-1}(y)$ определена, строго монотонна и непрерывна на связном множестве $f(|a, b|)$, являющемся промежутком $|c, d|$ того же вида, что и $|a, b|$. Пусть x_0, $x_0 + \Delta x \in (a, b)$. Положим $y_0 = f(x_0)$, $x_0 = \varphi(y_0)$, тогда

$$y_0 = f(\varphi(y_0)) \in (c, d),\ y_0 + \Delta y = f(\varphi(y_0 + \Delta y)) \in (c, d),$$

откуда $\Delta y = f(\varphi(y_0 + \Delta y)) - f(\varphi(y_0))$. Заметим, что в силу строгой монотонности обратной функции $\varphi \equiv f^{-1}$ имеем

$$(\Delta y \neq 0) \Leftrightarrow (\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0) \neq 0),$$

причем поскольку $\varphi \equiv f^{-1} \in C(|c,d|)$, то

$$\lim_{\Delta y \to 0} (\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)) = 0.$$

Но тогда при $\Delta y \neq 0$ $\forall y_0 + \Delta y \in (c,d)$ имеем

$$\frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = 1 \Big/ \frac{\Delta y}{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)} =$$

$$= 1 \Big/ \frac{f(\varphi(y_0 + \Delta y)) - f(\varphi(y_0))}{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}.$$

Но $f \in \mathcal{D}(x_0)$, поэтому существует

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(\varphi(y_0 + \Delta y)) - f(\varphi(y_0))}{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)} = \mathrm{D} f(\varphi(y_0)) = f'(x_0) \neq 0$$

и, стало быть,

$$\exists \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0)}{\Delta y} = 1/\mathrm{D}\, f(x_0),$$

т. е. $\varphi \in \mathcal{D}(y_0)$, причем $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$, где $y_0 = f(x_0)$.

З а м е ч а н и е. Формулу для вычисления производной функции $x = x(y)$, обратной функции $y = y(x)$, можно записать в виде

$$\frac{dx}{dy} = 1 \Big/ \frac{dy}{dx}.$$

С л е д с т в и е. Пусть функция $x \to f(x)$ осуществляет гомеоморфизм промежутка $|a,b|$ на промежуток $|c,d| = f(|a,b|)$, а $y \to \varphi(y)$ есть обратный гомеоморфизм. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a,b)$ и $f'(x_0) \neq 0$, то функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную $\varphi'(y_0) = 1/f'(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из того, что $x \to f(x)$ есть гомеоморфизм промежутка $|a,b|$ на промежуток $|c,d| = f(|a,b|)$, следует, что внутренняя точка $x_0 \in (a,b)$ переходит во внутреннюю же точку $y_0 = f(x_0) \in (c,d)$, причем $f \in C(|a,b|)$ и функция $f(x)$ строго монотонна на $|a,b|$. Теперь остается применить теорему о производной обратной функции.

§ 5. Производные элементарных функций

1. Если c – постоянная, то (рассматривая постоянную функцию $x \to c$) имеем $c' = 0$.

2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $\forall n \in \mathbf{N}$.

3. $(\sin x)' = \cos x$.

4. $(\cos x)' = -\sin x$.

5. $(\operatorname{tg} x)' = 1/\cos^2 x$, $x \neq \pi/2 + \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

6. $(\operatorname{ctg} x)' = -1/\sin^2 x$, $x \neq \pi n$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

7. $(\arcsin x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$, $-1 < x < 1$.

Для доказательства формулы 7 воспользуемся теоремой о производной обратной функции $x = \sin y$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$, заметив, что $\cos y > 0$ $\forall y \in (-\pi/2, \pi/2)$, тогда

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = 1 / \cos y = 1 \Big/ \sqrt{1 - \sin^2 y} = 1 \Big/ \sqrt{1 - x^2}\,.$$

8. $(\arccos x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1, 1)$. В самом деле, $x = \cos y$, $y \in (0, \pi)$, причем $\sin y > 0$ $\forall y \in (0, \pi)$, тогда по теореме о производной обратной функции имеем

$$\frac{dy}{dx} = 1 \Big/ \frac{dx}{dy} = -1 / \sin y = -1 \Big/ \sqrt{1 - \cos^2} = -1/\sqrt{1 - x^2}.$$

9. $(\operatorname{arctg} x)' = 1/(1 + x^2)$.

10. $(\operatorname{arcctg} x)' = -1/(1 + x^2)$.

11. $(\ln x)' = 1/x$, $x > 0$. В самом деле, $(y = \ln x,\ x > 0) \Rightarrow (y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}(\ln(x + \Delta x) - \ln x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta x}{x} + o(\Delta x)\right) = 1/x)$.

12. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $0 < a$, $a \neq 1$; $(e^x)' = e^x$.
В самом деле, $y = e^x \Rightarrow x = \ln y$, и по теореме о производной обратной функции имеем $\dfrac{dy}{dx} = 1 \Big/ \dfrac{dx}{dy} = 1 \Big/ \dfrac{1}{y} = y = e^x$.

13. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$, $a \in \mathbf{R}$, $x \in (0, +\infty)$.
В самом деле, $y = x^\alpha \Rightarrow y = e^{\alpha \ln x}$, и по теореме о производной сложной функции имеем

$$y' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x}(\alpha \ln x)' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha / x = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

§ 6. Производные и дифференциалы высших порядков

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $x \to f(x)$ определена на множестве $M \subset (-\infty, +\infty)$. Полагаем $f^{(0)}(x) = f(x)$, $f^{(1)}(x) = f'(x) = \mathrm{D}f(x)$ для тех $x \in M$, для которых функция $f(x)$ дифференцируема, и, вообще, $\forall n \in \mathbf{N}_0$ (если функция $x \to f^{(n)}(x)$, где $f^{(n)}(x) \equiv \mathrm{D}^n f(x)$,*

определена в некоторой окрестности $U(x) \subset M$ *точки* $x \in \overset{\circ}{M}$*) полагаем* $\mathrm{D}^{n+1}f(x) = \mathrm{D}(\mathrm{D}^n f(x))$ *для тех точек* $x \in \overset{\circ}{M}$*, в которых функция* $\mathrm{D}^n f(x)$ *дифференцируема.*

З а м е ч а н и е. Для того чтобы n-я производная $f^{(n)}(x)$ существовала в точке $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, производная $f^{(n-1)}(x)$ должна существовать в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 и должна быть дифференцируемой в точке x_0. При этом функция $f^{(n-2)}(x)$ должна быть дифференцируемой в окрестности $U(x_0)$ (где существует производная $f^{(n-1)}(x)$).

П р и м е р. Пусть $y = 1/x \ \forall x \neq 0$. Тогда $y^{(n)} = (-1)^n \cdot n! \cdot x^{-n-1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Доказательство проводится по индукции: $y^{(0)} = x^{-1}$, $y' = (-1)^1 x^{-2}, \ldots, y^{(n+1)} = (y^{(n)})' = ((-1)^n \cdot n! \cdot x^{-(n+1)})' = (-1)^{n+1} \cdot (n+1)! \cdot x^{-(n+2)}$.

Т е о р е м а. *Если существует* $\mathrm{D}^n f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *и* c_i *- постоянные* $(i = 1, 2, \ldots, m)$*, то существует*

$$\mathrm{D}^n \left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \right),$$

причем

$$\mathrm{D}^n \left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{D}^n f_i(x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $a = 1$ теорема была доказана в § 4 гл. 5. При $n \geq 2$ по индукции имеем

$$\mathrm{D}^n \left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \right) = \mathrm{D} \left[\mathrm{D}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i f_i(x) \right) \right] =$$

$$= \mathrm{D} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{D}^{n-1} f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{D} \left(\mathrm{D}^{n-1} f_i(x) \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathrm{D}^n f_i(x).$$

Т е о р е м а (формула Лейбница). *Если существует* $\mathrm{D}^n u(x)$, $\mathrm{D}^n v(x)$, *то* $\mathrm{D}^n(u \cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{D}^k u \cdot \mathrm{D}^{n-k} v$, *где* $C_n^n = C_n^0 = 1$, $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $0! = 1! = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 1$ имеем

$$\mathrm{D}(u \cdot v) = \mathrm{D}u \cdot \mathrm{D}^0 v + \mathrm{D}^0 u \cdot \mathrm{D}v = \sum_{k=0}^{1} C_1^k \mathrm{D}^k u \cdot \mathrm{D}^{1-k} v.$$

Далее, проводим по индукции переход от n к $n+1$:

$$\mathrm{D}^{n+1}(u \cdot v) = \mathrm{D} \left(\mathrm{D}^n (u \cdot v) \right) = \mathrm{D} \left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{D}^k u \cdot \mathrm{D}^{n-k} v \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{D}^{k+1}u \cdot \mathrm{D}^{n-k}v + \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathrm{D}^k u \cdot \mathrm{D}^{n+1-k}v =$$

$$= (\text{делаем замены } k+1=m \text{ и } k=m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n+1} C_n^{m-1} \mathrm{D}^m u \cdot \mathrm{D}^{n+1-m}v + \sum_{m=0}^{n} C_n^m \mathrm{D}^m u \cdot \mathrm{D}^{n+1-m}v =$$

$$= C_n^0 \mathrm{D}^0 u \cdot \mathrm{D}^{n+1}v + \sum_{n=1}^{n} \left(C_n^{m-1} + C_n^m\right) \mathrm{D}^m u \cdot \mathrm{D}^{n+1-m}v +$$

$$+ C_n^n \mathrm{D}^{n+1}u \cdot \mathrm{D}^0 v \ \left(C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1,\ C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1,\right.$$

$$C_n^{m-1} + C_n^m = \frac{n!}{(m-1)!(n-m+1)!} + \frac{n!}{m!(n-m)!} =$$

$$\left. = \frac{n!(m+(n+1-m))}{m!(n+1-m)!} = \frac{n!(n+1)}{m!(n+1-m)} = C_{n+1}^m \right),$$

поэтому

$$\mathrm{D}^{n+1}(u \cdot v) = \sum_{m=0}^{n+1} C_{n+1}^m \mathrm{D}^m u \cdot \mathrm{D}^{n+1-m}v.$$

Пусть числовая функция $f(x)$ определена и дифференцируема в окрестности $U(x_0)$ (т. е. $f \in \mathrm{D}(U(x_0))$, так что $\forall x \in U(x_0)$ существует линейная форма (1-й дифференциал функции $f(x)$) $df(x) : h \to \mathrm{D}f(x) \times h \Rightarrow \mathrm{D}f(x) \cdot h = df(x)(h)$ $(df(x) = f'(x)dx)$, являющаяся функцией x в окрестности $U(x_0)$.

Определение. *Функция $f(x)$ называется дважды дифференцируемой в точке x_0 (запись: $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$), если $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$ и линейная форма $df(x) = \mathrm{D}f(x)dx$ дифференцируема (по x) в точке x_0, т. е. если существует постоянная A_2 такая, что $\forall h \in \mathbf{R}$ в окрестности $U(x_0)$ имеет место представление $\forall x_0 + k \in \dot{U}(x_0)$ $df(x_0+k)(h) - df(x_0)(h) = (A_2 k + o(k))h \equiv A_2 \cdot h \cdot k + h \cdot o(k)$ $(k \to 0)$.*

Билинейная форма $d^2 f(x_0) : (h, k) \to A_2 \cdot h \cdot k$ называется при этом 2-м дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0.

Замечание. Если $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$, то из представления

$$\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)h - \mathrm{D}f(x_0)h = (A_2 \Delta x +$$

$$+ o(\Delta x))h \ (\Delta x \to 0)\, \forall x_0 + \Delta x \in \dot{U}(x_0)$$

легко получаем

$$A_2 = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x) - \mathrm{D}f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{D}^2 f(x_0).$$

Следствие. Если $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$, то существует билинейная форма $d^2f(x_0) : (h,k) \to \mathrm{D}^2f(x_0) \cdot h \cdot k$ такая, что для 1-го дифференциала функции $f(x)$ в окрестности $U(x_0)$ $(\forall h \in \mathbf{R})$ имеет место представление $\forall x_0 + k \in \dot{U}(x_0)$:

$$df(x_0+k)(h) - df(x_0)(h) = \mathrm{D}^2f(x_0) \cdot h \cdot k + h \cdot o(k) \ (k \to 0).$$

Поскольку $dx : h \to 1 \cdot h$ $(dx : k \to 1 \cdot k)$, то применяется запись $d^2f(x_0) = \mathrm{D}^2f(x_0)dx^2$.

По индукции вводится следующее определение n-раз дифференцируемой функции.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная в окрестности $U(x_0)$, называется n-раз дифференцируемой в точке x_0, если $f \in \mathcal{D}^{(n-1)}(U(x_0))$ и существует полилинейная n-форма (n-й дифференциал) $d^nf(x_0) : (h_1, \ldots, h_n) \to \mathrm{D}^nf(x_0) \cdot h_1 \ldots h_n$ $(d^nf(x_0) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R})$ такая, что в окрестности $U(x_0)$ для $(n-1)$-го дифференциала $d^{n-1}f(x)$ имеет место представление*

$$(d^{n-1}f(x_0+h_n) - d^{n-1}f(x_0))(h_1, \ldots, h_{n-1}) =$$

$$= \mathrm{D}^nf(x_0) \cdot h_1 \cdots h_n + h_1 \cdots h_{n-1} \cdot o(h_n) \ (h_n \to 0)$$

$$\forall (h_1, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1},\ x_0 + h_n \in \dot{U}(x_0).$$

Очевидно, имеет место следующий критерий.

Теорема (критерий дифференцируемости). *Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$. Тогда* $(f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)) \Leftrightarrow$ *(существует конечная* $\mathrm{D}^nf(x_0)$*).*

Замечание. Если x – независимая переменная, то линейная форма $dx : h \to 1 \cdot h$ не зависит от x и поэтому $(p : x \to x,\ p'(x) = 1,\ p''(x) = 0)$ $d^2x : (h,k) \to 0 \cdot h \cdot k$, т. е. $d^mx \equiv 0\ \forall m \geq 2$.

Замечание. Если $u, v \in \mathcal{D}(x_0)$, то

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv \ (d(u \cdot v) = (u \cdot v)'dx =$$

$$u'dx \cdot v + u \cdot v'dx = du \cdot v + u \cdot dv).$$

Формальное правило. Пусть функция $x \to f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ и $x \in U(x_0)$. Тогда полагают $y = f(x)$; $d^0y = y$, $d^1y = dy$, $d^2y = d(dy)$, $\ldots$, $d^ny = d(d^{n-1})y$, $n \in \mathbf{N}$.

Для x, независимого переменного, имеем $d^kx \equiv 0\ \forall k \geq 2$, и тогда $dy = y'dx$, $d^2y = d(y'dx) = d(y')dx + y'd^2x = y''dx^2$, т. е. $d^ny = y^{(n)}dx^n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Таким образом, в случае x, независимого переменного, и $y = y(x)$ имеем обозначение

$$\mathrm{D}^ny \equiv y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}.$$

Замечание (об неинвариантности формы дифференциала высшего порядка). Если $x = x(t)$ есть дифференцируемая функция, то формула $d^n y = y^{(n)} dx^n$ при $n \geq 2$, вообще говоря, не имеет места. Например, $d^2 y = d(dy) = dy' \cdot dx + y' \cdot d^2 x = y'' dx^2 + y' d^2 x$, где $d^2 x = x''(t) dt^2 \neq 0$, т. е. $d^2 y = y'' dx^2 + y' d^2 x$, а не $d^2 y = y'' dx^2$.

Замечание. Если u, v, $u_i \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$ и c_1 $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – постоянные, то при x, независимой переменной, имеем $d^n \left(\sum\limits_{i=1}^{m} c_i u_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i d^n u_i$, а также $d^n (u \cdot v) = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k d^k u \cdot d^{n-k} v$ (формула Лейбница).

Пример.

$$u = x^3,\ v = e^x;\ d^n (x^3 \cdot e^x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k (x^3) \cdot d^{n-k} (e^x),$$

но

$$d^m e^x = e^x dx^m\ \forall m \in \mathbf{N};\ d(x^3) = 3x^2 dx,\ d^2(x^3) = 6x dx^2,$$

$$d^3(x^3) = 6dx^3,\ d^k(x^3) = 0\ \forall k \geq 4,\ \Rightarrow d^n(x^3 e^x) =$$

$$= e^x \left(x^3 + 3nx^2 + \frac{6n(n-1)}{2!} x + \frac{6n(n-1)(n-2)}{3!} \right) dx^n.$$

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на (a, b). Скажем, что $f(x)$ m-раз непрерывно дифференцируема на (a, b) (запись: $f \in C^{(m)}((a, b))$), если $f \in \mathcal{D}^{(m)}((a, b))$ и $\mathrm{D}^m f \in C(a, b)$).*

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Скажем, что функция $f(x)$ кусочно m-раз непрерывно дифференцируема на $[a, b]$, если функция $f(x)$ может иметь на $[a, b]$ разрывы только 1-го рода и существуют такие точки $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$, что функции*

$$f_i(x) = \begin{cases} f(a_i + 0), & x = a_i, \\ f(x), & x \in (a_i, a_{i+1}), \\ f(a_{i+1} - 0), & x = a_{i+1}; \end{cases} \quad i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

таковы, что $f_i \in C^{(m)}([a_i, a_{i+1}])$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ (в концах a_i и a_{i+1} отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ нужно рассматривать соответствующие односторонние производные порядка k $(k = 1, 2, \ldots, m)$).

§ 7. Теоремы о конечных приращениях

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M, тогда внутренняя точка $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x)$ на множестве M, если существует окрестность $U(x_0) \subset M$ такая, что*

$$f(x) \leq f(x_0)\ (f(x) \geq f(x_0))\ \forall x \in \dot{U}(x_0). \tag{7.1}$$

Если в (7.1) вместо $\leq$ ($\geq$) *стоит* $<$ ($>$), *то внутренняя точка* $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ *называется точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума) функции* $f(x)$ *на множестве* M.

Замечание. Если внутренняя точка $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ – точка локального максимума или локального минимума функции $f(x)$ на множестве M, то $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ называется точкой локального экстремума функции $f(x)$ на множестве M.

Замечание. Если функция $x \to f(x)$ достигает в точке $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ своей точной верхней грани на M, то функция $f(x)$ имеет в этой точке локальный максимум, являющийся абсолютным максимумом функции $f(x)$ на множестве M. Обратное, вообще говоря, неверно.

Пример. Для функции $f(x)$ с графиком, изображенным на рис. 23, $f(1/4) = 1/2$ есть значение локального максимума, а $f(1/2) = 1/4$ есть значение локального минимума, но

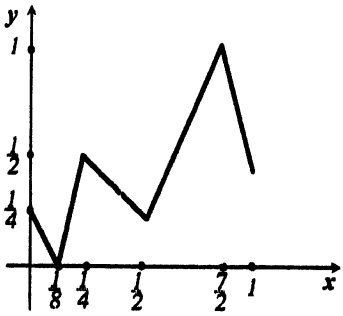


Рис. 23

$$f(1/8) = 0 = \inf_{[0,1]} f(x) \neq 1/4 = f(1/2);$$

$$f(7/8) = 1 = \sup_{[0,1]} f(x) \neq 1/2 = f(1/4).$$

Теорема Ферма. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на промежутке* $|a,b|$ *и имеет в точке* $x_0 \in (a,b)$ *локальный экстремум. Пусть функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0, *как правую, так и левую производную (конечные или бесконечные).*

Тогда $\mathrm{D}^+ f(x) \leq 0$, $\mathrm{D}^- f(x_0) \geq 0$, *если* x_0 *– точка локального максимума, и* $\mathrm{D}^+ f(x_0) \geq 0$, $\mathrm{D}^- f(x_0) \leq 0$, *если* x_0 *– точка локального минимума. В частности, если функция* $f(x)$ *имеет в точке локального экстремума* $x_0 \in (a,b)$ *производную (конечную или бесконечную), то* $\mathrm{D}f(x_0) = 0$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in (a,b)$ есть точка локального максимума функции $f(x)$ в промежутке $|a,b|$. Тогда существует окрестность $U(x_0) \subset |a,b|$ такая, что $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, и при $x - x_0 > 0$ тогда имеем $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, поэтому

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{D}^+ f(x_0) \leq 0.$$

Аналогично доказывается, что $\mathrm{D}^- f(x_0) \geq 0$. Если в точке $x_0 \in (a,b)$ существует производная $\mathrm{D}f(x_0)$ (конечная или бесконечная), тогда необходимы равенства $\mathrm{D}f(x_0) = \mathrm{D}^+ f(x_0) = \mathrm{D}^- f(x_0)$, но тогда, очевид-

но, $(f'(x_0) \le 0) \wedge (f'(x_0) \ge 0) \Rightarrow f'(x_0) = 0$.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$ и имеет в x_0 локальный экстремум, то $f'(x_0) = 0$ и касательная к графику функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси абсцисс Ox; обратное, вообще говоря, неверно.

П р и м е р. Функция $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$, график которой изображен на рис. 24, имеет в точке $x_0 = 0$ локальный минимум, и касательная к графику этой функции в точке $(0, 0)$ есть ось Ox.

П р и м е р. Функция $y = x^3$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (график которой изображен на рис. 25) такова, что ось Ox является касательной к ее графику Г в точке $(0, 0)$. Однако наша функция не имеет в точке $x_0 = 0$ локального экстремума.

Т е о р е м а Р о л л я. *Пусть непрерывная на отрезке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *имеет в каждой точке интервала* (a, b) *производную* $f'(x)$, *конечную, или равную* $+\infty$, *или равную* $-\infty$. *Если при этом* $f(a) = f(b) = 0$, *то существует, по крайней мере одна, точка* $c \in (a, b)$ *такая, что* $f'(c) = 0$.

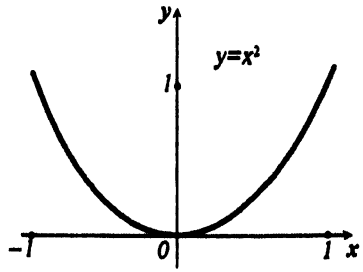


Рис. 24

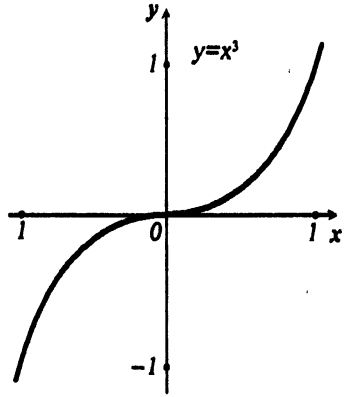


Рис. 25

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x) \equiv 0$ на $[a, b]$, то теорема Ролля очевидна. Пусть функция $f(x)$ не является тождественным нулем, тогда $f(x)$ принимает по крайней мере одно значение > 0 или хотя бы одно значение < 0.

Рассмотрим, например, первый случай. Тогда $f \in C([a, b]) \Rightarrow M = \sup\limits_{[a,b]} f(x) > 0$. Поскольку $f \in C([a, b])$, то по теореме Вейерштрасса существует $c \in [a, b]$ такая, что $f(c) = M > 0$. Но в силу условия $f(a) = f(b) = 0$ имеем $c \in (a, b)$. Но тогда точка $c \in (a, b)$ есть точка локального максимума функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, причем в силу условий теоремы Ролля существует $f'(c)$ (конечная или бесконечная). По теореме Ферма имеем $f'(c) = 0$.

З а м е ч а н и е. Условие о существовании конечной или бесконечной производной у непрерывной функции в условиях теоремы Ролля нельзя заменить на существование односторонних производных $\mathrm{D}^+f(x)$ и $\mathrm{D}^-f(x)$. В самом деле, пусть $f(x) = 1 - |x|$, $x \in [-1, 1]$ (рис. 26). Тогда $f(-1) = f(1) = 0$ и $\forall x \in (-1, 1)$ $\exists \mathrm{D}^+f(x)$, $\mathrm{D}^-f(x)$, причем $\mathrm{D}^+f(0) = -1$, $\mathrm{D}^-f(0) = 1$. Однако не существует точки $c \in (-1, 1)$ такой, что $\mathrm{D}^+f(c) = \mathrm{D}^-f(c) = \mathrm{D}f(c) = 0$.

С л е д с т в и е. Между двумя соседними нулями дифференцируемой на интервале функции лежит по меньшей мере один нуль ее производной (рис. 27).

С л е д с т в и е. Если $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ $(a_n \neq 0)$ – многочлен n-й степени, то уравнение $\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет не более n решений.

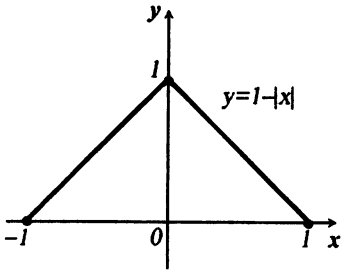


Рис. 26

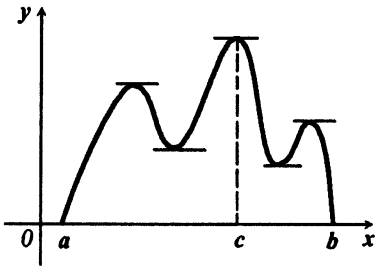


Рис. 27

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим от противного, что уравнение $\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет не меньше $n+1$ (действительных) решений $q_1 < q_2 < \ldots < q_n < q_{n+1}$, $\mathcal{P}_n(q_i) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$. Тогда производная $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ является многочленом степени $n-1$ и по теореме Ролля $\forall i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $\exists b_i$ такое, что $q_i < b_i < q_{i+1}$ и $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(b_i) = 0$, т. е. уравнение $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет не меньше n действительных решений. Продолжая дифференцировать и применять теорему Ролля, видим, что для $m \leq n$ $\mathrm{D}^m\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=m}^{n} k(k-1)\ldots(k-m+1)a_k x^{k-m}$, причем уравнение $\mathrm{D}^m\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет не меньше $n+1-m$ решений. В частности, при $m = n$ это уравнение должно иметь не меньше одного решения, в то время как $\mathrm{D}^n\mathcal{P}_n(x) = n! \cdot a_n \neq 0$, поэтому уравнение $\mathrm{D}^n\mathcal{P}_n(x) = 0$ вообще не имеет решений. Противоречие.

Таким образом, уравнение $\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет не больше n решений.

С л е д с т в и е. Если $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_n \neq 0$, $n \geq 2$, и уравнение $\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет ровно n различных (действительных) решений, то уравнение $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(x) = 0$ имеет точно $n-1$ (действительных) решений.

Доказательство. Производная $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(x)$ есть многочлен степени $n-1$ и в силу предыдущего следствия имеет не больше $n-1$ нулей. Поскольку $\mathcal{P}_n(x)$ имеет ровно n нулей $q_1 < q_2 < \ldots < q_{n-1} < q_n$, а по теореме Ролля между двумя соседними нулями $q_i < q_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ многочлена $\mathcal{P}_n(x)$ существует по меньшей мере один нуль $b_i \in (q_i, q_{i+1})$ производной $\mathrm{D}\mathcal{P}_n(x)$, то этих нулей не меньше $n-1$, т. е. $n-1$.

Теорема Лагранжа (о формуле конечных приращений). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$, $f \in C([a,b])$ и $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $f'(x)$. Тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что* $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \lambda(x-a)$. Тогда $F(a) = 0$. Выберем постоянную λ так, чтобы иметь $F(b) = 0$, т. е. $f(b) - f(a) - \lambda(b-a) = 0 \Rightarrow \lambda = (f(b)-f(a))/(b-a)$. Тогда $F \in C([a,b])$, $F(a) = F(b) = 0$ и $\forall x \in (a,b)$ существует (конечная или бесконечная) $F'(x) = f'(x) - \lambda$. По теореме Ролля $\exists c \in (a,b)$ такая, что $F'(c) = 0 \Rightarrow (f'(c) = \lambda) \Rightarrow \left(f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$.

Замечание. Формула конечных приращений из теоремы Лагранжа часто записывается в виде

$$f(x+h) - f(x) = \mathrm{D}f(x+\theta h)h,$$

$$\theta \in (0,1); x, x+h \in [a,b].$$

Пример. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1,1]$, $f \in C([-1,1])$; $\forall x \neq 0\ \exists \mathrm{D}f(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3}$, $\mathrm{D}f(0) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x}}{x} = +\infty$; $f(1) - f(-1) = \mathrm{D}f(c)\cdot 2$, где $c = \pm 3^{-3/2}$.

Замечание. В теоремах Ролля и Лагранжа условие о существовании конечной или бесконечной производной (равной $+\infty$ или $-\infty$) $\forall x \in (a,b)$ нельзя заменить на условие существования конечной или бесконечных односторонних производных ($\mathrm{D}^+f(x) = +\infty$ $(-\infty)$, $\mathrm{D}^-f(x) = -\infty$ $(+\infty)$, причем $\mathrm{D}^+f(x) \neq \mathrm{D}^-f(x)$).

Пример (рис. 28). $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, $x \in [-1,1]$, $\mathrm{D}f(x) = \dfrac{2}{3}x^{-1/3}$ $\forall x \neq 0$, $\mathrm{D}^+f(0) = +\infty$, $\mathrm{D}^-f(0) = -\infty$; $f(1) - f(-1) = 0$ и не существует точки $c \in [-1,1]$ такой, что $\mathrm{D}f(c) = 0$, т. е. ни теорема Ролля, ни теорема Лагранжа не верны для рассматриваемой функции f.

Из теоремы Лагранжа вытекает следующая

Теорема (обобщенная теорема Ролля). *Пусть $f \in C([a,b])$ и $\forall x \in (a,b)$ существует (конечная или бесконечная) производная $f'(x)$, причем $f(a) = f(b)$. Тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что* $f'(c) = 0$.

Замечание. Если $f \in C(U(x_0))$ и $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ существует конечная или бесконечная производная $f'(x)$, то $\forall x = x_0 + \Delta x \in \dot{U}(x_0)$ $\exists \vartheta \in (0,1)$ такое, что $\Delta y = \mathrm{D}f(x_0 + \vartheta \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$.

Доказательство. Пусть $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, причем $[x_0, x_0 + \Delta x] \subset U(x_0)$ при $\Delta x > 0$ или $[x_0 + \Delta x, x_0] \subset U(x_0)$ при $\Delta x < 0$. Применяя теорему Лагранжа, найдем при $\Delta x > 0$ $c \in (x_0, x_0 + \Delta x)$ (т. е. $c = x_0 + \vartheta \Delta x$ при $0 < \vartheta < 1$ такое, что $\Delta y = f'(c)\Delta x$) $\Rightarrow$ $\Delta y = \mathrm{D}f(x_0 + \vartheta \Delta x) \cdot \Delta x$ (при $\Delta x < 0$ рассуждения аналогичны).

Замечание (о геометрическом смысле теоремы Лагранжа). Если функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ всем условиям теоремы Лагранжа, то на графике $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(x),\ a \le x \le b\}$ функции $f(x)$ существует точка $C = (c, f(c)) \in \Gamma$ (где $a < c < b$) такая, что касательная к графику Γ в этой точке параллельна секущей, соединяющей точки $A = (a, f(a)) \in \Gamma$ и $B = (b, f(b)) \in \Gamma$ (рис. 29).

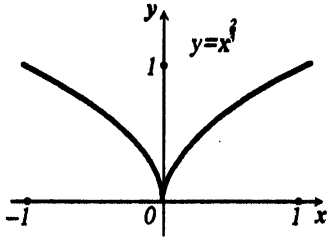


Рис. 28

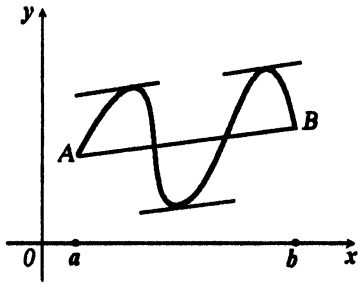


Рис. 29

Следствие 1. Если $f \in C([a, b])$ и $f \in \mathcal{D}((a, b))$, причем существует постоянная $L > 0$ такая, что $|\mathcal{D}f(x)| \le L$ $\forall x \in (a, b)$, то $|f(x_1) - f(x_2)| \le L|x_1 - x_2|$ $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$.

Доказательство. Достаточно применить к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2] \subset [a, b]$ теорему Лагранжа, в силу которой существует $c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c)(x_2 - x_1)$, но тогда $(|\mathrm{D}f(x)| \le L\ \forall x \in (a, b)) \Rightarrow (|f(x_2) - f(x_1)| \le L|x_1 - x_2|)$.

Следствие 2. Пусть $f \in C([a, b])$ и $f(x)$ дифференцируема $\forall x \in (a, b) \setminus K_n$, где $K_n \subset (a, b)$ - множество, состоящее не более чем из n точек. Пусть существуют постоянные m и M такие, что $m \le f'(x) \le M$ $\forall x \in (a, b) \setminus K_n$. Тогда имеет место оценка

$$m \le \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \le M.$$

Доказательство. Пусть $K_n = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset (a, b)$, причем $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$. Заметим, что $f \in C([a, b])$ $\Rightarrow$ $f \in C([x_i, x_{i+1}])$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и $\forall x \in (x_i, x_{i+1})$ $\exists f'(x)$ (причем

$m \le f'(x) \le M$). Применяя к функции $f(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ теорему Лагранжа, видим, что $\exists c_i \in (x_i, x_{i+1})$ $(i = 0, 1, \dots, n)$ такие, что $f(x_{i+1}) - f(x_i) = f'(c_i)(x_{i+1} - x_i)$, и в силу оценки $m \le f'(c_i) \le M$ имеем неравенства $m(x_{i+1} - x_i) \le f(x_{i+1}) - f(x_i) \le M(x_{i+1} - x_i)$ $(i = 0, 1, \dots, n)$, откуда, суммируя по i, получаем оценки

$$m\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i) = m(b-a) \le \sum_{i=0}^{n}(f(x_{i+1}) - f(x_i)) = f(b) - f(a) \le$$

$$\le M\sum_{i=0}^{n}(x_{i+1} - x_i) = M(b-a) \Rightarrow m(b-a) \le f(b) - f(a) \le M(b-a).$$

Т е о р е м а (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). *Пусть* $f \in C^{(m)}(U(x_0))$ *и* $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ *существует конечная или бесконечная производная* $\mathrm{D}^{m+1} f(x)$. *Тогда* $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ $\exists c \in (x_0, x)$ (*или* $\exists c \in (x, x_0)$) *такая, что имеет место представление*

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(x - x_0)^k \mathrm{D}^k f(x_0) +$$

$$+ \frac{1}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1} \mathrm{D}^{m+1} f(c).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем вспомогательную функцию

$$F(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(x-t)^k \mathrm{D}^k f(t) - \frac{1}{(m+1)!}(x-t)^{m+1}\lambda.$$

Тогда, считая для определенности $x > x_0$, $[x_0, x] \subset U(x_0)$, имеем

$$F \in C([x_0, x]) \text{ и } \forall t \in (x_0, x)\ \exists F'(t) = -f'(t) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(k-1)!}(x-t)^{k-1} f^{(k)}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}(x-t)^k f^{(k+1)}(t) + \frac{1}{m!}(x-t)^m \lambda =$$

$$= -f'(t) + f'(t) + \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{l!}(x-t)^{l+1} f^{(l+1)}(t) -$$

$$- \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!}(x-t)^k f^{(k+1)}(t) - \frac{1}{m!}(x-t)^m f^{(m+1)}(t) + \frac{1}{m!}(x-t)^m \lambda,$$

т. е. существует (конечная или бесконечная) производная

$$\mathrm{D}F(t) = -\frac{1}{m!}(x-t)^m \mathrm{D}^{m+1} f(t) + \frac{1}{m!}(x-t)^m \lambda.$$

Далее, $F(x) = 0$. Выберем постоянную λ так, чтобы иметь $F(x_0) = 0$. Тогда в силу теоремы Ролля, примененной к функции $F(t)$ на отрезке $[x_0, x]$, видим, что существует $c \in (x_0, x)$ такая, что $\mathrm{D}F(c) = 0$, откуда имеем

$$\frac{1}{m!}(x-c)^m \cdot \lambda = \frac{1}{m!}(x-c)^m \mathrm{D}^{m+1} f(c) \Rightarrow \lambda = \mathrm{D}^{m+1} f(c).$$

Теперь формула Тейлора (с остаточным членом в форме Лагранжа) вытекает из равенства $F(x_0) = 0$ при $\lambda = \mathrm{D}^{m+1} f(c)$.

З а м е ч а н и е. Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа часто записывают в виде $(\forall x + h \in \dot{U}(x))$

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{m} \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{h^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(x + \vartheta h),$$

где ϑ – некоторое число из интервала $(0, 1)$.

Т е о р е м а (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{(m-1)}(U(x_0))$ $(m = 1, 2, \ldots)$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0)$. *Тогда в проколотой окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *имеет место представление*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \mathrm{D}^k f(x_0) + o((x-x_0)^m) \, (x \to x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $m = 1$ формула Тейлора справедлива, поскольку $f \in \mathcal{D}(x_0) \Rightarrow f(x) = f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$ $(x \to x_0)$.

При $m \geq 2$ введем так называемый многочлен Тейлора

$$\mathcal{P}_m(x; f, x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{m} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \mathrm{D}^k f(x_0)$$

и отметим, что при $1 \leq p \leq m$

$$\mathrm{D}^p \mathcal{P}_m(x; f, x_0) = \sum_{k=p}^{m} \frac{k(k-1)\ldots(k-p+1)}{k!} (x-x_0)^{k-p} \mathrm{D}^k f(x_0).$$

Но при $p \leq k \leq m$ имеем

$$(x-x_0)^{k-p}|_{x=x_0} = \begin{cases} 1, & k = p, \\ 0, & k \neq p, \end{cases}$$

т. е., полагая $x = x_0$, имеем

$$\mathrm{D}^p \mathcal{P}_m(x_0; f, x_0) = \frac{p!}{p!} \mathrm{D}^p f(x_0) = \mathrm{D}^p f(x_0) \, (p = 1, 2, \ldots, m)$$

и $\mathcal{P}_m(x_0; f, x_0) = f(x_0)$.

Таким образом, если ввести вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) - \mathcal{P}_m(x; f, x_0),\ x \in U(x_0),$$

то $f \in \mathcal{D}^{(m-1)}(U(x_0)) \Rightarrow g \in \mathcal{D}^{(m-1)}(U(x_0))$ (т. е. $g \in C^{(m-2)}(U(x_0)) \wedge \mathcal{D}^{(m-1)}(U(x_0))$), а $f \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0) \Rightarrow g \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0)$, причем $\mathrm{D}^p g(x_0) = 0$ $(p = 0, 1, \ldots, m)$. Применим к функции $g(x)$ в окрестности $U(x_0)$ формулу Тейлора (с заменой $m \geq 2$ на $m - 2$) с остаточным членом в форме Лангранжа. Тогда при $m \geq 2$ имеем представление в $\dot{U}(x_0)$

$$g(x) = \frac{(x - x_0)^{m-2}}{(m-1)!} \mathrm{D}^{m-1} g(x_0 + \vartheta(x - x_0)),\ 0 < \vartheta < 1,$$

где $\vartheta \equiv \vartheta(x)$ зависит от $(x - x_0)$.

Но $g \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0) \Rightarrow \mathcal{D}^{m-1} g \in \mathcal{D}(x_0)$, и поэтому имеем представление

$$\mathrm{D}^{m-1} g(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = \mathrm{D}^{m-1} g(x_0) + \vartheta(x - x_0)\mathrm{D}^m g(x_0) +$$

$$\cdot + o(x - x_0)\ (x \to x_0),$$

отсюда в силу отмеченных ранее равенств $\mathrm{D}^{m-1} g(x_0) = \mathrm{D}^m g(x_0) = 0$ имеем в $\dot{U}(x_0)$

$$\mathrm{D}^{m-1} g(x_0 + \vartheta(x - x_0)) = o(x - x_0)\ (x \to x_0),$$

т. е. в $\dot{U}(x_0)$ имеет место представление $g(x) = o((x - x_0)^m)$ $(x \to x_0)$. Но тогда доказано, что в проколотой окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеет место представление $f(x) = \mathcal{P}_m(x; f, x_0) + o((x - x_0)^m)$ $(x \to x_0)$. Итак, формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано доказана.

Приведем основные асимптотические разложения по формуле Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано) для простейших элементарных функций.

1) $e^x = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)\ (x \to 0)$.

В самом деле, пусть $f(x) = e^x$, тогда $\mathrm{D}^k f(x) = e^x \Rightarrow \mathrm{D}^k f(0) = 1$ $\forall k \in \mathbb{N}_0$.

Применение формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано дает искомое разложение.

2) $\sin x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})\ (x \to 0)$.

В самом деле, $f(x) = \sin x$, $\mathrm{D}\sin x = \cos x = \sin(x + \pi/2)$, $\mathrm{D}^k f(x) = \sin(x + k\pi/2)$, $\mathrm{D}^m f(0) = \sin \dfrac{m\pi}{2} = \begin{cases} (-1)^k \text{ при } m = 2k+1, \\ 0 \text{ при } m = 2k. \end{cases}$

3) $\cos x = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^k \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})\ (x \to 0)$.

В самом деле, $f(x) = \cos x$, $\mathrm{D}f(x) = -\sin x = \cos(x + \pi/2)$, $\mathrm{D}^m f(x) = \cos(x + m\pi/2)$, $\mathrm{D}^m f(0) = \cos(m\pi/2) = \begin{cases} (-1)^k, & m = 2k, \\ 0, & m = 2k+1. \end{cases}$

4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$ $(x \to 0)$.

В самом деле, $f(x) = \ln(1+x)$, $\mathrm{D}f(x) = (1+x)^{-1}$, $\mathrm{D}^2 f(x) = (-1)^1 \times 1!(1+x)^{-2}$, $\mathrm{D}^m f(x) = (-1)^{m-1}(m-1)!(1+x)^{-m}$ $(m \geq 1)$, $\mathrm{D}^m f(0) = (-1)^{m-1}(m-1)!$ $(m \geq 1)$, $f(0) = 0$.

5) $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$ $(x \to 0)$.

В самом деле, $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\mathrm{D}f(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $\mathrm{D}^k f(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, $\mathrm{D}^k f(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)$ $(k \geq 1)$.

6) $\operatorname{sh} x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ $(x \to 0)$.

В самом деле, $\mathrm{D}\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$, $\mathrm{D}\operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$, $\mathrm{D}^{2k} \operatorname{sh} x = \operatorname{sh} x$, $\mathrm{D}^{2k+1} \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh}(0) = 0$, $\operatorname{ch}(0) = 1$.

7) $\operatorname{ch} x = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x^{2k}/(2k)! + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$.

В самом деле, $\mathrm{D}^{2k} \operatorname{ch} x = \operatorname{ch} x$, $\mathrm{D}^{2k+1} \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x$, $f(x) = \operatorname{ch} x$, $\mathrm{D}^m f(x) = \begin{cases} 1, & m = 2k, \\ 0, & m = 2k+1 \ (m \geq 1). \end{cases}$

Т е о р е м а К о ш и (о конечных приращениях). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, b]$, причем:*

1) $f \in C([a,b])$ и $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$;

2) $g \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$;

3) $\mathrm{D}g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$. Тогда $\exists c \in (a,b)$ такое, что $\mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условия 3) $\mathrm{D}g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ при выполнении условия 2) $d \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ в силу теоремы Ролля (в обобщенной формулировке) имеем $g(a) \neq g(b)$. Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - \lambda g(x)$ и выберем постоянную λ так, чтобы выполнялось равенство $F(a) = F(b)$. Тогда

$$(f(a) - \lambda g(a) = f(b) - \lambda g(b)) \Rightarrow (\lambda = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a))),$$

и поскольку $F \in C([a,b])$, $F(b) = F(a)$ и $\forall t \in (a,b)$, в силу условий 1) и 2) существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}f(x) - \lambda \mathrm{D}g(x)$.

По теореме Ролля (в обобщенной формулировке) $\exists c \in (a,b)$ такая, что $\mathrm{D}F(c) = 0$, т. е. $(\mathrm{D}f(c) - \lambda \mathrm{D}g(c) = 0) \Rightarrow (\mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c) = \lambda) \Rightarrow (\mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c) = (f(b) - f(a))/(g(b) - g(a)))$.

З а м е ч а н и е. Условия 1) и 2) в теореме Коши (о конечных приращениях) можно заменить на условия 1') $f \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ и

2') $g \in C([a,b])$ и $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}g(x)$ (при выполнении условия 3)). Однако при выполнении условий 1), 2') и 3) проведенное выше доказательство теоремы Коши не проходит (почему?).

§ 8. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей

Т е о р е м а 1 (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида $0/0$). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на интервале (a,b), причем: 1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0$; 2) $f, g \in \mathcal{D}((a,b))$ и $\mathrm{D}g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{\mathrm{D}f(x)}{\mathrm{D}g(x)} = A$, где A конечно или символ $+\infty$ $(-\infty)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся определением предела функции (при $x \to a+0$) по Гейне. Пусть (x_n) – любая последовательность Гейне, связанная с точкой a, т. е. $a < x_n < b$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$. Докажем, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = A$.

Рассмотрим отрезок $[a, x_n]$ и доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке $x = a$, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на отрезке $[a, x_n]$ и удовлетворяют следующим условиям 1) – 3): 1) $f, g \in C([a, x_n])$. В самом деле, поскольку $\forall x \in (a,b)$ $\exists f'(x), g'(x)$, то $f, g \in C((a,b))$, а из соотношений ($\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = 0 = f(a)$, $\lim\limits_{x\to a+0} g(x) = 0 = g(a)$) $\Rightarrow$ ($f, g \in C(a)$) $\Rightarrow$ ($f, g \in C([a,b))$); 2) $\forall x \in (a, x_n)$ $\exists \mathrm{D}f(x)$, $\mathrm{D}g(x)$; 3) $\mathrm{D}g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a,b)$ и, в частности, по теореме Ролля (в обобщенной формулировке) $g(x_n) \neq 0$. На отрезке $[a, x_n]$ к функциям $f(t)$ и $g(t)$ применима теорема Коши (о конечных приращениях), поэтому $\forall n \in \mathbf{N}$ $\exists c_n \in (a, x_n)$ такое, что $\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = \dfrac{f(x_n) - f(a)}{g(x_n) - g(a)} = \dfrac{\mathrm{D}f(c_n)}{\mathrm{D}g(c_n)}$. Но последовательность (c_n) удовлетворяет условиям $a < c_n < x_n < b$ $\forall n \in \mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} = a$, поэтому (c_n) есть последовательность Гейне, связанная с точкой a. В силу условия теоремы $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \mathrm{D}f(x)/\mathrm{D}g(x) = A$, поэтому $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{D}f(c_n)/\mathrm{D}g(c_n) = A$. Но тогда при $n \to +\infty$ существует предел

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{D}f(c_n)}{\mathrm{D}g(c_n)} A,$$

т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Замечание. Теорема 1 остается справедливой и для $a = -\infty < b < 0$. В самом деле, введем вспомогательные функции $F(z) = f(x)$, $G(z) = g(x)$, где $x = 1/z$. Тогда $\exists \lim\limits_{z\to -0} F(z) = \lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0$, $\exists \lim\limits_{z\to -0} G(z) = \lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$, $\exists \mathrm{D}F(z) = -z^{-2}\mathrm{D}f(x)$, $\exists \mathrm{D}G(z) = -z^{-2}\mathrm{D}g(x)$ $\forall z \in (1/b, 0)$, $\exists \lim\limits_{z\to -0} \mathrm{D}F(z)/\mathrm{D}G(z) = \lim\limits_{x\to -\infty} \mathrm{D}f(x)/\mathrm{D}g(x) = A$. Поэтому к функциям $F(z)$ и $G(z)$, определенным на интервале $(1/b, 0)$, можно применить теорему 1.

Теорема 2 (правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида ∞/∞). *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на (a, b), причем: 1) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} |g(x)| = +\infty$; 2) $f, g \in \mathcal{D}((a, b))$ и $\mathrm{D}g(x) \neq 0$ $\forall x \in (a, b)$; 3) $\exists \lim\limits_{x\to a+0} \mathrm{D}f(x)/\mathrm{D}g(x) = A$ (где A конечно или символ $+\infty$ $(-\infty)$). Тогда $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)/g(x) = A$.*

Доказательство. Отметим, что $\forall x \in (a, a+\delta_0) \subset (a, b)$ имеет место (основное) равенство

$$f(x)/g(x) = (1 - g(a+\delta_0)/g(x))(f(x)-$$

$$-f(a+\delta_0))/(g(x) - g(a+\delta_0)) + f(a+\delta_0)/g(x).$$

В самом деле, $\forall x \in (a, a+\delta_0)$ имеем

$$f(x)/g(x) = (f(x) - f(a+\delta_0))/g(x) + f(a+\delta_0)/g(x) =$$

$$= (g(x) - g(a+\delta_0))/g(x)(f(x) - f(a+\delta_0))/(g(x) - g(a+\delta_0))+$$

$$+f(a+\delta_0)/g(x),$$

откуда и следует основное равенство.

Будем различать случаи: 1) $A = 0$; 2) $A \neq 0$ и, конечно, 3) $A = +\infty$ $(-\infty)$.

1) $A = 0$. Поскольку $\lim\limits_{t\to a+0} \mathrm{D}f(t)/\mathrm{D}g(t) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta_0 > 0$ такое, что

$$|\mathrm{D}f(t)/\mathrm{D}g(t)| < \varepsilon \, \forall t \in (a, a+\delta_0) \subset (a, b).$$

Поскольку $\lim\limits_{t\to a+0} |g(t)| = +\infty$, то для выбранных $\varepsilon > 0$ и $\delta_0 > 0$ $\exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что $\forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, a+\delta_0)$ имеют место оценки $|g(a+\delta_0)/g(x)| < 1$ (так что $|1-g(a+\delta_0)/g(x)| < 2$) и $|f(a+\delta_0)/g(x)| < \varepsilon$. Для любого $x \in (a, a+\delta_0)$ к функциям $f(t)$ и $g(t)$ на отрезке $[x, a+\delta_0] \subset (a, b)$ применима теорема Коши о конечных приращениях, в силу которой

$$(f(x) - f(a+\delta_0))/(g(x) - g(a+\delta_0)) = \mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c),$$

где $c \in (a, a+\delta_0)$, так что имеет место оценка $|\mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c)| < \varepsilon$. Но тогда $\forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, a+\delta_0)$ в силу основного равенства имеем оценку

$$|f(x)/g(x)| = |1 - g(a+\delta_0)/g(x)|\,|\mathrm{D}f(c)/\mathrm{D}g(c)| +$$

$$+|f(a+\delta_0)/g(x)| < 2\cdot\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $|f(x)/g(x)| < \varepsilon\ \forall x \in (a, a+\delta)$, т. е. $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)/g(x) = 0$.

2) $A \neq 0$ (конечное). Введем вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - A\cdot g(x)$. Тогда $\forall x \in (a,b)$ существует конечная производная $\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}f(x) - A\cdot \mathrm{D}g(x)$, причем $\lim\limits_{x\to a+0} \dfrac{\mathrm{D}F(x)}{\mathrm{D}g(x)} = \lim\limits_{x\to a+0}\left(\dfrac{\mathrm{D}f(x)}{\mathrm{D}g(x)} - A\right) = 0$. Но тогда по доказанному в случае 1) видим, что

$$\left(\exists \lim_{x\to a+0} \frac{F(x)}{g(x)} = 0\right) \Rightarrow \left(\exists \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A\right) \text{ (где } A - \text{ конечное).}$$

3) $A = +\infty$. Поскольку $\lim\limits_{t\to a+0} \mathrm{D}f(t)/\mathrm{D}g(t) = +\infty$, то $\forall K > 0\ \exists \delta_0 > 0$ такое, что $\mathrm{D}f(t)/\mathrm{D}g(t) > K+1\ \forall t \in (a, a+\delta_0)$. Поскольку $\lim\limits_{t\to a+0} |g(t)| = +\infty$, то для фиксированного $K > 0$ и выбранного $\delta_0 > 0\ \exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что $\forall x \in (a, a+\delta) \subset (a, a+\delta)$, имеют место оценки $|g(a+\delta_0)/g(x)| < 1/2$ (так что $1 + g(a+\delta_0)/g(x) > 1/2$) и $|f(a+\delta_0)/g(x)| < 1/2$. Применяя к функциям $f(t)$ и $g(t)$ на отрезке $[x, a+\delta_0] \subset (a,b)$ (при $x \in (a, a+\delta)$) теорему Коши в конечных приращениях, имеем оценку

$$\frac{f(x) - f(a+\delta_0)}{g(x) - g(a+\delta_0)} = \frac{\mathrm{D}f(c)}{\mathrm{D}g(c)} > K+1,$$

где $c \in (x, a+\delta_0)$. Но тогда в силу основного равенства $\forall x \in (a, a+\delta)$ получаем оценку снизу

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(a+\delta_0)}{g(x)}\right)\frac{\mathrm{D}f(c)}{\mathrm{D}g(c)} + \frac{f(a+\delta_0)}{g(x)} > (K+1)/2 - 1/2 = K/2.$$

Итак, $\forall K > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\dfrac{f(x)}{g(x)} > \dfrac{K}{2}\ \forall x \in (a, a+\delta)$ $\exists \lim\limits_{x\to a+0} f(x)/g(x) = +\infty$. (Случай $A = -\infty$ рассмотрите самостоятельно.)

Замечание 1. Теорема 2 остается справедливой и для $a = -\infty < b < 0$. В этом случае достаточно ввести функции $F(z) = f(x)$; $G(z) = g(x)$ (где $x = 1/z$), определенные на интервале $(1/b, 0)$, и применить теорему 2.

Замечание 2. Применение теорем Лопиталя требует обязательной проверки всех условий этих теорем. Формальное применение правил Лопиталя может привести к неверным результатам.

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ и $g(x) = \sin x$. Тогда $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to 0} f(x)/g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(x^2 \sin(1/x))/(x + o(x)) = 0$, но предел $\lim\limits_{x\to 0} Df(x)/Dg(x) = \lim\limits_{x\to 0}(2x \sin(1/x) - \cos(1/x))/\cos x$ не существует.

Пример 2. Пусть $f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2\sin x)$, $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ и $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} Df(x)/Dg(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (-5e^{-2x}\sin x)/(-2e^{-x}\sin x) = 0$. Но для $\dfrac{f(x)}{g(x)} = e^{-x} \cdot \dfrac{1+2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}$ предела при $x \to +\infty$ не существует (не выполнено условие $Dg(x) \neq 0$ $\forall x > 0$).

Пример 3. $\forall \alpha > 0 \; \exists \lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = \alpha \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha-1}}{e^x} = \ldots = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha-n}}{e^x} = 0$ $(n-1 < \alpha \leq n) \Rightarrow x^\alpha = o(e^x)$ $(x \to +\infty)$. Таким образом, показательная функция e^x растет при $x \to +\infty$ быстрее любой степенной функции x^α.

Пример 4. $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^\alpha x}{x} = \alpha \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{\alpha-1} x}{x} = \ldots =$$

$$= \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1) \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^{\alpha-n} x}{x} = 0$$

$$(n-1 < \alpha \leq n) \Rightarrow \ln^\alpha x = o(x) \; \forall \alpha > 0.$$

Пример 5. $\forall \alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x / x^\alpha = \lim_{x\to+\infty} (1/x)/\alpha x^{\alpha-1} = \lim_{x\to+\infty} 1/\alpha x^\alpha = 0,$$

т. е. $\ln x = o(x^\alpha)$ $(x \to +\infty)$ $\forall \alpha > 0$. Таким образом, логарифмическая функция $\ln x$ растет при $x \to +\infty$ медленнее, чем любая степенная функция x^α (при $\alpha > 0$).

1-я теорема Штольца $\left(\frac{0}{0}\right)$. *Пусть числовые последовательности* (a_n) *и* (b_n) *таковы, что*

1) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$;

2) $(b_n) \downarrow\downarrow 0$ (*так что* $b_n > b_{n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$);

3) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = l$ (*где* l *конечно или символ* $+\infty$ *или* $-\infty$).

Тогда

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Доказательство. Отметим лемму из алгебры.

Лемма. *Если* $A < \dfrac{\alpha_k}{\beta_k} < B$ $(k = 1, \ldots, m)$, *где* $\beta_k > 0$ $\forall k = 1, \ldots, m$, *то*

$$A < \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k}{\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k} < B. \tag{1}$$

Доказательство. Поскольку $\beta_k > 0$ $\forall k = 1, \ldots, m$, то $\left(A < \dfrac{\alpha_k}{\beta_k} < B;\ k = 1, \ldots, m\right) \Rightarrow (A\beta_k < \alpha_k < B\beta_k,\ k = 1, \ldots, m)$, откуда имеем

$$A \sum_{k=1}^{m} \beta_k < \sum_{k=1}^{m} \alpha_k < B \sum_{k=1}^{m} \beta_k.$$

Вновь, учитывая, что $\sum\limits_{k=1}^{m} \beta_k > 0$, получаем оценки (1).

При доказательстве 1-й теоремы Штольца рассмотрим сначала случай а) l конечно. Поскольку $b_n \downarrow\downarrow 0$, то $b_n - b_{n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и, учитывая условие 3), $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = l$, видим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall n > N(\varepsilon)$ и $\forall k \geq 0$

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{n+k} - a_{n+k+1}}{b_{n+k} - b_{n+k+1}} < l + \frac{\varepsilon}{2},$$

где $b_{n+k} - b_{n+k+1} > 0$. В силу (1) леммы, учитывая, что $\sum\limits_{k=0}^{m-1} (b_{n+k} - b_{n+k+1}) = b_n - b_{n+m}$, $\sum\limits_{k=0}^{m-1} (a_{n+k} - a_{n+k+1}) = a_n - a_{n+m}$, имеем оценки

$$l - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_n - a_{n+m}}{b_n - b_{n+m}} < l + \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N(\varepsilon). \tag{2}$$

Переходя при фиксированном $n > N(\varepsilon)$ к пределу в оценке (2) при $m \to +\infty$ и учитывая условие 1) 1-й теоремы Штольца

$$\lim_{m \to +\infty} a_{n+m} = \lim_{m \to +\infty} b_{n+m} = 0,$$

получаем из (2) оценки

$$l - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq l + \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > N(\varepsilon),$$

т. е. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = l$, если l конечно.

Рассмотрим теперь в условии 3) случай б) $l = +\infty$, так что

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - a_{n+1}}{b_n - b_{n+1}} = +\infty.$$

Тогда $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n - a_{n+1} > b_n - b_{n+1} > 0\ \forall n \geq N_0$, т. е., учитывая условие 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, имеем $a_n > a_{n+1}\ \forall n \geq N_0$, т. е. $a_n \downdownarrows 0\ (n \to +\infty)$, и, в частности, $a_n > 0\ \forall n \geq m > N_0$. Но тогда в силу условия 3) (при $l = +\infty$) имеем

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n - b_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = 0,$$

и поэтому в силу доказанного в случае а) видим, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$, откуда, учитывая, что

$$\frac{a_n}{b_n} > 0\ \forall n \geq m_0 > N_0,$$

имеем

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty,$$

чем 1-я теорема Штольца полностью доказана.

2-я теорема Штольца $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. *Пусть числовые последовательности* (a_n) *и* (b_n) *таковы, что*

1) $b_n \uparrow\uparrow +\infty$ (*т. е.* $b_{n-1} < b_n\ \forall n \in \mathbf{N}$ *и* $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$);

2) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$ (*где* l *конечно или символ* $+\infty$ *или* $-\infty$). *Тогда*

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = l.$$

Доказательство. Будем различать три случая: а) $l = 0$, б) $l \neq 0$ конечно и в) $l = +\infty\ (-\infty)$.

а) $l = 0$. Поскольку $b_k \uparrow\uparrow$, то $b_k - b_{k-1} > 0\ \forall k \in \mathbf{N}$ и в силу условия 1) $\lim\limits_{m\to\infty} b_m = +\infty\ \exists m_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $b_m > 0\ \forall m \geq m_0$.

Поскольку в случае а) $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\forall k > N(\varepsilon)$ и $\forall p \geq 1$ имеют место оценки

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{k+p} - a_{k+p-1}}{b_{k+p} - b_{k+p-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Но $b_{k+p} - b_{k+p-1} > 0\ \forall p \geq 1$ и

$$\sum_{p=1}^{m} (a_{k+p} - a_{k+p-1}) = a_{k+m} - a_k,\ \sum_{p=1}^{m} (b_{k+p} - b_{k+p-1}) = b_{k+m} - b_k,$$

поэтому в силу (1) леммы имеем $\forall k > N(\varepsilon)$ и $m \geq 1$ оценки

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{a_{k+m} - a_k}{b_{k+m} - b_k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

или

$$\left|\frac{a_n - a_k}{b_n - b_k}\right| < \frac{\varepsilon}{2},\ b_n > b_k > 0\ \forall n > k > m_0 > N(\varepsilon). \tag{3}$$

Отметим тождество $\forall n > k$:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_k}{b_k} + \left(1 - \frac{b_k}{b_n}\right) \cdot \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k}.$$

(В самом деле, $\frac{a_n}{b_n} = \frac{a_n - a_k}{b_n} + \frac{a_k}{b_n} \equiv \frac{a_k}{b_n} + \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k} \cdot \frac{b_n - b_k}{b_n} \equiv \frac{a_k}{b_n} + \left(1 - \frac{b_k}{b_n}\right) \cdot \frac{a_n - a_k}{b_n - b_k}.$)

Но $0 < 1 - \frac{b_k}{b_n} < 1\ \forall n > k$, откуда, учитывая оценку (3), имеем оценки

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| \leq \frac{|a_k|}{b_n} + \left|\frac{a_n - a_k}{b_n - b_k}\right| < \frac{|a_n|}{b_n} + \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > k.$$

Но в силу условия 1) $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = +\infty$ при фиксированном $k > m_0 > N(\varepsilon)$ видим, что $\exists n_0(\varepsilon) > k > m_0 > N_0(\varepsilon)$ такое, что $\frac{|a_k|}{b_n} < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n > n_0(\varepsilon)$.

Итак, $\exists \varepsilon > 0\ \exists n_0(\varepsilon) > k > m_0 > N(\varepsilon)$ такое, что $\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ $\forall n > n_0(\varepsilon)$, т. е. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$.

б) $l \neq 0$ конечно. Введем вспомогательную последовательность $(c_n) \equiv (a_n - l b_n)$, для которой имеем $\exists \lim\limits_{k \to \infty} \frac{c_k - c_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} = \lim\limits_{k \to +\infty} \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{b_k - b_{k-1}} - l\right) = 0$, и тогда по доказанному в случае а) имеем

$$\left(\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{c_n}{b_n} \equiv \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{a_n}{b_n} - l\right) = 0\right) \Rightarrow \left(\exists \lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = l\right).$$

в) $l = +\infty$. В силу условия 2) 2-й теоремы Штольца имеем $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = +\infty$, и поскольку в силу условия 1) $b_n \uparrow\uparrow +\infty$, то $\exists N_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $a_n - a_{n-1} > b_n - b_{n-1} > 0\ \forall n > N_0$, т. е. $a_n > a_{n-1}\ \forall n > N_0$, а потому $a_n \uparrow\uparrow$ на $\overline{N_0, +\infty}$ и, в частности, $\sum\limits_{k=N_0}^{n} (a_k - a_{k-1}) \equiv a_n - a_{N_0 - 1} > \sum\limits_{k=N_0}^{n} (b_k - b_{k-1}) \equiv b_n - b_{N_0 - 1}$, т. е.

$a_n > b_n + (a_{N_0-1} - b_{N_0-1})\ \forall n > N_0$. Но тогда $(\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty) \Rightarrow (\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty)$, и поэтому $\exists m_0 > N_0$ такое, что $a_n > 0$, $b_n > 0$ $\forall n > m_0 > N_0$.

Итак, для последовательностей (a_n) и (b_n) имеем:

1') $a_n \uparrow\uparrow +\infty$ ($b_n \uparrow\uparrow +\infty$) и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = +\infty$, причем $a_n - a_{n-1} > 0\ \forall n > m_0$.

В силу условия 2) (при $l = +\infty$) 2-й теоремы Штольца имеем

2') $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n - b_{n-1}}{a_n - a_{n-1}} = 0$,

поэтому из условий 1') и 2') по доказанному в случае а) 2-й теоремы Штольца имеем $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 0$, и поскольку $\dfrac{a_n}{b_n} > 0\ \forall n > m_0 > N_0$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$, чем 2-я теорема Штольца полностью доказана.

Следствие 1 (о среднем арифметическом). Если $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ (где l конечно, или $+\infty$, или $-\infty$), то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = l$.

В самом деле, полагая во 2-й теореме Штольца $(\frac{\infty}{\infty})$ $\alpha_n = a_1 + \ldots + a_n$, $b_n = n$, имеем $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\alpha_n - \alpha_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{n-(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$, откуда по 2-й теореме Штольца

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = l.$$

Следствие 2 (о среднем геометрическом). Если $a_n > 0\ \forall n \in \mathbf{N}$ и $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = l$ (где $l \geq 0$ конечно или $+\infty$), то

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = l \geq 0.$$

В самом деле, полагая $\alpha_n = \ln a_n$, где $a_n > 0$, видим, что $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ln l$, где $l \geq 0$ (или $+\infty$), так что $\ln l = -\infty$ при $l = 0$ и $\ln l = +\infty$ при $l = +\infty$. Тогда в силу следствия 1 (о среднем арифметическом)

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln a_1 + \ldots + \ln a_n}{n} = \ln l,$$

т. е.

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = l \geq 0.$$

Примеры.

1) При $a > 1$ имеем $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n - a^{n-1}}{n-(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty}(a^n - a^{n-1}) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left[a^n\left(1-\dfrac{1}{a}\right)\right] = +\infty$, и поэтому в силу 2-й теоремы Штольца $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n} = +\infty$ $(a > 1)$.

2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n - \ln(n-1)}{n-(n-1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln \dfrac{n}{n-1} = 0$, и поэтому в силу 2-й теоремы Штольца $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$.

3) Вычислим предел $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Полагая $\sqrt[n]{a_n} = \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, имеем $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$. Но тогда $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{e}$, и поэтому в силу следствия 2 ко 2-й теореме Штольца имеем

$$\exists \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot \frac{a_2}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}.$$

§ 9. Свойства производных дифференцируемых функций

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M. Скажем, что функция $f(x)$ возрастает (строго возрастает) в точке $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, если существует окрестность $U(x_0) \subset M$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, при $x > x_0$ имеем оценку $f(x) \geq f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ и при $x < x_0$ имеем оценку $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) < f(x_0))$.*

Аналогично определяется понятие убывания (строгого убывания) функции в точке.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена $\forall x \in [x_0, x_0+\delta_0)$ (или $\forall x \in (x_0-\delta_0, x_0]$) и имеет (конечную или бесконечную) правую производную $\mathrm{D}^+f(x_0)$ (имеет левую производную $\mathrm{D}^-f(x_0)$) в точке x_0. Пусть при этом $\mathrm{D}^+f(x_0) > 0$ (соответственно $\mathrm{D}^-f(x_0) > 0$). Тогда существует окрестность $V_\delta(x_0) \subset U_{\delta_0}(x_0)$ такая, что $\forall x \in x_0, x_0+\delta)$ имеем оценку $f(x) > f(x_0)$ (соответственно $\forall x \in (x_0-\delta, x_0)$ имеем оценку $f(x) < f(x_0)$).*

Доказательство. По определению правой производной $\lim\limits_{x\to x_0+0}(f(x)-f(x_0))/(x-x_0) = \mathrm{D}^+f(x_0) > 0$. Но тогда в силу теоремы о знаке (при конечной $\mathrm{D}^+f(x_0)$) видим, что существует окрестность

$V_\delta(x_0) \subset U_{\delta_0}(x_0)$ такая, что

$$(f(x) - f(x_0))/(x - x_0) \geq 1/2 \cdot \mathrm{D}^+ f(x_0) > 0 \,\forall x \in (x_0, x_0 + \delta),$$

откуда в силу неравенства $x - x_0 > 0$ получаем

$$f(x) > f(x_0) \,\forall x \in \dot{V}(x_0) \cap [x_0, +\infty).$$

Следствие (достаточное условие строгой монотонности функции в точке). Если функция $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ и в точке x_0 существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x_0) > 0$ ($\mathrm{D}f(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) в точке x_0.

Замечание. Из того, что функция $f(x)$, определенная в окрестности $U(x_0)$, строго монотонная в точке x_0, вообще говоря, не следует, что функция $f(x)$ будет монотонной хотя бы в некоторой окрестности $V(x_0) \subset U(x_0)$.

Пример. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), \; x \neq 0, \\ 0, \; x = 0 \end{cases}$$

имеет производную

$$\mathrm{D}f(x) = \begin{cases} 1 + 4x \sin(1/x) - 2\cos(1/x), \; x \neq 0, \\ 1, \; x = 0. \end{cases}$$

Очевидно, в любой достаточно малой окрестности нуля производная $\mathrm{D}f(x)$ имеет как положительные, так и отрицательные значения, т. е. функция $f(x)$, строго возрастая в точке $x_0 = 0$ (поскольку $\mathrm{D}f(0) = 1 > 0$), тем не менее не будет монотонной в любой достаточно малой окрестности $U(x_0)$. (В самом деле, если бы $f(x)$ была монотонно возрастающей в окрестности $U(x_0)$, то $f(x)$ была бы возрастающей в любой точке $x \in U(x_0)$, что невозможно для точек $x \in \dot{U}(x_0)$, где $\mathrm{D}f(x) < 0$.)

Теорема Дарбу (о промежуточных значениях производной). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, $f \in \mathcal{D}((a, b))$ и существуют конечные односторонние производные $\mathrm{D}^+ f(a)$ и $\mathrm{D}^- f(b)$ в концах отрезка $[a, b]$, причем $\mathrm{D}^+ f(a) \neq \mathrm{D}^- f(b)$. Тогда $\forall$ постоянной C, находящейся между числами $\mathrm{D}^+ f(a)$ и $\mathrm{D}^- f(b)$, существует точка $c \in (a, b)$ такая, что $\mathrm{D}f(c) = C$.*

Доказательство. Пусть сначала $\mathrm{D}^+ f(a) \cdot \mathrm{D}^- f(b) < 0$. Например, $\mathrm{D}^+ f(a) > 0$ и $\mathrm{D}^- f(b) < 0$. Из условий теоремы Дарбу вытекает, что $f \in C([a, b])$. В самом деле, поскольку существуют односторонние производные $\mathrm{D}^+ f(a)$ и $\mathrm{D}^- f(b)$, то $f \in C(a)$ и $f \in C(b)$, кроме того, $f \in \mathrm{D}((a, b)) \Rightarrow f \in C((a, b))$, т. е. $f \in C([a, b])$. Но

тогда по теореме Вейерштрасса существует $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. Отметим, что $c \neq a$, так как в противном случае имели бы $f(x) \leq f(a) = f(c) = M \ \forall x \in [a,b]$. Но $\mathrm{D}^+ f(a) > 0$, и по предыдущей теореме существует окрестность $U(a)$ такая, что $f(x) > f(a) = \sup\limits_{[a,b]} f(t) = M \ \forall x \in \dot{U}(a) \cap [a,b]$. Противоречие. Аналогично доказывается, что $c \neq b$. Таким образом, $c \in (a,b)$, и в силу теоремы Ферма в точке локального максимума $x_0 = c$ имеем $\mathrm{D}f(c) = 0$. В случае $\mathrm{D}^+ f(a) > C > \mathrm{D}^- f(b)$ рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - Cx$, для которой имеем $\mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}f(x) - C \ \forall x \in (a,b)$; $\mathrm{D}^+ F(a) = \mathrm{D}^+ f(a) - C > 0$, $\mathrm{D}^- F(b) = \mathrm{D}^- f(b) - C < 0$. По доказанному выше $\exists c \in (a,b)$ такое, что $\mathrm{D}F(c) = 0$, откуда $\mathrm{D}f(c) = C$.

Замечание. Теорема Дарбу показывает, что производная $\mathrm{D}f(x)$ дифференцируемой функции $f \in \mathcal{D}([a,b])$, подобно непрерывной на отрезке функции, принимает все промежуточные значения на отрезке, однако производная $\mathrm{D}f(x)$ может и не быть непрерывной функцией.

Пример. Для функции $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0 \end{cases}$ имеем $f \in \mathcal{D}((-\infty, +\infty))$, причем $\mathrm{D}f(x) = \begin{cases} 2x \sin(1/x) - \cos(1/x), \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases}$ очевидно, $\mathrm{D}f \overline{\in} C(0)$.

Теорема (о пределе производной). *Пусть* $f \in C([x_0, x_0 + \delta_0])$ *и* $f \in \mathcal{D}((x_0, x_0 + \delta_0))$. *Пусть* $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \mathrm{D}f(x) = A$, *где* A *конечно или символ* $+\infty$ $(-\infty)$. *Тогда в точке* x_0 *существует правая производная* $\mathrm{D}^+ f(x_0) = A$. (Попробуйте доказать сами.)

Доказательство. 1) Пусть сначала A конечно. Поскольку $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \mathrm{D}f(x) = A$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что $|\mathrm{D}f(t) - A| < \varepsilon \ \forall t \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ рассмотрим выражение $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях (примененной к $f \in C([x_0, x]) \wedge \mathcal{D}((x_0, x)))$ $\exists c \in (x_0, x)$ такая, что $\mathrm{D}f(c) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, и поэтому $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| = |\mathrm{D}f(c) - A| < \varepsilon$. Итак, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ имеем оценку $\left| \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A \right| < \varepsilon$, из которой следует, что $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A \Rightarrow \mathrm{D}^+ f(x_0) = A$.

2) Если $A = +\infty$ (или $A = -\infty$), поскольку $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} \mathrm{D}f(x) = +\infty$, то $\forall K > 0 \ \exists \delta \in (0, \delta_0)$ такое, что $\mathrm{D}f(t) > K \ \forall t \in (x_0, x_0 + \delta)$, и вновь, применяя теорему Лагранжа на отрезке $[x_0, x]$, видим, что $\forall x \in$

$(x_0, x_0+\delta)$ $\exists c \in (x_0, x)$ такое, что $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{D}f(c) \geq K$, т. е. $(\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty) \Rightarrow (\mathrm{D}^+f(x_0) = +\infty)$.

Пример. Пусть $f(x) = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$. Тогда $f \in C([-1,1]) \wedge \mathcal{D}((-1,1))$, причем $\forall x \in (-1,1)$ $\exists \mathrm{D}f(x) = \arcsin x + x/\sqrt{1-x^2} - x/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x$ и $\exists \lim\limits_{x\to 1-0} \mathrm{D}f(x) = \pi/2$, $\exists \lim\limits_{x\to 1+0} \mathrm{D}f(x) = -\pi/2$, поэтому в силу теоремы о пределе производной $\exists \mathrm{D}^+f(-1) = -\pi/2$, $\mathrm{D}^-f(1) = \pi/2$.

Теорема (о разрывах производной). *Если функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности $U(x_0)$, то производная $\mathrm{D}f(x)$ не может иметь в окрестности $U(x_0)$ точек разрыва 1-го рода.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$, так что $\forall x \in U(x_0)$ существует конечная $\mathrm{D}f(x)$. Допустим от противного, что $x_1 \in U(x_0)$ есть точка разрыва 1-го рода для функции $\mathrm{D}f(x)$. Тогда $\exists \lim\limits_{x\to x_1+0} \mathrm{D}f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_1-0} \mathrm{D}f(x)$. Но $f \in C(U(x_0))$, и в силу теоремы о пределе производной $\exists \mathrm{D}^+f(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1+0} \mathrm{D}f(x)$ и $\exists \mathrm{D}^-f(x_1) = \lim\limits_{x\to x_1-0} \mathrm{D}f(x)$. Но $(f \in \mathcal{D}(U(x_0)) \Rightarrow (f \in \mathcal{D}(x_1))$, поэтому $\exists \mathrm{D}f(x_1)$, причем $\mathrm{D}f(x_1) = \mathrm{D}^+f(x_1) = \mathrm{D}^-f(x_1)$. Противоречие. Итак, функция $\mathrm{D}f(x)$ не может иметь точек разрыва 1-го рода.

Замечание. Как показывает ранее рассмотренный пример функции $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ производная может иметь разрывы 2-го рода.

§ 10. Формула Тейлора

Теорема (формула Тейлора для многочлена). *Пусть $\mathcal{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ – многочлен n-й степени. Тогда $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ существует, и притом единственный, многочлен Тейлора $\mathcal{P}_n(x; \mathcal{P}, x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{c_k}{k!}(x-x_0)^k$ (где $c_k = \mathrm{D}^k\mathcal{P}(x_0)$) такой, что $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_n(x; \mathcal{P}, x_0)$ $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.*

Доказательство. Положим $\mathcal{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} A_k(x-x_0)^k$ и найдем коэффициенты A_k при $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Для любого m $(m = 0, 1, \ldots, n)$ m-кратное дифференцирование дает

$$\mathrm{D}^m\mathcal{P}(x) = \sum_{k=m}^{n} k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-m+1)A_k(x-x_0)^{k-m}.$$

Полагая $x = x_0$, имеем $\mathrm{D}^m\mathcal{P}(x_0) = m!A_m$, т. е. коэффициенты $A_m = \dfrac{1}{m!}\mathrm{D}^m\mathcal{P}(x_0)$ определяются единственным образом через многочлен $\mathcal{P}(x)$. Полагая $c_m = \mathrm{D}^m\mathcal{P}(x_0)$, получаем единственное представление $\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_n(x;\mathcal{P},x_0)\ \forall x \in (-\infty,+\infty)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть функция $f(x)$ определена $\forall x \in (a,b)$ и $x_0 \in (a,b)$, причем $\exists \mathrm{D}^n f(x_0)$. Тогда многочленом Тейлора степени n в точке x_0 для функции $f(x)$ называется многочлен $\mathcal{P}_n(x) \equiv \mathcal{P}_n(x;f,x_0)$ такой, что $\mathcal{P}_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}\mathrm{D}^k f(x_0)(x-x_0)^k$.*

З а м е ч а н и е 1. Для любого многочлена $\mathcal{P}(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ и $\forall x_0 \in (-\infty,+\infty)$ в силу теоремы о формуле Тейлора для многочлена имеет место точное равенство

$$\mathcal{P}(x) = \mathcal{P}_n(x;\mathcal{P},x_0)\ \forall x \in (-\infty,+\infty).$$

З а м е ч а н и е 2. Если $f \in C(x_0)$, то в окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеем представление $f(x) = f(x_0) + o(1)$ $(x \to x_0)$, так что $f(x) = \mathcal{P}_0(x;f,x_0) + r_0(x,x_0)$, где $\mathcal{P}_0(x;f,x_0) = f^{(0)}(x_0)$ и $r_0(x,x_0) = o(1)$ $(x \to x_0)$.

З а м е ч а н и е 3 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Если $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}(U(x_0))$, то $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ имеем представление $f(x) = \mathcal{P}_n(x;f,x_0) + r_n(x,x_0)$, где

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{D}^{n+1}f(c)(x-x_0)^{n+1}\ c \in \dot{U}(x_0).$$

З а м е ч а н и е 4 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). Если $f \in \mathcal{D}^{(n-1)}(U(x_0))$ и $f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$, то в окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеем представление $f(x) = \mathcal{P}_n(x;f,x_0) + r_n(x,x_0)$, где $r_n(x,x_0) = o((x-x_0)^n)$ $(x \to x_0)$.

Т е о р е м а (единственности многочлена Тейлора). *Пусть $f \in \mathrm{D}^{(n-1)}(U(x_0))$ и $f \in \mathrm{D}^{(n)}(x_0)$, причем в окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеет место представление $f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n)$ $(x \to x_0)$, где $Q_n(x)$ - многочлен n-й степени относительно $x - x_0$. Тогда $Q_n(x) \equiv \mathcal{P}_n(x;f,x_0)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию теоремы в окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеет место представление

$$f(x) = Q_n(x) + o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0), \tag{10.1}$$

но по теореме Тейлора (о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) имеем представление

$$f(x) = \mathcal{P}_n(x;f,x_0) + o((x-x_0)^n)\ (x \to x_0). \tag{10.2}$$

Представляя функцию $Q_n(x)$ с помощью ее многочлена Тейлора $\mathcal{P}_n(x; Q_n, x_0)$, имеем

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{k!}(x - x_0)^k.$$

Докажем, что $c_k = \mathrm{D}^k f(x_0)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Допустим от противного, что $\exists k$ $(0 \le k \le n)$ такое, что $c_k \ne \mathrm{D}^k f(x_0)$, и пусть $k_0 = \min\{k\}$. Тогда $\mathcal{P}_n(x; f, x_0) - Q_n(x) = \sum\limits_{m=k_0}^{n} (\mathrm{D}^m f(x_0) - c_m)\dfrac{(x - x_0)^m}{m!}$. Заметим, что при $n \ge m > k_0$ $(x - x_0)^m = (x - x_0)^{k_0}(x - x_0)^{m-k_0} = o((x - x_0)^{k_0})$ $(x \to x_0)$, поэтому

$$\mathcal{P}_n(x; f, x_0) - Q_n(x) = \frac{1}{k_0!}(\mathrm{D}^{k_0} f(x_0) - c_{k_0})(x - x_0)^{k_0} +$$

$$+ o((x - x_0)^{k_0}) \ (x \to x_0).$$

Вычитая (10.2) из (10.1) почленно, имеем $(\mathrm{D}^{k_0} f(x_0) - c_{k_0})\dfrac{(x - x_0)^{k_0}}{k_0!} = o((x - x_0)^{k_0}) + o((x - x_0)^n) = o((x - x_0)^{k_0})$ $(x \to x_0)$, откуда $\mathrm{D}^{k_0} f(x_0) - c_{k_0} = o(1)$ $(x \to x_0) \Rightarrow c_{k_0} = \mathrm{D}^{k_0} f(x_0)$, вопреки предположению. Итак,

$$Q_n(x) \equiv \mathcal{P}_n(x; f, x_0).$$

Пример. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдем $\mathrm{D}^n f(0)$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Очевидно,

$$\mathrm{D}f(x) = (1 - x^2)^{-1/2}, \ x \in (-1, 1).$$

По формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для бинома имеем $(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\left(-\dfrac{1}{2} - 1\right)\ldots$ $\left(-\dfrac{1}{2} - k + 1\right)(-x^2)^k + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$ или $(1 - x^2)^{-1/2} = 1 + \sum\limits_{k=L}^{n} \dfrac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)}{2^k \cdot k!}x^{2k} + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$. В силу локальной теоремы Тейлора имеем $\mathrm{D}f(x) = \mathcal{P}_{2n}(x; \mathrm{D}f, 0) + o(x^{2n})$ $(x \to 0)$, где

$$\mathcal{P}_{2n}(x; \mathrm{D}f, 0) = \sum_{m=0}^{2n} (1/m!)\mathrm{D}^{m+1} f(0) x^m.$$

В силу теоремы единственности многочлена Тейлора имеем

$$\mathrm{D}^{2k} f(0) = 0, \ \mathrm{D}^{2k+1} f(0) = (1/2^k k!) \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k - 1) \cdot (2k)!$$

или

$$\mathrm{D}^{2k+1} f(0) = \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot 2k}{2^k \cdot k!} =$$

$$= \frac{(1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1))^2 \cdot 2^k \cdot k!}{2^k \cdot k!} = (1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k-1))^2 =$$

$$= [(2k-1)!!]^2 \ (k = 1, 2, \ldots), \ \mathrm{D}f(0) = 1.$$

Теорема (о формуле Тейлора). *Пусть* $f \in C^{(n)}((a,b))$ *и* $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ *существует конечная или бесконечная производная* $\mathrm{D}^{n+1}f(x)$. *Пусть* $\psi(t)$ *– любая функция, такая, что* $\psi \in C([x,x_0]) \wedge \mathcal{D}((x_0,x))$ *(где* $[x_0,x] \subset (a,b)$*) или* $\psi \in C([x,x_0]) \wedge \mathcal{D}((x,x_0))$ *(где* $[x,x_0] \subset (a,b)$*), причем* $\mathrm{D}\psi(t) \neq 0 \ \forall t \in (x_0,x)$ $(\forall t \in (x,x_0))$. *Тогда* $\forall x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$ *имеет место формула Тейлора* $f(x) = \mathcal{P}_n(x; f, x_0) + r_n(x, x_0)$, *где* $r_n(x,x_0) = \dfrac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\mathrm{D}\psi(c)} \cdot \dfrac{\mathrm{D}^{n+1}f(c)}{n!} \cdot (x-c)^n$, *причем* $x_0 < c < x$ $(x < c < x_0)$.

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x) - f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!} \cdot \mathrm{D}^k f(t)(x-t)^k \ \forall t \in [x_0, x]$ и отметим равенства $\varphi(x) = 0$, $\varphi(x_0) = r_n(x,x_0)$; $\mathrm{D}\varphi(t) = -\mathrm{D}f(t) - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}\mathrm{D}^{k+1}f(t)\cdot(x-t)^k + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k-1)!}\mathrm{D}^k f(t)(x-t)^{k-1} = -\mathrm{D}f(t) - \sum\limits_{m=1}^{n}(1/m!)\mathrm{D}^{m+1}f(t)\cdot(x-t)^m + \sum\limits_{m=0}^{n-1}(1/m!)\mathrm{D}^{m+1}f(t)(x-t)^m = -\mathrm{D}f(t) - (1/n!)\mathrm{D}^{n+1}f(t)(x-t)^n + \mathrm{D}f(t) = -(1/n!)\mathrm{D}^{n+1}f(t)(x-t)^n$, т. е. $\forall t \in (x_0,x)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}\varphi(t) = -(1/n!)\mathrm{D}^{n+1}f(t)(x-t)^n$.

Рассмотрим на отрезке $[x_0,x]$ функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, для которых имеем: 1) $\varphi \in C([x_0,x])$ и $\forall t \in (x_0,x)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}\varphi(t)$; 2) $\psi \in C([x_0,x]) \wedge \mathcal{D}((x_0,x))$, причем 3) $\mathrm{D}\psi(t) \neq 0 \ \forall t \in (x_0,x)$.

Таким образом, для функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ на отрезке $[x_0,x]$ выполнены все условия теоремы Коши о конечных приращениях, в силу которой $\exists c \in (x_0,x)$ такая, что $\left(\dfrac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{\psi(x)-\psi(x_0)} = \dfrac{\mathrm{D}\varphi(c)}{\mathrm{D}\psi(c)}\right) \Rightarrow \left(\varphi(x_0) = -\dfrac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\mathrm{D}\psi(c)} \cdot \mathrm{D}\varphi(c)\right)$, т. е.

$$r_n(x,x_0) = \frac{\psi(x)-\psi(x_0)}{\mathrm{D}\psi(c)} \cdot \frac{\mathrm{D}^{n+1}f(c)}{n!} \cdot (x-c)^n, \ x_0 < c < x.$$

Аналогичная формула имеет место и для отрезка $[x,x_0]$, причем $x < c < x_0$.

Следствие 1 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Коши). Полагая $\psi(t) = x - t$, получаем остаточный член формулы Тейлора в форме Коши: $r_n(x,x_0) = \mathrm{D}^{n+1}f(c)\dfrac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!}$, $x_0 <$

$c < x$, или, полагая $c = x_0 + \vartheta(x - x_0)$, где $0 < \vartheta < 1$,

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\mathrm{D}^{n+1}f(x_0 + \vartheta(x - x_0))(1 - \vartheta)^n(x - x_0)^{n+1}.$$

В самом деле, имеем $\psi(t) = x - t$, $\psi(x_0) = x - x_0$, $\psi(x) = 0$, $\mathrm{D}\psi(t) = -1$, и подстановка в формулу Тейлора дает остаточный член в форме Коши.

Следствие 2 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа). Полагая $\psi(t) = (x - t)^{n+1}$, получаем остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{(n+1)!}\mathrm{D}^{n+1}f(c)(x - x_0)^{n+1},\ x_0 < c < x\ (x < c < x_0).$$

В самом деле,

$$\psi(t) = (x - t)^{n+1},\ \psi(x) = 0,\ \psi(x_0) = (x - x_0)^{n+1},$$

$$\mathrm{D}\psi(t) = -(n+1)(x - t)^n,\ \mathrm{D}\psi(c) = -(n+1)(x - c)^n.$$

Замечание. Пусть при выполнении условий теоремы Тейлора функция $f(x)$ удовлетворяет дополнительному условию

$$M_{n+1} = \sup_{(a,b)\setminus\{x_0\}} |\mathrm{D}^{n+1}f(x)| < +\infty.$$

Тогда $f(x) = \mathcal{P}_n(x; f, x_0) + r_0(x, x_0)$, причем для остаточного члена имеет место оценка

$$|r_n(x, x_0)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)}|x - x_0|^{n+1}.$$

В самом деле, представляя остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем оценку

$$|r_n(x, x_0)| = |\mathrm{D}^{n+1}f(c)(x - x_0)^{n+1}/(n+1)!| \le$$

$$\le M_{n+1}|x - x_0|^{n+1}/(n+1)!.$$

Теорема. *Пусть* $f, g \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$ *и* $\mathrm{D}^k f(x_0) = \mathrm{D}^k g(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. *Тогда в окрестности* $\dot{U}(x_0)$ *имеет место представление*

$$f(x) - g(x) = o((x - x_0)^n)\ (x \to x_0).$$

Пример. Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} \exp\{-1/x^2\},\ x \neq 0, \\ 0,\ x = 0 \end{cases} \text{ и } g(x) \equiv 0.$$

Тогда $\mathrm{D}^n g(0) = 0\ \forall n \in \mathbf{N}_0$, т. е. $\mathcal{P}_n(x; g, 0) \equiv 0$.

Докажем, что $\mathrm{D}^n f(0) = 0\ \forall n \in \mathbf{N}$. Пусть $x \neq 0$, тогда $\mathrm{D}f(x) = \frac{2}{x^3} \exp\left\{-\frac{1}{x^2}\right\} = \mathcal{P}_3(1/x) \exp\{-1/x^2\}$. Допустим, что

$$\mathrm{D}^n f(x) = \mathcal{P}_{3n}(1/x) \exp\{-1/x^2\}\ (x \neq 0),$$

тогда

$$\mathrm{D}^{n+1} f(x) = (\mathrm{D}\mathcal{P}_{3n}(1/x)(-1/x^2) + \mathcal{P}_{3n}(1/x)(2/x^3)) \exp\{-1/x^2\} =$$

$$= \mathcal{P}_{3n+3}(1/x) \exp\{-1/x^2\}.$$

Очевидно, $\mathcal{P}_{3n}(1/x) = o(\exp\{-1/x^2\})\ (x \to 0)$, так что

$$\exists \lim_{x \to 0} \mathrm{D}^n f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\mathcal{P}_{3n}(1/x)}{\exp\{1/x^2\}} = 0,$$

и по теореме о пределе производной имеем $\forall n \in \mathbf{N}\ \mathrm{D}^n f(0) = \lim\limits_{x \to 0} \mathrm{D}^n f(x) = 0$, т. е. $f \in C^{(\infty)}((-\infty, +\infty))$. Но тогда $\mathcal{P}_n(x; f, 0) \equiv \mathcal{P}_n(x; g, 0)$, откуда $f(x) - g(x) = o(x^n)\ (x \to 0)\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Глава 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ

§ 1. Условия монотонности функции

Т е о р е м а 1 (критерий монотонности функции). *Пусть* $f \in C((a, b))$ *и* $\forall x \in (a, b)$ *существует конечная или бесконечная производная* $\mathrm{D}f(x)$. *Тогда* $(f(x) \uparrow$ *на* $(a, b)) \Leftrightarrow (\mathrm{D}f(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b))$; $(f(x) \downarrow$ *на* $(a, b)) \Leftrightarrow (\mathrm{D}f(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $f \in C((a, b))$ и $\forall x \in (a, b)$ существует конечная или бесконечная $\mathrm{D}f(x)$. Пусть $f(x) \uparrow$ на (a, b). Рассмотрим любую точку $x_0 \in (a, b)$. Тогда $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ в силу условия $f(x) \uparrow$ на (a, b) имеем $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, т. е. $\mathrm{D}f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ (если производная $\mathrm{D}f(x_0)$ бесконечна, то, очевидно, $\mathrm{D}f(x_0) = +\infty$). Итак, $(f(x) \uparrow$ на $(a, b)) \Rightarrow (\mathrm{D}f(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b))$.

Достаточность. Пусть $f \in C((a, b))$ и $\forall x \in (a, b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$, причем $\mathrm{D}f(x) \geq 0$. Для любых $x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $x_1 < x_2$ по теореме Лагранжа о конечных

приращениях, примененной к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2] \subset (a, b)$, $\exists c \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(x_2) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c)(x_2 - x_1)$, но $\mathrm{D}f(c) \geq 0$, поэтому $(f(x_2) - f(x_1) \geq 0) \Rightarrow (f(x_2) \geq f(x_1))$. Итак, $(\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)) \Rightarrow (f(x) \uparrow$ на $(a, b))$.

Следствие 1 (критерий монотонности для дифференцируемой функции). Если $f \in \mathcal{D}((a, b))$, то $(f(x) \uparrow$ на $(a, b)) \Leftrightarrow (\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b))$ и $(f(x) \downarrow$ на $(a, b)) \Leftrightarrow (\mathrm{D}f(x) \leq 0$ $\forall x \in (a, b))$.

Следствие 2. Пусть $f \in C((a, b))$ и $x_0 \in (a, b)$. Пусть $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$, причем $\mathrm{D}f(x) \geq 0$. Тогда $f(x) \uparrow$ на (a, b).

Доказательство. В силу теоремы 1 ($\forall x_1, x_2 \in (a, x_0)$ или $\forall x_1, x_2 \in (x_0, b)$ таких, что $x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2))$ и $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ таких, что $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях, примененной к функции $f(x)$ на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$ $\exists c_1 \in (x_1, x_0)$, $c_2 \in (x_0, x_2)$ такие, что $f(x_0) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c_1)(x_0 - x_1) \geq 0$, $f(x_2) - f(x_0) = \mathrm{D}f(c_2)(x_2 - x_0) \geq 0$, откуда $f(x_1) \leq f(x_0) \leq f(x_2)$. Таким образом, $(\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2) \Rightarrow (f(x_1) \leq f(x_2)) \Rightarrow (f(x) \uparrow$ на $(a, b))$.

Теорема 2 (достаточное условие строгой монотонности функции). *Пусть $f \in C((a, b))$ и $\forall x \in (a, b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$, причем $\mathrm{D}f(x) > 0$. Тогда $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a, b).*

Доказательство. $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$ по теореме Лагранжа, примененной к функции $f(x)$ на отрезке $[x_1, x_2]$, $\exists c \in (x_1, x_2)$ такая, что $(f(x_2) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c)(x_2 - x_1) > 0) \Rightarrow (f(x_2) > f(x_1))$. Но тогда $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a, b).

Следствие 1. Если $f \in \mathcal{D}((a, b))$ и $\mathrm{D}f(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$, то $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a, b).

Следствие 2. Пусть $f \in C((a, b))$ и $x_0 \in (a, b)$. Пусть $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$, причем $\mathrm{D}f(x) > 0$ (если $\mathrm{D}f(x)$ бесконечная, то $\mathrm{D}f(x) = +\infty$). Тогда $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a, b).

Доказательство. Рассмотрим любые точки $x_1, x_2 \in (a, b)$ такие, что $x_1 < x_2$, тогда при $a < x_1 < x_2 \leq x_0$ или $x_0 \leq x_1 < x_2 < b$ по теореме 2 имеем $f(x_1) < f(x_2)$. При $a < x_1 < x_0 < x_2 < b$ по теореме Лагранжа о конечных приращениях, примененной к функции $f(x)$ на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$, $\exists c_1 \in (x_1, x_0)$ и $\exists c_2 \in (x_0, x_2)$ такие, что $f(x_0) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c_1)(x_0 - x_1) > 0$, $f(x_2) - f(x_0) = \mathrm{D}f(c_2)(x_2 - x_0) > 0$, т. е. $(f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)) \Rightarrow (f(x) \uparrow\uparrow$ на $(a, b))$.

Теорема 3 (критерий строгой монотонности функции, имеющей производную). *Пусть $f \in C((a, b))$ и $\forall x \in (a, b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$. Тогда $(f(x) \uparrow\uparrow$ на $(a, b)) \Leftrightarrow$ (выполнены два условия: 1) $\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a, b)$ и 2) $\forall (\alpha, \beta) \subset (a, b)$ $\exists x_0 \in (\alpha, \beta)$ такое, что $\mathrm{D}f(x_0) > 0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in C((a,b))$ и $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$ и функция $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a,b). В силу теоремы 1 (критерия монотонности функции) имеем $\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$, т. е. условие 1) выполнено.

Рассмотрим любой интервал $(\alpha,\beta) \subset (a,b)$. Если бы $\mathrm{D}f(x) = 0$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, то по теореме Лагранжа, примененной к функции $f(x)$ на (любом) отрезке $[x_1,x_2] \subset (\alpha,\beta)$, $c \in (x_1,x_2)$ такая, что $(f(x_2) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c)(x_2 - x_1) = 0) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))$, и функция $f(x)$ не была бы строго возрастающей на (a,b) (вопреки предположению). Поэтому $\exists x_0 \in (\alpha,\beta)$ такая, что $\mathrm{D}f(x_0) > 0$, т. е. условие 2) также выполнено.

Достаточность. Пусть $f \in C((a,b))$ и $\forall x \in (a,b)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$ и выполнены условия 1) и 2) теоремы 3.

Из условия 1) $\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ в силу теоремы 1 (критерия монотонности) вытекает, что $f(x) \uparrow$ на (a,b).

Допустим, что функция $f(x)$ не является строго возрастающей на (a,b). Тогда $\exists \alpha,\beta \in (a,b)$, $\alpha < \beta$ такие, что $f(\alpha) = f(\beta)$. Поскольку $f(x) \uparrow$ на $[\alpha,\beta]$, то $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ $\forall x \in (\alpha,\beta)$, т. е. $f(x) = f(\alpha)$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, но тогда $\mathrm{D}f(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$, что противоречит условию 2). Таким образом, $f(x) \uparrow\uparrow$ на (a,b).

Следствие (критерий строгой монотонности дифференцируемой функции). Пусть $f \in \mathcal{D}((a,b))$. Тогда $(f(x) \uparrow\uparrow$ на $(a,b)) \Leftrightarrow$ (выполнены два условия: 1) $\mathrm{D}f(x) \geq 0$ $\forall x \in (a,b)$ и 2) множество точек $x_0 \in (a,b)$, где $\mathrm{D}f(x_0) > 0$ плотно на интервале (a,b)).

Пример. Пусть $f(x) = x^3$, $x \in (-1,1)$ (см. рис. 25). Тогда $f(x) \uparrow\uparrow$ на $(-1,1)$ (почему?), но $\mathrm{D}f(0) = 0$.

§ 2. Экстремумы функции

В § 7 гл. 5 была доказана

Теорема Ферма (необходимый признак существования локального экстремума для дифференцируемой функции). *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве M и имеет локальный экстремум во внутренней точке $x_0 \in \overset{\circ}{M} \subset M$. Тогда если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $\mathrm{D}f(x_0) = 0$.*

Теорема 1 (достаточный признак существования строгого локального экстремума). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a,b|$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in C(x_0)$, причем существуют конечные или бесконечные односторонние производные $\mathrm{D}^- f(x_0)$ и $\mathrm{D}^+ f(x_0)$. Если $\mathrm{D}^- f(x_0) > 0$ и $\mathrm{D}^+ f(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный максимум. Если $\mathrm{D}^- f(x_0) < 0$ и $\mathrm{D}^+ f(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум.*

Доказательство. Пусть $f \in C(x_0)$ и $\mathrm{D}^- f(x_0) > 0$, а

$\mathrm{D}^+ f(x_0) < 0$, тогда в силу теоремы из § 9 гл. 5 ч. 1 существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < f(x_0)\ \forall \in (x_0, x_0 + \delta)$, т. е. $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subset (a, b)$, так что x_0 – точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

Т е о р е м а (достаточный признак существования локального экстремума). *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$ и $x_0 \in (a, b)$. Пусть существует окрестность $U_\delta(x_0) \subset |a, b|$ такая, что $f(x) \uparrow$ ($\uparrow\uparrow$) на полуинтервале $(x_0 - \delta, x_0]$ и $f(x) \downarrow$ ($\downarrow\downarrow$) на полуинтервале $[x_0, x_0 + \delta)$. Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум (строгий локальный максимум).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении условия теоремы $f(x) \le f(x_0)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ (соответственно $f(x) < f(x_0)\ \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$) видим, что $x_0 \in (a, b)$ есть точка локального максимума (строгого локального максимума).

З а м е ч а н и е. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно, т. е. из того, что в точке $x_0 \in (a, b)$ функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, вообще говоря, не следует, что в полуинтервалах $[x_0, x_0 + \delta)$ и $(x_0 - \delta, x_0]$ функция $f(x)$ монотонна.

П р и м е р. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + 2x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

тогда $f(x) = x^2(2 + \sin(1/x)) \ge x^2 > 0 = f(0)\ \forall x \neq 0$, т. е. $x_0 = 0$ есть точка локального минимума функции $f(x)$.

Однако ($\mathrm{D}f(x) = 2x(2 + \sin(1/x)) - \cos(1/x) \equiv \varphi_1(x) + \varphi_2(x)) \Rightarrow (|\varphi_1(x)| = 2|x(2\sin(1/x))| \le 6|x| < 1/2\ \forall x \in \dot{U}_{1/12}(0))$, поэтому имеем $\forall n > 12/\pi$

$$\mathrm{D}f(\pm 1/n\pi) = (-1)^{n+1} + \varphi_1(\pm 1/n\pi) \begin{cases} > 0 \text{ при } n = 2k + 1, \\ < 0 \text{ при } n = 2k. \end{cases}$$

Таким образом, при $x \ge 0$ (соответственно при $x \le 0$) функция $f(x)$ не является монотонной.

С л е д с т в и е 1 (достаточный признак существования локального экстремума – по знаку 1-й производной). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$, $x_0 \in (a, b)$ и существует окрестность $U_\delta(x_0) \subset |a, b|$ такая, что $f \in C(U_\delta(x_0))$ и $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(x)$, причем $\mathrm{D}f(x) \ge 0$ ($\mathrm{D}f(x) > 0$) $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $\mathrm{D}f(x) \le 0$ ($\mathrm{D}f(x) < 0$) $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Тогда точка $x_0 \in (a, b)$ есть точка локального максимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$.

В самом деле, пусть $x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subset (a, b)$. Тогда при $x < x_0$ имеем $f \in C([x, x_0])$ и $\forall t \in (x, x_0)$ существует конечная или бесконечная производная $\mathrm{D}f(t) \ge 0$ ($\mathrm{D}f(t) > 0$), так что в силу теоремы Лагранжа

о конечных приращениях $\exists c_1 \in (x, x_0) \subset (x_0 - \delta, x_0)$ такая, что $f(x_0) - f(x) = \mathrm{D}(c_1)(x - x_0) \geq 0$ (> 0).

При $x > x_0$ аналогично в силу теоремы Лагранжа, примененной к функции $f \in C([x_0, x])$, видим, что $\exists c_2 \in (x_0, x)$ такая, что $f(x) - f(x_0) = \mathrm{D}f(c_2)(x - x_0) \leq 0$ (< 0), т. е. имеем $f(x) \leq f(x_0)(f(x) < f(x_0))$ $\forall x \in \dot{U}_\delta(x_0) \subset (a, b)$, и поэтому точка $x_0 \in (a, b)$ является точкой локального максимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$.

Замечание. Условие $f \in C(U(x_0))$ существенно для справедливости следствия 1 и не может быть отброшено, как показывает пример функции f (с графиком, изображенным на рис. 29) $f \in \mathcal{D}(\dot{U}(x_0))$, но $f \in C(x_0)$, $x_0 = 0$, причем $\mathrm{D}f(x) \begin{cases} > 0, & x < 0, \\ < 0, & x > 0. \end{cases}$ Но $x_0 = 0$ не есть точка локального максимума.

Пример. Пусть $f(x) = |x|$, $-\infty < x < +\infty$, тогда $f \in C((-\infty, +\infty))$ и $\mathrm{D}f(x) = \begin{cases} 1, & > 0, \\ -1, & < 0, \end{cases}$ так что точка $x_0 = 0$ есть точка строгого локального минимума нашей функции.

Следствие 2 (достаточный признак существования локального экстремума – по монотонности 1-й производной). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$, $x_0 \in (a, b)$ и существует окрестность $U(x_0) \subset |a, b|$ такая, что $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$. Пусть $\mathrm{D}(x_0) = 0$ и первая производная $\mathrm{D}(x)$ убывает (строго убывает) в точке x_0. Тогда точка $x_0 \in (a, b)$ есть точка локального максимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть производная $\mathrm{D}f(x)$ строго убывает в точке $x_0 \in (a, b)$. Тогда $\exists V_\delta(x_0) \subset U(x_0)$ такая, что $\forall x \in \dot{V}_\delta(x_0)$ $\mathrm{D}f(x) > \mathrm{D}f(x_0) = 0$ при $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, кроме того, $\mathrm{D}f(x) < \mathrm{D}f(x_0) = 0$ при $x \in (x_0, x_0 + \delta)$. Наконец, $f \in \mathcal{D}(U(x_0)) \Rightarrow f \in C(V_\delta(x_0))$, поэтому в силу следствия 1 точка $x_0 \in (a, b)$ есть точка строгого локального максимума функции $f(x)$.

Замечание. Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$, $x_0 \in (a, b)$ и существует окрестность $U(x_0) \subset (a, b)$ такая, что $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$. Пусть в точке x_0 выполнен необходимый признак существования локального экстремума (для дифференцируемой функции), т. е. $\mathrm{D}f(x_0) = 0$. Тогда если в окрестности $U(x_0)$ при переходе через точку x_0 производная $\mathrm{D}f(x)$ меняет знак с плюса на минус, то точка $x_0 \in (a, b)$ есть точка строгого локального максимума.

Аналогично, если при переходе через точку x_0 производная меняет знак с минуса на плюс, то точка $x \in (a, b)$ есть точка строгого минимума функции $f(x)$ (рис. 30 и табл. 1).

Таблица 1

x		x_0		x_1	
y		$\max\limits_{y_0}$		$\min\limits_{y_1}$	
y'	+	0	-	0	+

Следствие 3 (достаточное условие существования строгого локального экстремума – по знаку 2-й производной). Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a,b|$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$. Пусть $\mathrm{D}f(x_0) = 0$ и $\mathrm{D}^2 f(x_0) < 0$ ($\mathrm{D}^2 f(x_0) > 0$). Тогда точка $x_0 \in (a,b)$ есть точка строгого локального максимума (строгого локального минимума) функции $f(x)$.

Доказательство. Из условия $\mathrm{D}^2 f(x_0) < 0$ ($\mathrm{D}^2 f(x_0) > 0$) в силу теоремы о достаточном условии строгой монотонности функции в точке, примененной к производной $\mathrm{D}f(x)$, следует, что $\mathrm{D}f(x)$ строго убывает (строго возрастает) в точке $x_0 \in (a,b)$. Поскольку $\mathrm{D}f(x_0) = 0$, то производная $\mathrm{D}f(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), и поэтому (см. замечание к следствию 2) точка $x_0 \in (a,b)$ есть точка строгого локального максимума (строгого локального минимума) функции $f(x)$.

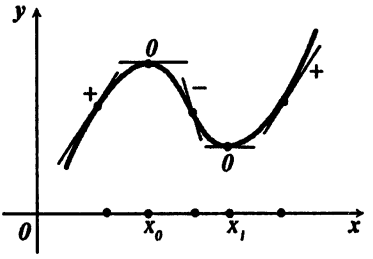


Рис. 30

Пример. Пусть $f(x) = -x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Тогда $\mathrm{D}f(x) = -2x$, $\mathrm{D}^2 f(x) = -2 < 0$, $\mathrm{D}f(0) = 0$, поэтому точка $x_0 = 0$ есть точка локального максимума функции.

Теорема. *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a,b|$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$ для $n \geq 2$, причем $\mathrm{D}^k(x_0) = 0$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$, но $\mathrm{D}^n f(x_0) \neq 0$. Тогда:*

1) если $n = 2m$ (четное) и $\mathrm{D}^{2m} f(x_0) > 0$ ($\mathrm{D}^{2m} f(x_0) < 0$), то точка $x_0 \in (a,b)$ есть точка строгого локального минимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$;

2) если $n = 2m+1$ (нечетное) и $\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) > 0$ ($\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) < 0$), то функция $f(x)$ строго возрастает (строго убывает) в точке x_0.

Доказательство. Из условий теоремы следует существование окрестности $U(x_0) \subset |a,b|$ такой, что $f \in \mathrm{D}^{(n-1)}(U(x_0))$ и $f \in \mathrm{D}^{(n)}(x_0)$. Тогда по теореме Тейлора имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, т. е. в окрестности $\dot{U}(x_0)$ имеем $f(x) = \mathcal{P}_n(x; f, x_0) + o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0)$, причем в силу условий $\mathrm{D}^k f(x_0) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$ $\mathcal{P}_n(x; f, x_0) =$

$f(x_0) + \mathrm{D}^n f(x_0)\dfrac{(x-x_0)^n}{n!}$, т. е. имеем представление $f(x) - f(x_0) = \dfrac{\mathrm{D}^n f(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$ $(x \to x_0)$.

Поскольку $\mathrm{D}^n f(x_0) \neq 0$, то по теореме о знаке для эквивалентных функций (допускающих представление вида $f = g + o(g)$ $(x \to x_0 \pm 0)$) следует, что $\exists \delta > 0$ такое, что знак разности $f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком функции $\mathrm{D}^n f(x_0)(x-x_0)^n$ в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta) \subset \dot{U}(x_0)$. Поэтому если $n = 2m$ (четное), то

$$(\mathrm{D}^{2m} f(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) > f(x_0)\, \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0))$$

(аналогично $(\mathrm{D}^{2m} f(x_0) < 0) \Rightarrow (f(x) < f(x_0) \forall x \in \dot{U}_\delta(x_0))$). Таким образом, при $n = 2m$ x_0 – точка строгого локального минимума (строгого локального максимума) функции $f(x)$. Если же $n = 2m+1$ (нечетное), то $(\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) - f(x_0) < 0\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) - f(x_0) > 0\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta))$, т. е. функция $f(x)$ строго возрастает в точке $x_0 \in (a, b)$ (аналогично при $\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) < 0$ такое же рассуждение показывает, что функция $f(x)$ строго убывает в точке $x_0 \in (a, b)$).

Пример 1. Пусть $f(x) = x^4$, $x \in (-\infty, +\infty)$ (рис. 31). Тогда $\mathrm{D}f(x) = 4x^3$, $\mathrm{D}^2 f(x) = 12x^2$, $\mathrm{D}^3 f(x) = 24x$, $\mathrm{D}^4 f(x) = 24 > 0$, $\mathrm{D}^k f(0) = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, т. е. точка $x_0 = 0$ есть точка строгого локального минимума функции $f(x)$.

Пример 2. Пусть (рис. 32)

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x^2), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

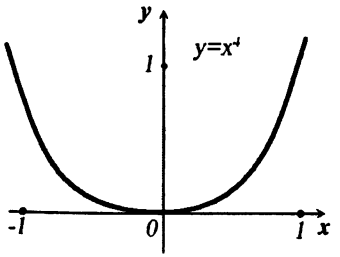


Рис. 31

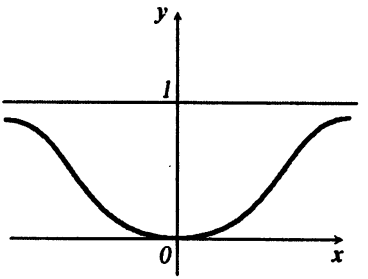


Рис. 32

Тогда $\mathrm{D}^k f(0) = 0\ \forall k \geq 1$ и теорема не применима, хотя $x_0 = 0$ есть точка строгого локального минимума функции $f(x)$, так как производная $\mathrm{D}f(x) = 2x^{-3}\exp(-x^{-2})$ при переходе через точку $x_0 = 0$ меняет знак с минуса на плюс.

§ 3. Направление выпуклости. Точки перегиба

Определение. *Пусть функция* $f \in C((a,b))$ *и* $x_0 \in (a,b)$. *Пусть* $f \in \mathcal{D}(x_0)$ *и* $y = L(x,x_0)$ *есть уравнение касательной к графику* $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(x),\ x \in (a,b)\}$ *функции* $f(x)$ *в точке* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$. *Скажем, что функция* $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вниз в точке* x_0, *если существует окрестность* $U(x_0) \subset (a,b)$ *такая, что* $f(x) \geq L(x,x_0)$ $(f(x) > L(x,x_0))$ $\forall x \in \dot{U}(x_0)$.

Аналогично, функция $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вверх в точке* x_0, *если существует* $U(x_0) \subset (a,b)$ *такая, что* $f(x) \leq L(x,x_0)$ $(f(x) < L(x,x_0))$ $\forall x \in \dot{U}(x_0)$.

Замечание. Если функция $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) в точке $x_0 \in (a,b)$, то в некоторой окрестности этой точки $U(x_0) \subset (a,b)$ график $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(x),\ x \in U(x_0)\}$ функции $f(x)$ находится над (под) касательной, проходящей через точку $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ (рис. 33).

Определение. *Пусть* $f \in C((a,b))$ *и* $x_0 \in (a,b)$. *Пусть* $f \in \mathcal{D}(x_0)$. *Точка* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *называется точкой перегиба графика функции* $f(x)$, *если существует окрестность* $U(x_0) \subset (a,b)$ *такая, что* $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ $f(x) < L(x,x_0)$ $(f(x) > L(x,x_0))$ *для* $x < x_0$ *и* $f(x) > L(x,x_0)$ $(f(x) < L(x,x_0))$ *для* $x > x_0$.

Рис. 33

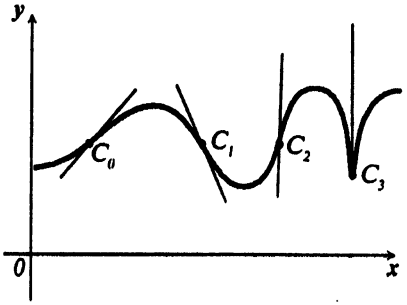


Рис. 34

Определение. *Пусть* $f \in C((a,b))$ *и* $x_0 \in (a,b)$ *и* $\exists \mathrm{D} f(x_0) = +\infty$ $(-\infty)$, *тогда точка* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *также называется точкой перегиба графика* Γ *функции* $f(x)$.

Замечание. Если точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ функции $f(x)$, то в некоторой окрестности $U(x_0) \subset (a,b)$ точки $x_0 \in (a,b)$ график Γ переходит с одной стороны касательной на другую (рис. 34).

Заметим, что точки $c_i \in \Gamma$ $(i = 0,1,2)$ являются точками перегиба графика Γ, в то время как точка $c_3 \in \Gamma$ не является точкой перегиба, поскольку в точке c_3 нет вертикальной касательной (хотя и есть

вертикальные правая и левая полукасательные).

Пусть $f \in C((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in \mathcal{D}(x_0)$. Если $y = L(x, x_0)$ есть уравнение касательной к графику Γ функции $f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, то имеем $L(x, x_0) = f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0)$, $-\infty < x < +\infty$.

Введем при $x \in (a,b)$ функцию $\Delta(x) = f(x) - L(x, x_0)$, так что $\Delta(x) = f(x) - f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0)$ $\forall x \in (a,b)$, и заметим, что $\Delta \in C((a,b)) \wedge \mathcal{D}(x_0)$, причем $\Delta(x_0) = 0$ и $\mathrm{D}\Delta(x_0) \equiv \mathrm{D}f(x_0) - \mathrm{D}f(x_0) = 0$.

Т е о р е м а (критерий выпуклости дифференцируемой функции в точке и критерий существования точки перегиба графика дифференцируемой функции). *Пусть* $f \in C((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ *и* $f \in \mathcal{D}(x_0)$. *Тогда:*

1) (*функция* $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вниз в точке* x_0) $\Leftrightarrow$ (*функция* $\Delta(x)$ *имеет в точке* x_0 *локальный минимум (строгий локальный минимум)*);

2) (*функция* $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вверх в точке* x_0) $\Leftrightarrow$ (*функция* $\Delta(x)$ *имеет в точке* x_0 *локальный максимум (строгий локальный максимум)*);

3) (*точка* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *есть точка перегиба графика* Γ *функции* $f(x)$) $\Leftrightarrow$ (*функция* $\Delta(x)$ *строго монотонна в точке* x_0).

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Если функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) вниз в точке x_0, то существует окрестность $U(x_0) \subset (a,b)$ такая, что $\Delta(x) \geq 0 = \Delta(x_0)$ ($\Delta(x) > 0 = \Delta(x_0)$) $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, т. е. x_0 – точка локального минимума (строгого локального минимума) функции $\Delta(x)$.

Обратное утверждение докажите самостоятельно. Очевидно, утверждение 2) нашего критерия доказывается так же, как и утверждение 1).

Далее,

3) если точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ функции $f(x)$, то $\exists U(x_0) \subset (a,b)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ $\Delta(x) > 0 = \Delta(x_0)$ ($\Delta(x) < 0 = \Delta(x_0)$) при $x < x_0$ и $\Delta(x) < 0 = \Delta(x_0)$ ($\Delta(x) > 0 = \Delta(x_0)$) при $x > x_0$, т. е. функция $\Delta(x)$ строго монотонна в точке x_0.

Обратно, если функция $\Delta(x)$ строго монотонная (например, строго возрастает) в точке $x_0 \in (a,b)$, то $\exists U(x_0) \subset (a,b)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(x_0)$ $\Delta(x) < \Delta(x_0) = 0$ при $x < x_0$ и $\Delta(x) > \Delta(x_0) = 0$ при $x > x_0$, но это и означает, что точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ функции $f(x)$.

Т е о р е м а 1 (достаточный признак выпуклости функции в точке и существования точки перегиба у ее графика – по первой производной). *Пусть* $f \in \mathcal{D}((a,b))$ *и* $x_0 \in (a,b)$. *Тогда:*

1) если $\mathrm{D}f(x) \uparrow (\Uparrow)$ *в точке* x_0, *то функция* $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вниз в точке* x_0;

2) если $\mathrm{D}f(x) \downarrow (\Downarrow)$ *в точке* x_0, *то функция* $f(x)$ *выпукла (строго выпукла) вверх в точке* x_0;

3) если производная $\mathrm{D}f(x)$ *имеет в точке* x_0 *строгий локальный экстремум, то точка* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *является точкой перегиба графика* Γ *функции* $f(x)$.

Доказательство. При выполнении условий теоремы 1 $\forall x \in (a,b)\ \exists \mathrm{D}\Delta(x) = \mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)$, причем $\mathrm{D}\Delta(x_0) = 0$.

1) Если производная $\mathrm{D}f(x) \uparrow (\Uparrow)$ в точке x_0, то $\exists U(x_0) \subset (a,b)$ такая, что $\forall x \in \dot{U}(x_0)\ \mathrm{D}\Delta(x) \le 0 = \mathrm{D}\Delta(x_0)$ $(\mathrm{D}\Delta(x) < 0)$ при $x < x_0$ и $\mathrm{D}\Delta(x) \ge 0 = \mathrm{D}\Delta(x_0)$ $(\mathrm{D}\Delta(x) > 0)$ при $x > x_0$, причем $\mathrm{D}\Delta(x_0) = 0$. Поэтому функция $\Delta(x)$ имеет в точке $x = x_0$ локальный нулевой минимум (строгий локальный нулевой минимум), т. е. $\Delta(x) \ge 0$ $(\Delta(x) > 0)$ $\forall x \in \dot{U}(x_0)$, и поэтому в окрестности $U(x_0)$ график Γ функции $f(x)$ находится над касательной, так что функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла вниз) в точке x_0. Утверждение 2) теоремы 1 доказывается аналогично.

3) Пусть, например, производная $\mathrm{D}f(x)$ имеет в точке x_0 строгий локальный минимум. Тогда существует окрестность $U(x_0) \subset (a,b)$ такая, что $(\mathrm{D}f(x) > \mathrm{D}f(x_0)) \Rightarrow (\mathrm{D}\Delta(x) > 0)\ \forall x \in \dot{U}(x_0)$. Но тогда в силу следствия из теоремы о строгой монотонности дифференцируемой функции функция $\Delta(x) \Uparrow$ на $U(x_0)$, и поэтому функция $\Delta(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, так что график Γ переходит с одной стороны касательной на другую в точке $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, являющейся тем самым точкой перегиба Γ.

Следствие (необходимое условие существования точки перегиба). Если $f \in \mathcal{D}((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ и $\exists \mathrm{D}^2 f(x_0)$, то равенство $\mathrm{D}^2 f(x_0) = 0$ является необходимым условием существования точки перегиба $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ графика Γ функции $f(x)$.

В самом деле, если $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ функции $f(x)$, то функция $\Delta(x)$ строго монотонна в точке x_0 и поэтому меняет знак при переходе через точку x_0, причем $\Delta(x_0) = \mathrm{D}\Delta(x_0) = 0$ и $\mathrm{D}^2\Delta(x_0) = \mathrm{D}^2 f(x_0)$. Если бы $\mathrm{D}^2 f(x_0) \ne 0$, то функция $\Delta(x)$ имела бы в точке x_0 строгий локальный нулевой экстремум и поэтому не могла бы менять знак при переходе через x_0. Противоречие, т. е. $\mathrm{D}^2 f(x_0) = 0$.

Замечание. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Так, график функции $f : x \to x^4$ (см. рис. 31) не имеет точку $(0, f(0)) \in \Gamma$ точкой перегиба, хотя $\mathrm{D}^2 f(0) = 0$.

Теорема 2 (достаточный признак выпуклости функции в точке и существования точки перегиба у ее графика – по производным высшего порядка). *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{(n-1)}((a,b))$ *при* $n \ge 2$ $x_0 \in (a,b)$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$. *Пусть* $\mathrm{D}^k f(x_0) = 0$ $(1 < k < n)$, *но* $\mathrm{D}^n f(x_0) \ne 0$. *Тогда:*

1) если $n = 2m$ *(четное), то функция* $f(x)$ *в точке* x_0 *строго выпукла вниз при* $\mathrm{D}^{2m} f(x_0) > 0$ *и строго выпукла вверх при* $\mathrm{D}^{2m} f(x_0)$;

2) если при $m \ge 1$ $n = 2m+1$ *(нечетное) и* $\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) \ne 0$, *то точка* $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *есть точка перегиба графика* Γ *функции* $f(x)$.

Доказательство. Из условий теоремы 2 $f \in \mathcal{D}^{(n-1)}((a,b))$ и $f \in \mathcal{D}^{(n)}(x_0)$. Тогда по теореме Тейлора имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, причем в силу условий $\mathrm{D}^k f(x_0) = 0$ $(1 < k < n)$ имеем представление $f(x) = f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0) + \dfrac{\mathrm{D}^n f(x_0)}{n!}(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0 \pm 0)$, откуда $f(x) - L(x, x_0) = \dfrac{\mathrm{D}^n f(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ $(x \to x_0 \pm 0)$. Поскольку $\mathrm{D}^n f(x_0) \neq 0$, то по теореме о знаке для эквивалентных функций, допускающих представление $f = g + o(g)$ $(x \to x_0 \pm 0)$, следует, что $\exists \delta > 0$ такое, что знак разности $f(x) - L(x, x-0)$ совпадает со знаком функции $\mathrm{D}^n f(x_0)(x - x_0)$ в полуокрестностях $(x_0 - \delta, x_0)$, $(x_0, x_0 + \delta) \subset (a, b)$. Поэтому если $n = 2m$ (четное), то $(\mathrm{D}^{2m} f(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) - L(x, x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) > L(x, x_0)\ \forall x \in \dot{U}(x_0))$. Аналогично $(\mathrm{D}^{2m} f(x_0) < 0) \Rightarrow (f(x) < L(x, x_0)\ \forall x \in \dot{U}(x_0))$, т. е. при $n = 2m$ функция $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) в точке $x_0 \in (a, b)$.

Если же $n = 2m+1$ (нечетное), причем $m \geq 1$, то $(\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) > 0) \Rightarrow (f(x) - L(x, x_0) < 0) \Rightarrow (f(x) < L(x, x_0)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) > L(x, x_0)\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta))$.

Аналогично при $\mathrm{D}^{2m+1} f(x_0) < 0$ имеем $f(x) > L(x, x_0)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ и $f(x) < L(x, x_0)\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, т. е. при $n = 2m + 1$ $(m \geq 1)$ точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ является точкой перегиба графика Γ функции $f(x)$.

Следствие 1 (достаточный признак существования точки перегиба у графика функции – по 3-й производной). Пусть $f \in \mathcal{D}^{(2)}((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in \mathcal{D}^{(3)}(x_0)$. Если $\mathrm{D}^2 f(x_0) = 0$, но $\mathrm{D}^3 f(x_0) \neq 0$, то точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ функции $f(x)$.

Пример. Пусть $f : x \to x^3$ (см. рис. 25). Тогда $\mathrm{D}f(x) = 3x^2$, $\mathrm{D}^2 f(x) = 6x$, $\mathrm{D}^3 f(x) = 6 > 0$, $\mathrm{D}^2 f(0) = 0$, $\mathrm{D}^3 f(0) \neq 0$, поэтому точка $(0, f(0)) \in \Gamma$ есть точка перегиба графика Γ нашей функции.

Следствие 2 (достаточный признак строгой выпуклости функции в точке – по 2-й производной). Пусть $f \in \mathcal{D}((a,b))$, $x_0 \in (a,b)$ и $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$. Тогда если $\mathrm{D}^2 f(x_0) > 0$ $(\mathrm{D}^2 f(x_0) < 0)$, то функция $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) в точке x_0. В самом деле, $f(x) - L(x, x_0) = \dfrac{1}{2!}\mathrm{D}^2 f(x_0)(x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2)$ $(x \to x_0)$ и при $\mathrm{D}^2 f(x_0) > 0$ $f(x) - L(x, x_0) > 0\ \forall x \in \dot{U}(x_0)$, т. е. функция $f(x)$ строго выпукла вниз в точке x_0.

Теорема. *Пусть* $f \in \mathcal{D}((a,b))$, *причем* $\mathrm{D}f(x) \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ *на* (a,b), *тогда* $\forall [x_1, x_2] \subset (a,b)$ – *хорда, соединяющая точки* $M_1 = (x_1, f(x_1)) \in \Gamma$ *и* $M_2 = (x_2, f(x_2)) \in \Gamma$, *лежит выше (ниже) куска графика* $\Gamma_{M_1 M_2} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(x),\ x \in (x_1, x_2)\}$ *функции* $f(x)$ (рис. 35).

Доказательство. Пусть $M_i = (x_i, f(x_i)) \in \Gamma$ $(i = 1, 2)$, где $a < x_1 < x_2 < b$, тогда уравнение секущей, проходящей через точки $M_1 \in \Gamma$ и $M_2 \in \Gamma$, имеет вид $\dfrac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ или $y = l(x)$, если положить $l(x) = f(x_1) + \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1)$. Утверждение теоремы сводится к доказательству неравенства

$$l(x) > f(x) (l(x) < f(x)) \ \forall x \in (x_1, x_2).$$

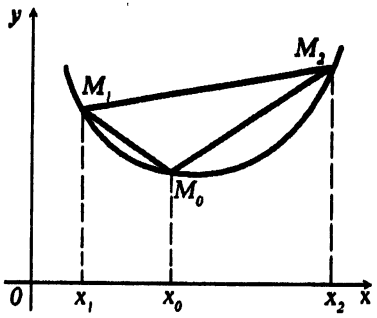


Рис. 35

Пусть $x_0 \in (x_1, x_2)$ - любая, но фиксированная точка, тогда

$$l(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_1}[(f(x_2) - f(x_1))(x_0 - x_1) +$$

$$+(f(x_1) - f(x_0))(x_2 - x_1)] = \frac{1}{x_2 - x_1}[(f(x_2) - f(x_0)(x_0 - x_1) +$$

$$+(f(x_0) - f(x_1))(x_0 - x_1 - x_2 + x_1)] \Rightarrow (l(x_0) - f(x_0) =$$

$$= \frac{1}{x_2 - x_1}[(f(x_2) - f(x_0))(x_0 - x_1) - (f(x_0) - f(x_1))(x_2 - x_0)]).$$

Применяя к функции $f(t)$ теорему Лагранжа о конечных приращениях на отрезках $[x_1, x_0]$ и $[x_0, x_2]$, видим, что $\exists c_1 \in (x_1, x_0)$ и $\exists c_2 \in (x_0, x_2)$ такие, что $f(x_2) - f(x_0) = \mathrm{D}f(c_2)(x_2 - x_0)$, $f(x_0) - f(x_1) = \mathrm{D}f(c_1)(x_0 - x_1)$. Но тогда имеем $a < x_1 < c_1 < x_0 < c_2 < x_2 < b$

$$l(x_0) - f(x_0) = \frac{1}{x_2 - x_1}[\mathrm{D}f(c_2) - \mathrm{D}f(c_1)](x_0 - x_1)(x_2 - x_0),$$

откуда в силу условия $\mathrm{D}f(x) \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ на (x_1, x_2) и $c_2 > c_1$ имеем $(\mathrm{D}f(c_2) - \mathrm{D}f(c_1) > 0 \ (< 0)) \Rightarrow (l(x_0) > f(x_0) \ (l(x_0) < f(x_0)))$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Если $\mathrm{D}f(x) \uparrow\uparrow$ на (a, b), то утверждение теоремы аналитически выражается неравенством $l(x) > f(x) \ \forall x \in (x_1, x_2)$

и $\forall[x-1, x_2] \subset (a, b)$, которое в свою очередь эквивалентно следующему неравенству (условию выпуклости): $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)\ \forall \lambda \in (0,1)$.

В самом деле, $\forall[x_1, x_2] \subset (a, b)$ пусть $\lambda_0 \in (0,1)$, тогда при $\lambda_0 = (x_2 - x_0)/(x_2 - x_1)$, $1 - \lambda_0 = (x_0 - x_1)/(x_2 - x_1)$ имеем $x_0 = \lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2 \in (x_1, x_2)$, и тогда

$$l(x_0) > f(x_0) \Rightarrow \left(\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_0 - x_1) + f(x_1) > f(x_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f(x_1)\frac{(x_2 - x_0)}{x_2 - x_1} + f(x_2)\frac{(x_0 - x_1)}{x_2 - x_1} > f(x_0)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f(\lambda_0 x_1 + (1 - \lambda_0)x_2) < \lambda_0 f(x_1) + (1 - \lambda_0)f(x_2)).$$

О п р е д е л е н и е. *Функция $f(x)$, определенная на интервале (a, b), называется выпуклой (строго выпуклой) вниз на интервале (a, b), если $\forall$ отрезка $[x_1, x_2] \subset (a, b)$ и $\forall \lambda \in (0,1)$ выполнено неравенство $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$ (соответственно $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$).*

З а м е ч а н и е. Если в определении $\forall x \in (x_1, x_2)$ положить $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x$, то получаем $\lambda = \dfrac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ и $1 - \lambda = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$, где $0 < \lambda < 1$, $0 < 1 - \lambda < 1$, и тогда $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(x)$, так что

$$\lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \equiv l(x) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

где $y = l(x)$ есть уравнение секущей, проходящей через точки $M_1 = (x_1, f(x_1))$, $M_2 = (x_2, f(x_2)) \in \Gamma = \{y = f(x) | x_1 \le x \le x_2\}$. Таким образом, неравенство из (глобального) определения выпуклости (строгой выпуклости) вниз функции $f(x)$ эквивалентно неравенствам

$$f(x) \le l(x)\ (f(x) < l(x))\ \forall x \in [x_1, x_2] \subset (a, b).$$

Аналогично определяется выпуклость (строгая выпуклость) вверх функции $f(x)$ на интервале (a, b).

С л е д с т в и е 1 (достаточный признак строгой выпуклости дифференцируемой функции). Если $f \in \mathcal{D}((a, b))$ и первая производная $\mathrm{D}f(x) \uparrow\uparrow (\downarrow\downarrow)$ на (a, b), то функция $f(x)$ строго выпукла вниз (вверх) на интервале (a, b).

С л е д с т в и е 2 (достаточный признак выпуклости для дважды дифференцируемой функции). Пусть $f \in \mathcal{D}^{(2)}((a, b))$ и $\mathrm{D}^2 f(x) \ge 0$ $(\mathrm{D}^2 f(x) > 0)\ \forall x \in (a, b)$, тогда функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) вниз на интервале (a, b).

Пример 1. Функция $f(x) = x^\alpha$, $x \in (0, +\infty)$ строго выпукла вниз на $(0, +\infty)$ при $(\alpha < 0) \wedge (\alpha > 1)$ и строго выпукла вверх на $(0, +\infty)$ при $0 < \alpha < 1$. В самом деле, имеем $\forall x > 0$

$$\mathrm{D}^2(x^\alpha) = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \begin{cases} < 0 \text{ при } 0 < \alpha < 1, \\ > 0 \text{ при } \alpha < 0 \text{ или } \alpha > 1. \end{cases}$$

Пример 2. Функция $f(x) = -\ln|x|$ $\forall x \neq 0$ строго выпукла вниз как на $(-\infty, 0)$, так и на $(0, +\infty)$, поскольку $\mathrm{D}^2(-\ln|x|) = \mathrm{D}(-1/x) = 1/x^2 > 0$ $\forall x \neq 0$.

Замечание. Если функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) вниз на (a, b), то для функции «наклона» $\varphi(x; x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$ имеем $\varphi(x; x_0) \uparrow (\uparrow\uparrow)$ на $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

В самом деле, пусть для определенности $f(x)$ строго выпукла вниз на (a, b), так что $l(x) > f(x)$ $\forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$ и, в частности, $\forall x \in (x_1, x_2)$ $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) + (f(x_1) - f(x)) > 0$, т. е.

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \; \forall x \in (x_1, x_2) \subset (a, b).$$

Тогда в случае $a < x_1 < x_2 < x_0$, полагая $x = x_0$, имеем

$$\varphi(x_1; x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \varphi(x_2; x_0).$$

В случае $a < x_0 < x_1 < x_2$, полагая $x = x_0$, имеем

$$\varphi(x_1; x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \varphi(x_2; x_0),$$

и, наконец, в случае $a < x_1 < x_0 < x_2$, полагая $x = x_0$, имеем

$$\varphi(x_1; x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} < \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \varphi(x_2; x_0),$$

т. е. $\varphi(x; x_0) \uparrow\uparrow$ на $(a, b) \setminus \{x_0\}$.

Теорема (о непрерывности выпуклой вниз функции). *Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на (a, b). Тогда $\forall x_0 \in (a, b)$ существуют конечные односторонние производные $-\infty < \mathrm{D}^- f(x_0) \leq \mathrm{D}^+ f(x_0) < +\infty$, так что $f \in C((a, b))$, причем $\forall [x_1, x_2] \subset (a, b)$ имеем*

$$\mathrm{D}^- f(x_1) \leq \mathrm{D}^+ f(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \mathrm{D}^- f(x_2) \leq \mathrm{D}^+ f(x_2),$$

так что $\mathrm{D}^- f(x) \uparrow$ на (a, b), $\mathrm{D}^+ f(x) \uparrow$ на (a, b).

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b); тогда $\varphi(x;x_0) \uparrow$ на $(a,b)\setminus\{x_0\}$, так что при $x < x_0 < x_2$ $\varphi(x;x_0) \le \varphi(x_2;x_0)$.

Тогда в силу существования ограниченного предела монотонной ограниченной функции $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} \varphi(x;x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \mathrm{D}^-f(x_0) \le \varphi(x_2;x_0) = \dfrac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} \varphi(x_2;x_0) = \mathrm{D}^+f(x_0) \ge \mathrm{D}^-f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} \varphi(x;x_0)$, так что $\forall x_0 \in (a,b)\ \exists \mathrm{D}^-f(x_0) \le \mathrm{D}^+f(x_0)$, и поэтому $f \in C(x_0)\ \forall x_0 \in (a,b)$.

Далее,

$$\varphi(x_1;x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \varphi(x_2;x_1),$$

откуда имеем

$$\lim_{x_1\to x_2-0} \varphi(x_1;x_2) = \mathrm{D}^-f(x_2) \le \mathrm{D}^+f(x_2),$$

так что имеем $\mathrm{D}^-f(x_1) \le \mathrm{D}^+f(x_1) \le \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \mathrm{D}^-f(x_2) \le \mathrm{D}^+f(x_2)$ и, в частности, $\mathrm{D}^-f(x) \uparrow$ на (a,b) и $\mathrm{D}^+f(x) \uparrow$ на (a,b).

Можно доказать следующий критерий.

Теорема (критерий выпуклости вниз функции на интервале). *(Функция $x \to f(x)$ выпукла вниз на интервале (a,b)) $\Leftrightarrow$ (функция $f(x)$ обладает двумя свойствами: 1) $f \in C((a,b))$ и 2) $\forall x \in (a,b)$ существуют конечные односторонние производные $\mathrm{D}^+f(x)$ и $\mathrm{D}^-f(x)$, где равенство $\mathrm{D}^+f(x) = \mathrm{D}^-f(x) = \mathrm{D}f(x)$ имеет место всюду, за исключением, быть может, счетного множества точек на (a,b), при этом $\mathrm{D}^-f(x) \le \mathrm{D}^+f(x)\ \forall x \in (a,b)$,*

$$\mathrm{D}^+f(x_1) \le \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \le \mathrm{D}^-f(x_2),\ x_1 < x_2,$$

и, в частности, $\mathrm{D}^-f(x) \uparrow$ на (a,b) и $\mathrm{D}^+f(x) \uparrow$ на (a,b)).

Теорема (критерий выпуклости вниз для дифференцируемой функции). *Пусть $f \in \mathcal{D}((a,b))$. Тогда (функция $f(x)$ выпукла (строго выпукла) вниз на (a,b)) $\Leftrightarrow$ ($\mathrm{D}f(x) \uparrow$ ($\uparrow\uparrow$) на (a,b)).*

Доказательство. Достаточность критерия вытекает из следствия 1 ранее доказанной теоремы.

Необходимость. Пусть, например, $f(x)$ строго выпукла вниз на интервале (a,b) и $a < x_1 < x_2 < b$. Тогда, вспоминая неравенство $l(x) > f(x)\ \forall x \in (x_1,x_2)$, характеризующее строго выпуклую вниз функцию $f(x)$, имеем

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + f(x_1) > f(x)\ \forall x \in (x_1,x_2)$$

или $(f(x_2)-f(x_1))(x-x_1)+(f(x_1)-f(x))[(x_2-x)+(x-x_1)]>0$, т. е. $(f(x_2)-f(x))(x-x_1)+(f(x_1)-f(x))(x_2-x)>0\ \forall x\in(x_1,x_2)$, откуда

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}\ \forall x\in(x_1,x_2). \tag{3.1}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $x\to x_1+0$, а затем при $x\to x_2-0$ и вспоминая, что $f\in\mathcal{D}((a,b))$, получаем $\mathrm{D}f(x_1)\le\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\le\mathrm{D}f(x_2)\ \forall x_1<x_2$, так что доказано $\mathrm{D}f(x)\uparrow$ на (a,b).

Вновь возвращаясь к строгим оценкам (3.1), применяя теорему Лагранжа для функции $f(t)$ на отрезках $[x_1,x]$ и $[x,x_2]$, видим, что $\exists c_1\in(x_1,x)$ и $\exists c_2\in(x,x_2)$ (так что $x_1<c_1<x<c_2<x_2$), для которых имеем

$$\mathrm{D}f(c_1)=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}<\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\mathrm{D}f(c_2).$$

Но по доказанному ранее $\mathrm{D}f(x)\uparrow$ на (a,b), поэтому из оценок $x_1<c_1<c_2<x_2$ имеем $\mathrm{D}f(x_1)\le\mathrm{D}f(c_1)<\mathrm{D}f(c_2)\le\mathrm{D}f(x_2)$, т. е. $\mathrm{D}f(x_1)<\mathrm{D}f(x_2)\ \forall x_1<x_2\Rightarrow(\mathrm{D}f(x)\uparrow\uparrow$ на $(a,b))$.

Замечание 1. Для функции $f\in\mathcal{D}((a,b))$ из глобальной выпуклости функции на интервале следует локальная выпуклость функции в каждой точке интервала.

Замечание 2. Если функция $f(x)$ строго выпукла вниз на (a,b), то попутно доказанное неравенство (3.1) показывает, что угловой коэффициент хорды M_1M_0 меньше углового коэффициента хорды M_0M_2 (здесь $M_1=(x_1,f(x_1))\in\Gamma$),

$$M_0=(x_0,f(x_0))\in\Gamma,\ M_2=(x_2,f(x_2))\in\Gamma\ \text{(см. рис. 35)}.$$

Следствие (критерий выпуклости вниз для дважды дифференцируемой функции). Пусть $f\in\mathcal{D}^{(2)}((a,b))$. Тогда (функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b)) $\Leftrightarrow(\mathrm{D}^2f(x)\ge0\ \forall x\in(a,b))$.

Теорема (критерий строгой выпуклости вниз для дважды дифференцируемой функции). *Пусть* $f\in\mathcal{D}^{(2)}((a,b))$, *тогда* (*функция* $f(x)$ *строго выпукла вниз на* (a,b)) $\Leftrightarrow$ (*выполнены два условия:*

1) $\mathrm{D}^2f(x)\ge0\ \forall x\in(a,b)$ *и*

2) множество точек $x_0\in(a,b)$, *для которых* $\mathrm{D}^2f(x_0)>0$, *плотно на* (a,b)).

Для доказательства теоремы достаточно воспользоваться критерием строгой монотонности производной $\mathrm{D}f(x)$ для дважды дифференцируемой функции $f\in\mathcal{D}^{(2)}((a,b))$. Условия 1) и 2) необходимы и достаточны для того, чтобы $\mathrm{D}f(x)\uparrow\uparrow$ на (a,b) (ср. теорему 3 из § 1 гл. 6).

Т е о р е м а (неравенство Йенсена). *Пусть функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b). Тогда $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$ и $\forall \alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ имеет место неравенство*

$$f(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \ldots + \alpha_n f(x_n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$, полагая $\alpha = \lambda$ и $\alpha_2 = 1 - \lambda$, $\lambda \in (0,1)$, поскольку функция $f(x)$ выпукла вниз на (a,b), имеем оценку $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ $f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$, так что неравенство Йенсена для $n = 2$ справедливо.

Дальнейшее доказательство проведем по индукции переходом от $n = m - 1$ и $n = m$. Пусть $\alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ и, например $\alpha_n > 0$. Тогда $\lambda_2 = \alpha_2 + \ldots + \alpha_n > 0$,

$$\frac{\alpha_2}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\lambda_2} = 1, \ \alpha_1 + \lambda_2 = 1.$$

Заметим, что при $z_i \in (a,b)$, $\gamma_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 1$, очевидно, имеем оценки

$$a = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i a < \sum_{i=1}^{m} \gamma_i z_i < \sum_{i=1}^{m} \gamma_i b = b,$$

так что поскольку $x_2, x_3, \ldots, x_n \in (a,b)$ и $\alpha_i/\lambda_2 \in [0,1]$ $(i \geq 2)$, то $\sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_2} x_i \in (a,b)$. Используя предположения индукции, имеем

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) = f\left(\alpha_1 x_1 + \lambda_2 \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i x_i}{\lambda_2}\right)\right) \leq \alpha_1 f(x_1) +$$

$$+\lambda_2 f\left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_2} \cdot x_i\right) \leq \alpha_1 f(x_1) + \lambda_2 \left(\sum_{i=2}^{n} \frac{\alpha_i}{\lambda_2} \cdot f(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

чем неравенство Йенсена доказано.

З а м е ч а н и е. Если функция $f(x)$ выпукла вверх на (a,b), то $\forall x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a,b)$, $\forall \alpha_i \geq 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, имеет место неравенство Йенсена

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i).$$

Пример. Функция $f(x) = \ln x$ строго выпукла вверх на $(0, +\infty)$, поэтому в силу неравенства Йенсена $\forall \alpha_i \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$, $x_i > 0$, имеем $\alpha_1 \ln x_1 + \ldots + \alpha_n \ln x_n \leq \ln(\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n)$ или $x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \leq \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$. В частности, при $\alpha_i = 1/n$ $\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$ (соотношение между средним геометрическим и средним арифметическим).

§ 4. Условия постоянства функции. Первообразные функции

Теорема 1. *Пусть* $f \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$. *Тогда* $(f(x) \equiv \text{const}$ *на* $[a,b]) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{D}((a,b))$ *и* $\mathrm{D}f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$, тогда, очевидно, $f \in C([a,b])$ и $\mathrm{D}f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Достаточность. Пусть $f \in C([a,b])$ и $\mathrm{D}f(x) = 0 \ \forall x \in (a,b)$. Тогда $|\mathrm{D}f(x)| = L = 0 \ \forall x \in (a,b)$, и в силу следствия 1 из теоремы Лагранжа о конечных приращениях $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$ имеем оценку (условие Липшица) $(0 \leq |f(x_2) - f(x_1)| \leq L|x_2 - x_1| = 0) \Rightarrow (f(x_2) = f(x_1))$ и, в частности, при $x_0 \in [a,b]$ имеем $f(x) = f(x_0) = c \ \forall x \in [a,b]$.

Следствие. Пусть $f_1, f_2 \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$, причем

$$\mathrm{D}f_1(x) = \mathrm{D}f(x_2) \ \forall x \in (a,b).$$

Тогда $f_1(x) - f_2(x) \equiv \text{const}$ на $[a,b]$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\varphi(x) = f_1(x) - f_2(x) \ \forall x \in [a,b]$, тогда $\varphi \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ и $\forall x \in (a,b)$ $\exists \mathrm{D}\varphi(x) = 0$. В силу теоремы 1 $\varphi(x) \equiv \text{const}$ на $[a,b]$, т. е. $f_1(x) - f_2(x) \equiv \text{const}$ на $[a,b]$.

Определение. *Пусть функции* $f(x)$ *и* $F(x)$ *определены на интервале* (a,b). *Если* $\forall x \in (a,b)$ $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$, *то функция* $F(x)$ *называется точной первообразной (точной примитивной) функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b).

Теорема 2. *Если функция* $f(x)$, *определенная на интервале* (a,b), *имеет на этом интервале точную первообразную* $F_0(x)$, *то множество всех точных первообразных функции* $f(x)$ *на интервале* (a,b) *совпадает с множеством (функций)* $F(x) = F_0(x) + C$, *где* C – *любая постоянная.*

Доказательство. 1) Пусть $F_0(x)$ есть точная первообразная функции $f(x)$ на интервале (a,b), так что $\forall x \in (a,b)$ $\exists \mathrm{D}F_0(x) = f(x)$. Тогда для функции $F(x) = F_0(x) + C$ при постоянной C имеем $\forall x \in (a,b)$ $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$, т. е. функция $F(x) = F_0(x) + C$ при любой постоянной C есть точная первообразная функция $f(x)$ на (a,b).

2) Пусть $F_0(x)$ и $F(x)$ являются точными первообразными для функции $f(x)$ на (a,b), т. е. $\forall x \in (a,b)\ \exists \mathrm{D}F_0(x) = f(x)$, $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$, но тогда в силу следствия из теоремы 1 имеем $F_0(x) - F(x) \equiv \mathrm{const}$ на $[a,b]$.

Замечание. Если $F(x)$ есть точная первообразная для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то $(F \in \mathcal{D}((a,b))) \Rightarrow (F \in C((a,b)))$.

Замечание. Для того чтобы функция $F(x)$ была точной первообразной для функции $f(x)$ на (a,b), нужно, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла довольно жестким условиям: функция $f(x)$ должна обладать на интервале (a,b) свойством Дарбу (т. е. принимать все промежуточные значения), далее, если существуют односторонние пределы $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$, то необходимо выполняются равенства $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$, т. е. функция $f(x)$ не может иметь в (a,b) точек разрыва 1-го рода.

Пример. Рассмотрим функцию (рис. 36)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & -1 < x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ не может служить производной ни для какой функции, непрерывной на $(-1,1)$, т. е. функция $\operatorname{sgn} x$ не имеет на интервале $(-1,1)$ точной первообразной. В то же время, если $F(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$ (рис. 37), то $\forall x \in 0\ \exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$ и естественно было бы назвать функцию $F(x) = |x|$ первообразной для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$, хотя функция $F(x) = |x|$ не является точной первообразной для $\operatorname{sgn} x$.

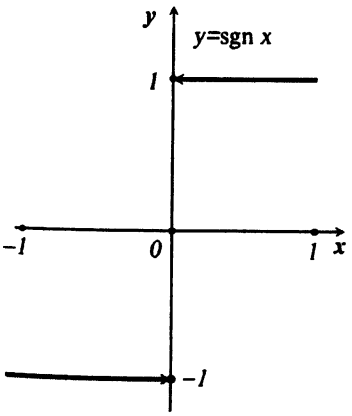


Рис. 36

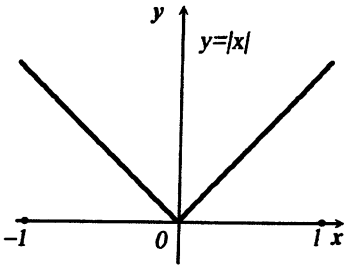


Рис. 37

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на $|a,b|$. Тогда функция $F(x)$, определенная на промежутке $|a,b|$, называет-*

ся первообразной (примитивной) для функции $f(x)$ на промежутке $|a,b|$, если $F \in C(|a,b|)$ и $\forall x \in (a,b) \setminus K_n$ (где K_n – множество, состоящее не более чем из конечного числа точек) $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$.

С точки зрения этого определения функция $F(x) = |x|$, $x \in (-1,1)$ является первообразной для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $(-1,1)$, причем $K_1 = \{0\}$.

Пример. Функция $F(x) = \operatorname{sgn} x$, $x \in [-1,1]$ не является первообразной для функции $f(x) \equiv 0$ на $[-1,1]$, хотя $\forall x \in (-1,1) \setminus \{0\}$ $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x) = 0$, поскольку $F \overline{\in} C([-1,1])$.

Теорема 3. *Пусть $F \in C(|a,b|)$ и существует конечное число точек $x_i \in (a,b)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ таких, что $\mathrm{D}F(x) = 0$ $\forall x \in (a,b)$, $x \neq x_i$. Тогда $F(x) \equiv \mathrm{const}$ на $|a,b|$.*

Доказательство. В силу условий теоремы 3 $\forall x \in (a,b) \setminus K_n$, где $K_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, имеем $m \leq \mathrm{D}F(x) \leq M$ для $m = M = 0$. Поскольку $F \in C(|a,b|)$, то в силу следствия 2 к теореме Лагранжа о конечных приращениях $\forall t_1, t_2 \in |a,b|$ $(t_1 < t_2)$ имеем оценки $(0 = m \leq (F(t_2) - F(t_1))/(t_2 - t_1) \leq M = 0) \Rightarrow ((F(t_2) - F(t_1) = 0)) \Rightarrow ((F(x) = \mathrm{const}$ на $|a,b|))$.

Следствие. Пусть $F_1, F_2 \in C(|a,b|)$ и существует конечное число точек $x_i \in (a,b)$ $(i = 1,2,\dots,n)$ таких, что $\mathrm{D}F_1(x) = \mathrm{D}F_2(x)$ $\forall x \in (a,b)$, $x \neq x_i$. Тогда $F_1(x) = F_2(x) + C$ $\forall x \in |a,b|$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную функцию $\Phi(x) = F_1(x) - F_2(x)$ и применим к ней теорему 3.

Теорема 4. *Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $|a,b|$. Если $f(x)$ имеет на $|a,b|$ первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ на $|a,b|$ совпадает с семейством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C – постоянная.*

Доказательство. 1) Если $F_0(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $|a,b|$, то по определению первообразной $F_0 \in C(|a,b|)$ и $\exists K_{n_0} \subset (a,b)$ такое, что $\forall x \in (a,b) \setminus K_{n_0}$ $\exists \mathrm{D}F_0(x) = f(x)$, поэтому если $F(x) = F_0(x) + C$, где C – постоянная, то $F \in C(|a,b|)$ и $\forall x \in (a,b) \setminus K_{n_0}$ $\exists \mathrm{D}F(x) = \mathrm{D}(F_0(x) + C) = \mathrm{D}F_0(x) = f(x)$, т. е. функция $F(x) = F_0(x) + C$ есть первообразная функция $f(x)$ на $|a,b|$ при любой постоянной C.

2) Пусть функции $F_0(x)$ и $F_1(x)$ являются первообразными для функции $f(x)$ на $|a,b|$, т. е. $F_i \in C(|a,b|)$ $(i = 0,1)$, и существуют конечные множества $K_{n_i} \subset (a,b)$ $(i = 0,1)$ такие, что $\forall x \in (a,b) \setminus K_{n_i}$ $\exists \mathrm{D}F_i(x) = f(x)$ $(i = 0,1)$, но тогда $\forall x \in (a,b) \setminus \bigcup_{i=0}^{1} K_{n_i}$ $\exists \mathrm{D}F_0(x) = \mathrm{D}F_1(x)$, и в силу следствия к теореме 3 имеем $F_1(x) = F_0(x) + C$ $\forall x \in |a,b|$.

Замечание 1. Из теоремы 4 следует, что если функция $f(x)$ имеет на $|a,b|$ одну примитивную $F_0(x)$, то $f(x)$ имеет на $|a,b|$ бесконечное множество примитивных.

Замечание 2. Теорема 4 устанавливает общий вид первообразной $F(x) = F_0(x) + C$ для функции $f(x)$ на $|a, b|$, если $F_0(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на $|a, b|$.

Замечание 3. Из общего вида первообразной $F(x) - F_0(x) + C$ следует, что первообразные для функции $f(x)$ на $|a, b|$ определяются «с точностью до аддитивной постоянной».

Пример. Примитивная функция $f(x) = x^n$ $(n > 0)$ на $(0, +\infty)$ равна $F_0(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$, и любая другая примитивная имеет вид $F(x) = \dfrac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

§ 5. Центр кривизны, радиус кривизны и кривизна графика функции

Если функция $f(x)$, определенная на (a, b), дифференцируема в точке $x_0 \in (a, b)$, то существует касательная к графику Γ функции $f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ и ее уравнение имеет вид $y = f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x - x_0)$, $-\infty < x < +\infty$.

Назовем в этом случае нормалью n_0 к графику Γ функции $f(x)$ в точке $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ прямую с уравнением $y = f(x_0) - \dfrac{x - x_0}{\mathrm{D}f(x_0)}$, $-\infty < x < +\infty$ (если $\mathrm{D}f(x_0) = 0$, то нормаль будет вертикальной прямой с уравнением $x = x_0$). Очевидно, нормаль (рис. 38) ортогональна касательной.

Замечание 1. Если $f(x) = Ax + B$, $x \in (a, b)$, – линейная функция, то ее график Γ есть отрезок прямой с уравнением $y = Ax + B$, $x \in (a, b)$, и в любой точке графика Γ существует касательная (к графику) с уравнением $y = Ax + B$, совпадающая с графиком Γ $\forall x \in (a, b)$, при этом существует также и нормаль. Все нормали к графику линейной функции параллельны между собой (т. е. «пересекаются» в одной бесконечно удаленной точке).

Замечание 2. Если $f(x) = \overline{y}_0 \pm (R^2 - (x - \overline{x}_0)^2)^{1/2}$, $x \in (\overline{x}_0 - R, \overline{x}_0 + R)$, то графиком Γ этой функции будет верхняя (при $+$) или нижняя (при $-$) половина окружности с центром в точке $(\overline{x}_0, \overline{y}_0)$ и с радиусом $R > 0$.

В любой точке $M_0 \in \Gamma$ существуют касательная и нормаль, причем все нормали к Γ пересекаются в одной точке – центре окружности (рис. 39) и на одном расстоянии (равном радиусу окружности R) от точки пересечения нормалей с графиком Γ, при этом величина

$$1/R = \lim_{M \to M_0} \frac{\Delta\alpha}{|M_0 M|} = \lim_{\Delta\alpha \to 0} \frac{\Delta\alpha}{2R \sin(\Delta\alpha/2)}$$

характеризует искривленность дуги окружности Γ и называется кри-

визной окружности Γ. Заметим, что точка пересечения нормалей к окружности C – центр кривизны – совпадает с центром окружности, лежит на нормали $n_0 \equiv M_0 n_0$ и находится с графиком Γ по одну сторону от касательной $M_0 t_0$ к графику Γ в точке M_0. При $R = +\infty$ окружность «переходит» в прямую, имеющую кривизну $1/R = 0$.

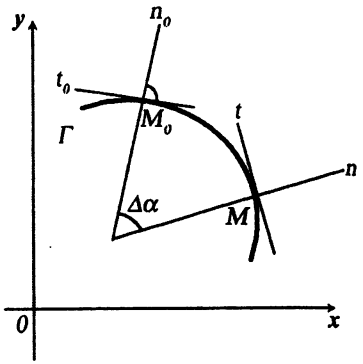


Рис. 38

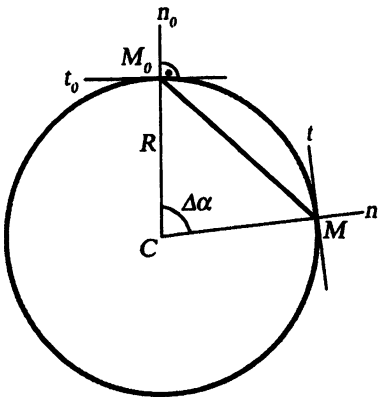


Рис. 39

З а м е ч а н и е 3. Если график Γ функции $f(x)$ отличен от дуги окружности, то нормали к Γ не будут, вообще говоря, пересекаться в одной точке, однако точка пересечения нормалей, проходящих через две «близкие» точки графика $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ и $M = (x_0 + \Delta x, f(x_0) + \Delta f(x_0)) \in \Gamma$, будут характеризовать искривленность графика Γ в окрестности точки $M_0 \in \Gamma$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | y = f(x), a < x < b\}$ – *график функции* $f \in \mathcal{D}((a, b))$. *Пусть* $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M = (x_0 + \Delta x, f(x_0) + \Delta f(x_0)) \in \Gamma$ *и* $C(\Delta x) = (X(\Delta x), Y(\Delta x))$ *есть точка пересечения нормалей* $M_0 n_0$ *и* Mn *к графику* Γ. *Центром кривизны графика* Γ *в точке* $M_0 \in \Gamma$ *называется предельное положение (если оно существует) точки* $C(\Delta x)$ *при* $\Delta x \to 0$. *Итак, центр кривизны* $C_0 = (X_0, Y_0)$ *графика* Γ *в точке* $M_0 \in \Gamma$ *определяется формулой* $C_0 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} C(\Delta x)$.

Т е о р е м а (формулы для вычисления координат центра кривизны). *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{(2)}((a, b))$, *причем* $\mathrm{D}^2 f(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$. *Тогда для любой точки* $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ *существует центр кривизны* $C_0 = (X_0, Y_0)$, *где*

$$X_0 = x_0 - \mathrm{D}f(x_0)(1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)/\mathrm{D}^2 f(x_0),$$

$$Y_0 = y_0 + (1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)/\mathrm{D}^2 f(x_0),$$

$y_0 = f(x_0)$, *причем центр кривизны* $C_0 = (X_0, Y_0)$ *и график* Γ *(в некоторой окрестности точки* $M_0 \in \Gamma$*) расположены по одну сторону*

от касательной к графику Γ *в точке* $M_0 \in \Gamma$.

Доказательство. Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$, $M = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y_0) \in \Gamma$, где $y_0 = f(x_0)$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Уравнения нормалей $M_0 n_0$ и Mn в точках $M_0, M \in \Gamma$ имеют вид $M_0 n_0$: $Y - y_0 = -(X - x_0)/\mathrm{D}f(x_0)$ и Mn: $Y - (y_0 + \Delta y) = -(X - (x_0 + \Delta x))/\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)$. Точка $C_0(X(\Delta x), Y(\Delta x))$ пересечения нормалей $M_0 n_0$ и Mn имеет координаты $X(\Delta x)$ и $Y(\Delta x)$, удовлетворяющие системе уравнений

$$Y(\Delta x) - y_0 = -(X(\Delta x) - x_0)/\mathrm{D}f(x_0),$$

$$Y(\Delta x) - (y_0 + \Delta y) = -(X(\Delta x) - (x_0 + \Delta x))/\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)$$

или

$$X(\Delta x) - x_0 = -\mathrm{D}f(x_0)(Y(\Delta x) - y_0),$$

$$X(\Delta x) - x_0 - \Delta x = -\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)(Y(\Delta x) - y_0 - \Delta y).$$

Вычитая, получаем $\Delta x = -\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)\Delta x + (\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x) - \mathrm{D}f(x_0))(Y(\Delta x) - y_0)$ или, деля на $\Delta x \neq 0$, имеем

$$1 = -\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x)\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x) - \mathrm{D}f(x_0)}{\Delta x}(Y(\Delta x) - y_0).$$

Но $(f \in \mathcal{D}((a,b))) \Rightarrow (\mathrm{D}f \in C((a,b)))$, и поэтому имеем

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{D}f(x_0 + \Delta x) - \mathrm{D}f(x_0)}{\Delta x} = \mathrm{D}^2 f(x_0);$$

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0, \exists \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y/\Delta x = \mathrm{D}f(x_0),$$

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{D}f(x_0 + \Delta x) = \mathrm{D}f(x_0),$$

откуда, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$ в нашем равенстве, имеем

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} Y(\Delta x) = Y_0, (1 = -(\mathrm{D}fx_0))^2 + \mathrm{D}^2 f(x_0)(Y - y_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Y_0 = y_0 + (1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)/\mathrm{D}^2 f(x_0)),$$

откуда, используя уравнение нормали $M_0 n_0$, видим, что

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} X(\Delta x) = X_0; (X - x_0 = -\mathrm{D}f(x_0)(Y - y_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (X_0 = x_0 - \mathrm{D}f(x_0)(1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)/\mathrm{D}^2 f(x_0)).$$

Утверждения о расположении центра кривизны и графика Γ относительно касательной $M_0 t_0$ к Γ в точке $M_0 \in \Gamma$ вытекают из рис. 40 – 45. Очевидно, при $\mathrm{D}^2 f(x - 0) \neq 0$ график Γ и центр кривизны C_0 в некоторой окрестности точки $M_0 \in \Gamma$ лежат по одну сторону от касательной к Γ в точке M_0.

О п р е д е л е н и е. *Если график Γ функции $f \in C^{(2)}((a,b))$ имеет центр кривизны C_0 для точки $M_0 \in \Gamma$, то окружность с центром в C_0, имеющая общую касательную M_0t_0 с графиком Γ в точке $M_0 \in \Gamma$, называется соприкасающейся окружностью (в точке $M_0 \in \Gamma$), а ее радиус $R_0 = (1 + (y'_0)^2)^{3/2}/|y''_0|$ (где $y_0 = f(x_0)$, $y'_0 = \mathrm{D}f(x_0)$, $y''_0 = \mathrm{D}^2 f(x_0)$) называется радиусом кривизны графика Γ в точке $M_0 \in \Gamma$. При этом величина $k_0 = y''_0/(1 + (y'_0)^2)^{3/2}$ называется кривизной графика Γ в точке $M_0 \in \Gamma$.*

З а м е ч а н и е. Если $\mathrm{D}^2 f(x_0) = 0$, то кривизна k_0 графика Γ в точке $M_0 \in \Gamma$ равна нулю.

П р и м е р. Если $M_0 \in \Gamma$ – точка перегиба графика Γ дважды дифференцируемой на (a,b) функции $f(x)$, то кривизна $k_0 = 0$.

О п р е д е л е н и е. *Если $f \in \mathrm{D}^{(2)}((a,b))$ и Γ – график функции $f(x)$, то геометрическое место центров кривизны графика Γ называется эволютой графика Γ. В параметрическом виде уравнения эволюты имеют вид*

$$X = x - \mathrm{D}f(x)(1 + (\mathrm{D}f(x))^2)/\mathrm{D}^2 f(x),$$

$$Y = f(x) + (1 + \mathrm{D}f(x))^2)/\mathrm{D}^2 f(x),\ x \in (a,b).$$

П р и м е р. Найдем кривизну и эволюту параболы: $y = x^2$, $x \in (-\infty, +\infty)$. Очевидно, $f(x) = x^2$, $\mathrm{D}f(x) = 2x$, $\mathrm{D}^2 f(x) = 2$, откуда $k(x) = 2(1 + 4x^2)^{-3/2}$, а уравнения эволюты в параметрическом виде

$$(X = x - 2x(1 + 4x^2)/2,\ Y = x^2 + (1 + 4x^2)/2,$$

$$x \in (-\infty, +\infty)) \Rightarrow \begin{cases} X = -4x^3, \\ Y = 3x^2 + 1/2,\ x \in (-\infty, +\infty). \end{cases}$$

Но тогда $(x = (-X/4)^{1/3},\ x = \pm((Y - 1/2)/3)^{1/2}) \Rightarrow (\pm((Y - 1/2)/3)^{1/2} = (X/4)^{1/3}) \Rightarrow (Y - 1/2 = 3 \cdot 2^{-4/3} X^{2/3}) \Rightarrow \left(Y = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} X^{2/3}\right)$. График эволюты параболы изображен на рис. 46.

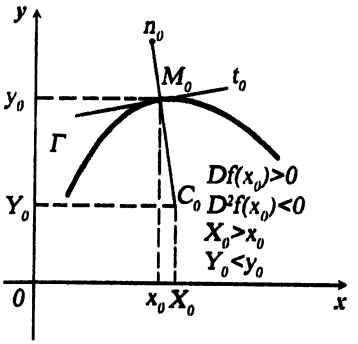


Рис. 40

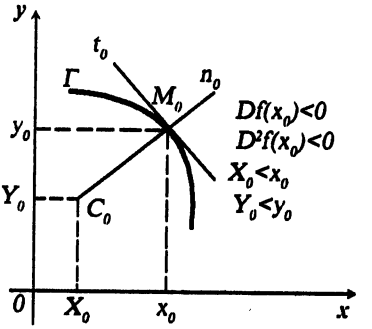


Рис. 41

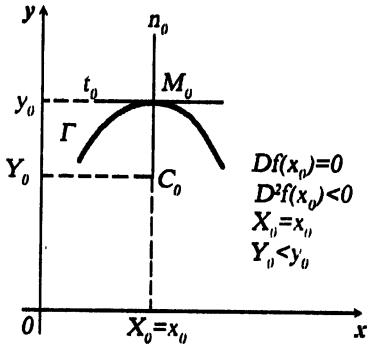


Рис. 42

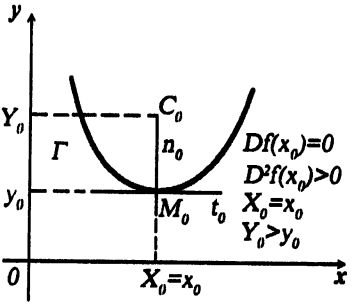


Рис. 43

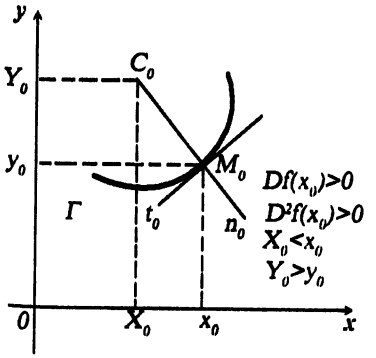


Рис. 44

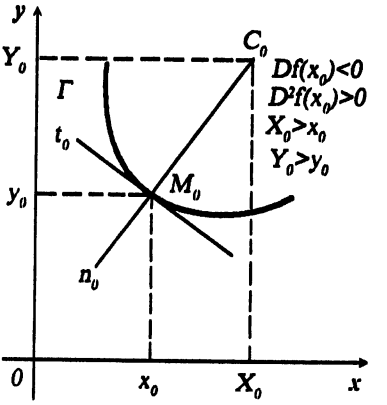


Рис. 45

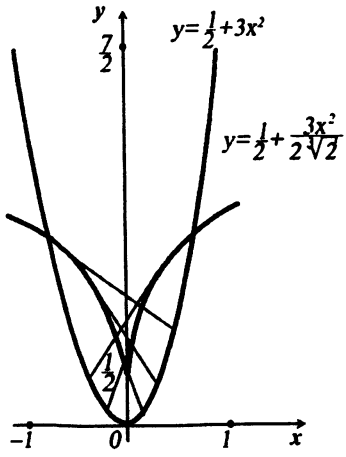


Рис. 46

Замечание. Пусть функция $f \in \mathcal{D}^{(2)}((a,b))$ и $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma$, $M = (x_0 + \Delta x, f(x_0) + \Delta f(x_0)) \in \Gamma$. Обозначим (см. рис. 38) через $\Delta\alpha$ угол между нормалями $M_0 n_0$ и Mn (равный, очевидно, углу между касательными $M_0 t_0$ и Mt). Заметим, что для хорды M_0M имеем $|M_0M| = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{1/2}$, где $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$. Очевидно, отношение $|\Delta\alpha|/|M_0M|$ характеризует искривление графика Γ вблизи точки $M_0 \in \Gamma$.

Покажем, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} |\Delta\alpha|/|M_0M| = |k_0|$, где k_0 – определенная выше кривизна графика Γ в точке $M_0 \in \Gamma$. В самом деле, имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} |\Delta\alpha|/|M_0M| = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\operatorname{arctg} \mathrm{D}f(x_0+\Delta x) - \operatorname{arctg} \mathrm{D}f(x_0)|}{|\Delta x| \cdot (1 + (\Delta y/\Delta x)^2)^{1/2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta(\operatorname{arctg} \mathrm{D}f(x_0))/\Delta x|}{(1 + (\Delta f(x_0)/\Delta x)^2)^{1/2}} =$$

$$= |\mathrm{D}(\operatorname{arctg} \mathrm{D}f(x_0))|/(1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)^{1/2} =$$

$$= |\mathrm{D}^2 f(x_0)|/(1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)^{3/2} = |k_0|$$

(где $k_0 = \mathrm{D}^2 f(x_0)/(1 + (\mathrm{D}f(x_0))^2)^{3/2}$ – кривизна графика Γ в точке $M_0 \in \Gamma$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Э. Основы анализа. М.: ИЛ, 1947.

2. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Основы математического анализа. М.: Наука, 1965.

3. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. М.-Л.: ОГИЗ, 1948.

Часть II

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Глава 1

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Неопределенный интеграл

Основной задачей интегрального исчисления является задача об отыскании функции $f(x)$ по заданной производной $\mathrm{D}f(x)$ (или отыскание функции $f(x)$ по заданному дифференциалу $df(x)$).

Очевидно, эта задача является обратной к задаче дифференциального исчисления.

Пример. Пусть $s = s(t)$ – закон движения материальной точки по прямой, т. е. $s(t)$ – длина пути, отсчитываемого от некоторой начальной точки M_0, где t – время, за которое пройден путь $s(t)$. Пусть M – положение точки в момент t, а M' – в момент $t+\Delta t$ и Δs – длина пути от точки M до M', так что $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$. Тогда $\Delta s/\Delta t$ есть то, что называется в механике величиной средней скорости движения на участке от M до M', а $v(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \Delta s/\Delta t$ есть величина мгновенной скорости движения точки M в момент t. Таким образом, для величины мгновенной скорости имеем $v = \dfrac{ds}{dt}$. По определению дифференциала $ds = v(t)dt$ видим, что значение дифференциала пути $ds(\Delta t) = v(t)dt$, соответствующее приращению времени Δt, равно расстоянию, которое прошла бы точка M за промежуток времени от момента t до момента $t+\Delta t$, если бы она двигалась равномерно со скоростью, равной мгновенной скорости $v(t)$ точки в момент t. Величина же Δs действительного перемещения точки (за промежуток времени Δt) будет $\Delta s = ds(\Delta t) + o(\Delta t)$ $(\Delta t \to 0)$. Таким образом, с механической точки зрения замена Δs на значение дифференциала $ds(\Delta t)$ означает, что движение на рассматриваемом участке считается равномерным. Наряду со скоростью $v(t) = \dfrac{ds(t)}{dt}$ можно ввести и ускорение $a(t) = \dfrac{dv(t)}{dt}$ как предел среднего ускорения $a_{\text{ср}} = \Delta v(t)/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$. Таким образом, ускорение точки M в момент t есть $a(t) = \dfrac{d^2 s(t)}{dt^2}$, если $s(t)$ – закон движения.

З а д а ч а. Найти путь, пройденный точкой за время t при свободном падении в пустоте, если ускорение силы тяжести есть g. Поскольку $v = \dfrac{ds}{dt}$, $g = \dfrac{dv}{dt}$, то нужно решить так называемое дифференциальное уравнение $\dfrac{d^2s}{dt^2} = g \Rightarrow \left(\dfrac{ds}{dt} = gt\right) \Rightarrow (s(t) = gt^2/2)$ при условиях $s(0) = v(0) = 0$.

Напомним определение точной первообразной и первообразной функции $f(x)$ на промежутке $|a, b|$ (см. ч. I, гл. 6, § 4).

О п р е д е л е н и е. *Пусть функции $f(x)$ и $F(x)$ определены на (a, b). Функция $F(x)$ называется точной первообразной (точной примитивной) функции $f(x)$ на (a, b), если $\forall x \in (a, b)$ $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$.*

З а м е ч а н и е. Если $F(x)$ есть точная первообразная для $f(x)$ на (a, b), то $F \in C((a, b))$ (поскольку $F(x)$ дифференцируема на (a, b)).

О п р е д е л е н и е. *Пусть $f(x)$ определена на промежутке $|a, b|$, тогда функция $F(x)$, определенная на $|a, b|$, называется первообразной (примитивной) для функции $f(x)$, если $F \in C(|a, b|)$ и $\forall x \in (a, b) \setminus K_n$ (где K_n – множество, состоящее не более чем из n точек) $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$.*

З а м е ч а н и е. Можно было бы еще обобщить понятие первообразной, считая исключительное множество K не более чем счетным.

П р и м е р. Напомним, что функция $F(x) = |x|$ не есть точная первообразная для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $(-1, 1)$, однако $F(x) = |x|$ является первообразной для функции $\operatorname{sgn} x$ на $(-1, 1)$, при этом исключительное множество $K_1 = \{0\}$.

В дифференциальном исчислении было доказано, что если $f(x)$ дифференцируема, то существует $\mathrm{D}f(x)$ и при этом (конечная) производная $\mathrm{D}f(x)$ единственна. В отличие от производной первообразная не обладает свойством единственности. В самом деле, ранее (см. ч. I, гл. 6, § 4) была доказана

Т е о р е м а. *Пусть функция $f(x)$ определена на $|a, b|$. Если $f(x)$ имеет на $|a, b|$ первообразную $F_0(x)$, то множество всех первообразных функции $f(x)$ на $|a, b|$ совпадает с множеством функций $F(x) = F_0(x) + C$, где C – любая постоянная.*

З а м е ч а н и е. Из этой теоремы следует: 1) если функция $f(x)$ имеет на $|a, b|$ одну первообразную $F_0(x)$, то $f(x)$ имеет на $|a, b|$ бесчисленное множество первообразных;

2) формула $F(x) = F_0(x) + C$ устанавливает общий вид первообразной для $f(x)$ на $|a, b|$, если $F_0(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$ на $|a, b|$;

3) из общего вида первообразной следует, что первообразная для $f(x)$ на $|a, b|$ определена с точностью до аддитивной постоянной.

З а м е ч а н и е. Если $f(x)$ имеет на $|a, b|$ примитивную $F_0(x)$ и $x_0 \in (a, b)$, то для любой фиксированной постоянной C_0 существует, и

притом единственная, примитивная $F(x)$, удовлетворяющая условию $F(x_0) = C_0$.

В самом деле, $F(x) = F_0(x) + C$, где C – любая постоянная, тогда условие $F(x_0) = C_0$ дает равенство $(C_0 = F_0(x_0) + C) \Rightarrow (C = C_0 - F_0(x_0))$, откуда искомая примитивная дается формулой $F(x) = F_0(x) + (C_0 - F_0(x_0))$. В частности, существует, и притом только одна, примитивная $G(x)$ функции $f(x)$ на $|a, b|$ такая, что $G(x_0) = 0$. Для любой другой примитивной $F(x)$ имеем $G(x) = F(x) - F(x_0)$, $G(x_0) = 0$.

Пример. $\dfrac{d^2s}{dt^2} = g$, $v(t) = \dfrac{ds}{dt}$, $\left(\dfrac{dv}{dt} = g\right) \Rightarrow (v(t) = gt + C_1) \Rightarrow$ $(s(t) = gt^2/2 + C_1t + C_2)$. Для выделения единственного закона движения нужно задать начальные условия: начальное положение точки $s(0) = s_0$ и начальную скорость $v(0) = v_0$, которые и дадут возможность определить постоянные C_1 и C_2: $(v(t) = gt + C_1) \Rightarrow (C_1 = v_0)$; $(s(t) = gt^2/2 + v_0t + C_2) \Rightarrow (C_2 = s_0)$. Таким образом, для искомого закона движения имеем $s(t) = gt^2/2 + v_0t + s_0$.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на $|a, b|$. Неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на $|a, b|$ называется любая первообразная $F(x)$ (если она существует) функции $f(x)$ на $|a, b|$. Неопределенный интеграл от $f(x)$ (если он существует) на $|a, b|$ обозначается символом $\int f(x)dx$; $f(x)$ называется при этом подынтегральной функцией.*

Замечание. Таким образом, если $F_0(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $|a, b|$, то имеет место формула $\int f(x)dx = F_0(x) + C$, где C – постоянная, надлежащий выбор которой дает возможность получить любую из первообразных $F(x)$ функции $f(x)$ на промежутке $|a, b|$.

Замечание. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные функции $f(x)$ на $|a, b|$, тогда $\int f(x)dx = F_1(x) + C_1 = F_2(x) + C_2$. Эти равенства эквивалентны, причем $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Замечание. В дальнейшем будут использоваться равенства вида

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int h(x)dx, \tag{1.1}$$

означающие, что функции, стоящие слева и справа в (1.1), отличаются постоянной, так что (1.1) эквивалентно равенству

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int h(x)dx + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C. \tag{1.2}$$

Функция $F(x) = \ln|x| \in C(|a,b|)$ есть примитивная для функции $f(x) = 1/x$ на любом промежутке $|a,b|$, не содержащем 0, поскольку функция $\ln|x|$ разрывна в нуле, поэтому: а) при $x > 0$ $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ и б) при $x < 0$ $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(-x) + C$.

Формально (1.2) есть объединение формул а) и б).

§ 2. Основные свойства неопределенного интеграла

В дальнейшем будет доказана

Т е о р е м а (о существовании точной примитивной для непрерывной функции). *Пусть* $f \in C((a,b))$. *Тогда на* (a,b) *существует точная примитивная* $F(x)$ *для функции* $f(x)$, *т. е.* $\forall x \in (a,b)$ $\exists\, \mathrm{D}\, F(x) = f(x)$. *Таким образом, для функции* $f \in C((a,b))$ *на* (a,b) $\exists \int f(x)dx$.

Т е о р е м а (о связи дифференцирования и интегрирования). *Пусть функция* $f(x)$ *имеет на* $|a,b|$ *первообразную* $F(x)$ *с исключительным множеством* $K_n \subset (a,b)$, *так что* $\exists \int f(x)dx = F(x) + C$. *Тогда* $\forall x \in (a,b) \setminus K_n$ *имеем* $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$, $\mathrm{D}\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$, $\int dF(x) = F(x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\int f(x)dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – примитивная для $f(x)$ на $|a,b|$ (с исключительным множеством $K_n \subset (a,b)$, то $\forall x \in (a,b) \setminus K_n$ $\mathrm{D}\left(\int f(x)dx\right) = \mathrm{D}(F(x) + C) = \mathrm{D}F(x) = f(x)$, откуда $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = f(x)dx$, кроме того, $\left(\int \mathrm{D}F(x)dx = F(x) + C\right) \Rightarrow \left(\int dF(x) = F(x) + C\right)$.

Т е о р е м а (о линейности операции интегрирования). *Пусть на* $|a,b|$ *существуют неопределенные интегралы* $\int f(x)dx$ *и* $\int g(x)dx$. *Тогда для любых постоянных* α *и* β *на* $|a,b|$ *существует неопределенный интеграл* $\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx$, *причем*

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу линейности операции дифференцирования и теоремы о связи дифференцирования и интегрирования имеем $\mathrm{D}\left(\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx\right) = \mathrm{D}\left(\alpha \int f(x)dx\right) + \mathrm{D}\left(\beta \int g(x)dx\right) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ для любого $x \in (a,b) \setminus (K_{n_1} \cup K_{n_2})$, т. е. функция $\alpha f(x) + \beta g(x)$ имеет на $|a,b|$ примитивную $\alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx \in C(|a,b|)$, откуда

$$\int(\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx. \qquad (2.1)$$

Замечание. Равенство (2.1) означает, что линейная комбинация (с коэффициентами α и β) каких-либо первообразных функций $f(x)$ и $g(x)$ является первообразной для функции $\alpha f(x)+\beta g(x)$ и что всякая первообразная функция $\alpha f(x)+\beta g(x)$ является линейной комбинацией (с коэффициентами α и β) некоторых первообразных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Следствие. Пусть на $|a,b|$ $\exists \int f_i(x)dx$ $(i=1,2,\dots,n)$. Тогда для любых постоянных c_i $(i=1,2,\dots,n)$ $\exists \int \left(\sum\limits_{i=1}^{n} c_i f_i(x)\right)dx = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \int f_i(x)dx$.

Теорема (об интегрировании по частям). *Пусть на $|a,b|$ существуют функции $u'(x)$, $v'(x)$ и $\int u(x)v'(x)dx$ (с исключительным множеством $K_n \subset (a,b)$). Тогда существует $\int v(x)u'(x)dx$ с исключительным множеством K_n, причем*

$$\int v(x)u'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u(x)v'(x)dx.$$

Доказательство. $\forall x \in (a,b)\setminus K_n$ имеем

$$\mathrm{D}\left(u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx\right) = \mathrm{D}(u(x)v(x)) - \mathrm{D}\Big(\int u(x)v'(x)\times$$

$$\times dx\Big) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) - u(x)v'(x) = u'(x)v(x),$$

т. е.

$$\exists \int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx \in C(|a,b|).$$

Следствие. Пусть u', $v' \in C((a,b))$. Тогда в силу теоремы (о существовании точной примитивной у непрерывной функции) функции $u(x)v'(x)$ и $v(x)u'(x)$ имеют точные примитивные на (a,b) и формулу интегрирования по частям, справедливую $\forall x \in (a,b)$, можно записать в виде

$$\int udv = u\cdot v - \int vdu.$$

Теорема 1 (о замене переменной в неопределенном интеграле). *Пусть функция $F(t)$ определена $\forall t \in [\alpha,\beta]$ и является точной примитивной для функции $f(t)$ на (α,β), т. е. $\exists \int f(t)dt = F(t)+C$. Пусть $\forall x \in [a,b]$ определена функция $t=\omega(x)$, где $\omega \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ и $\omega([a,b]) \subset [\alpha,\beta]$, так что $\forall x \in (a,b)$ $\exists \omega'(x)$. Тогда на $[a,b]$ $\exists \int f(\omega(x))\omega'(x)dx = \int f(\omega(x))d\omega(x) = F(\omega(x)) + C$ $\left(= \int f(t)dt\right)$.*

Доказательство. Для сложной функции $F[\omega(x)] = (F \circ \omega)(x)$, определенной на $[a, b]$, $\forall x \in (a, b)$, выполнены условия теоремы о существовании производной сложной функции, в силу которой

$$\forall x \in (a, b)\ \exists \frac{d}{dx} F(\omega(x)) = \frac{dF(t)}{dt} \omega'(x) = f(\omega(x)),\ \omega'(x),$$

но это и означает существование точной примитивной

$$\int f(\omega(x))\omega'(x)dx = F(\omega(x)) + C.$$

Замечание. В теореме 1 из существования неопределенного интеграла $\int f(t)dt = F(t) + C$ следует существование неопределенного интеграла $\int f(\omega(x))\omega'(x)dx$. Если $f \in C([\alpha, \beta])$, то существование функции $F(t)$ следует из теоремы о существовании точной примитивной у непрерывной функции.

Теорема 2 (о замене переменной в неопределенном интеграле). *Пусть функция $t = \omega(x)$ определена на $[a, b]$, причем $\omega \in C([a, b]) \wedge \mathcal{D}((a, b))$ и $\forall x \in (a, b)$ $\omega'(x) > 0$ (либо $\omega'(x) < 0$) и $\omega(a) = \alpha$, $\omega(b) = \beta$ (либо $\omega(a) = \beta$, $\omega(b) = \alpha$). Пусть функция $f(t)$ определена на $[\alpha, \beta]$, причем существует точная примитивная $\Phi(x) = \int f(\omega(x))\omega'(x)dx$. Тогда на (α, β) существует точная примитивная $F(t) = \int f(t)dt$, причем $\int f(t)dt = \Phi(\Omega(t)) + C$, где $x = \Omega(t)$ - функция, обратная к функции $t = \omega(x)$.*

Доказательство. Из условий теоремы 2 относительно функции $\omega(x)$ следует, что для нее существует обратная функция $x = \Omega(t)$, причем по теореме о производной обратной функции имеем $\Omega'(t) = 1/\omega'(x)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}\Phi(\Omega(t)) = \frac{d\Phi(x)}{dx},\ \frac{d\Omega(t)}{dt} = \Phi'(x)/\omega'(x) =$$

$$= f(\omega(x))\omega'(x)/\omega'(x) = f(\omega(x)) = f(t),$$

$\forall t \in (\alpha, \beta)$, т. е. функция $\Phi(\Omega(t))$ есть точная примитивная для функции $f(t)$ на (α, β), но тогда $\int f(t)dt = \Phi(\Omega(t)) + C$.

Замечание. В теореме 2 из существования неопределенного интеграла $\int f(\omega(x))\omega'(x)dx$ вытекает существование неопределенного интеграла $\int f(t)dt$.

§ 3. Таблица основных неопределенных интегралов

Ранее (см. ч. I, гл. 4, § 5) была введена таблица производных простейших элементарных функций, представляющая собой вычислительный аппарат дифференциального исчисления. Каждая формула этой

таблицы, устанавливающая, что та или иная функция $F(x)$ имеет производную, равную $f(x)$, приводит в силу определения неопределенного интеграла к соответствующей формуле интегрального исчисления $\int f(x)dx = F(x) + C$. Таким образом, приходим к следующей таблице основных точных примитивных (неопределенных интегралов):

1. $\int 0 \cdot dx = C$;
2. $\int 1 \cdot dx = x + C$;
3. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$;
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C \ (x \neq 0)$;
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C \ (0 < a \neq 1)$, $\int e^x dx = e^x + C$;
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$;
8. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C \ (x \neq \pi/2 + n\pi, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;
9. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \ (x \neq n\pi, \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$;
10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases} (-1 < x < 1)$;
11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C, \\ -\operatorname{arcctg} x + C; \end{cases}$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm 1}| + C$ (в случае знака «$\to$» $|x| > 1$);
13. $\int \dfrac{dx}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2} \ln \left| \dfrac{x-1}{x+1} \right| + C \ (|x| \neq 1)$;
14. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;
15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
16. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;
17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \ (x \neq 0)$.

З а м е ч а н и е. В дифференциальном исчислении было показано, что операция дифференцирования не выводит из класса элементарных функций.

З а м е ч а н и е. Интеграл от элементарной функции не обязательно является также элементарной функцией.

П р и м е р. Можно доказать, что интегралы $\int \exp(-x^2)dx$, $\int \cos(x^2)dx$, $\int \sin(x^2)dx$, $\int \dfrac{dx}{\ln x} \ (0 < x \neq 1)$, $\int \dfrac{\cos x}{x} dx \ (x \neq 0)$, $\int \dfrac{\sin x}{x} dx$ $(x \neq 0)$ не являются элементарными функциями.

Т е о р е м а. *Если $R(x)$ - рациональная функция, то интеграл $\int R(x)dx$ выражается через элементарные функции, причем кроме рациональных функций ничего худшего, чем логарифм или арктангенс, не появляется.*

Глава 2

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ РИМАНА

§ 1. Определение интеграла Римана

Пусть числовая функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Определим разбиение T отрезка $[a,b]$ заданием конечной системы точек $\{x_i\}$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. Диаметром $d(T)$ разбиения T отрезка $[a,b]$ назовем число $d(T) = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}(x_i - x_{i-1}) > 0$. Очевидно, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $0 < d(T) \leq b-a$. При заданном разбиении T отрезка $[a,b]$ рассмотрим любую систему точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ и введем обозначение $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ $(a = x_0 \leq \xi_1 \leq x_1 < \ldots < x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i < \ldots < x_{n-1} \leq \xi_n \leq x_n = b)$. Разбиение T отрезка $[a,b]$ вместе с выбранной системой точек $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ назовем размеченным разбиением отрезка $[a,b]$ и будем обозначать символом $T\xi = p$. Множество всех размеченных разбиений $\{T\xi\} = \{p\}$ отрезка $[a,b]$ будем обозначать через $\mathcal{P}$. Таким образом, $\mathcal{P} = \{p = T\xi | 0 < d(T) \leq b-a\}$.

Введем во множестве $\mathcal{P}$ систему множеств $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$, где $B_\delta = \{p = T\xi \in \mathcal{P} | 0 < d(T) < \delta\}$, $\delta \in (0, b-a]$. Для системы $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$ выполнены условия: 1) $\forall \delta \in (0, b-a]$ $B_\delta \subset \mathcal{P} \Rightarrow B_\delta \neq \varnothing$; 2) $\forall \delta_1, \delta_2 \in (0, b-a]$ $B_\delta \subset B_{\delta_1} \cap B_{\delta_2}$ $\forall \delta \in (0, \min(\delta_1, \delta_2))$.

Тем самым показано, что система $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$ есть базис фильтра в $\mathcal{P}$. Будем обозначать этот базис фильтра (или базу) символом $d(T) \to 0$.

По заданной функции $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ и размеченному разбиению $T\xi$ с диаметром $d(T) > 0$ построим так называемую «интегральную сумму Римана»: $S_f(T\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ (индекс f в дальнейшем будет часто опускаться). При фиксированной функции $f(x)$ на множестве $\mathcal{P}$ (всех размеченных разбиений отрезка $[a,b]$) определим отображение $F : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$, положив $F(p) = S_f(T\xi)$, где $p = T\xi \in \mathcal{P}$. Используя базу $\mathbf{B} = \{B_\delta\}$, т. е. $d(T) \to 0$, введем

О п р е д е л е н и е. *Интегралом Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ называется такое число J (если оно существует), что* $\lim\limits_{d(T)\to 0} F(p) = J$ *(или* $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = J$*).*

З а м е ч а н и е. Напомним, что запись $J = \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi)$ означает $\forall \varepsilon > 0$ $\exists B_\delta \in \mathcal{P}$ такое, что для любого размеченного разбиения $T\xi \in B_\delta$ (так, что разбиение T имеет диаметр $d(T) < \delta$) $\Rightarrow |S_f(T\xi) - J| < \varepsilon$.

Обозначается интеграл Римана следующим образом: $J = \int\limits_a^b f(x)dx$,

при этом a называется нижним пределом, b – верхним пределом, а $f(x)$ – подынтегральной функцией. Интеграл Римана $J = \int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(a, b; f)$ зависит от a, b и f, но не зависит от x, являющейся «немой» переменной (переменной интегрирования), в то время как неопределенный интеграл $\int f(x)dx = F(x) + C$ зависит от x.

О п р е д е л е н и е. *Если для функции* $f : [a, b] \to \mathbf{R}$ *существует интеграл Римана на отрезке* $[a, b]$, *то говорят, что функция* $f(x)$ *интегрируема по Риману на отрезке* $[a, b]$. *Обозначение:* $f \in R[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Класс функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $R[a, b]$.

Расшифровывая понятие предела по базе $d(T) \to 0$ из определения интеграла Римана, имеем

(ε, δ) – о п р е д е л е н и е интеграла Римана. *Число* $J \in \mathbf{R}$ *называется интегралом Римана функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, *если* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что* $\forall$ *разбиения* T *(отрезка* $[a, b]$*) с диаметром* $d(T) < \delta$ *и* $\forall \xi$ *выполняется неравенство* $|S_f(T\xi) - J| < \varepsilon$.

З а м е ч а н и е. Геометрически интегральная сумма Римана (при $f \in C([a, b])$, $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$) $S_f(T\xi) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$ имеет (рис. 47) простой смысл: это сумма площадей прямоугольников, аппроксимирующих криволинейную трапецию. Поэтому интеграл Римана $R\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi)$ можно рассматривать как «площадь» этой криволинейной трапеции.

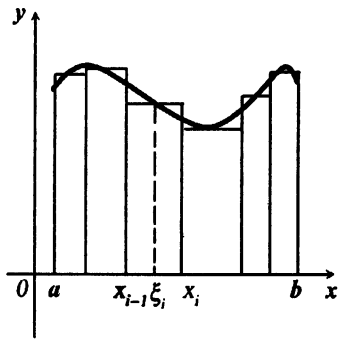


Рис. 47

Т е о р е м а (единственности интеграла Римана). *Для функции* $f(x)$, *определенной на отрезке* $[a, b]$, *может существовать не более одного числа* J *из определения интеграла Римана.* Теорема единственности интеграла Римана $J = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi)$ есть следствие общей теоремы единственности предела по базе.

П р и м е р. Пусть $f : x \to c$, $x \in [\alpha, \beta]$, тогда для любого размеченного разбиения $T\xi$ отрезка $[a, b]$ имеем

$$S(T\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a),$$

т. е. число $J = c(b - a)$ удовлетворяет определению интеграла Римана

для (постоянной) функции $f : x \to c$. Поэтому $c \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b c\,dx = c(b-a)$.

Пример. Пусть $f : x \to x$, $x \in [a,b]$, рассмотрим размеченное разбиение $T\xi$ отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(T) = t > 0$.

Пусть $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, тогда $0 < \Delta x_i \le t$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Далее

$$S(T\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\Delta x_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i - \frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - x_{i-1}^2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\xi_i - \frac{x_1 + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x_i = (b^2 - a^2)/2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - (x_i + x_{i-1})/2)\Delta x_i.$$

Но имеют место неравенства $-\Delta x_i/2 = x_{i-1} - (x_i + x_{i-1})/2 \le \xi_i - (x_i + x_{i-1})/2 \le x_i - (x_i + x_{i-1})/2 = \Delta x_i/2$, откуда

$$|S(T\xi) - (b^2 - a^2)/2| \le \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 \le \frac{t}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = t(b-a)/2.$$

Но тогда, полагая $\forall \varepsilon > 0$, $\delta = \dfrac{2\varepsilon}{b-a}$ и $J = (b^2 - a^2)/2$, имеем при $0 < t = d(T) < \delta$ $|S(T\xi) - J| < \varepsilon$, т. е.

$$\int\limits_a^b x\,dx = (b^2 - a^2)/2 \Rightarrow x \in R[a,b].$$

Теорема (необходимое условие интегрируемости по Риману). *Если $f \in R[a,b]$, то функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Пусть $f \in R[a,b]$. Но тогда

$$\exists J = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(T)\to 0} S_f(T\xi),$$

и поэтому при $\varepsilon_0 = 1$ $\exists \delta_0 > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения $T\xi$ с $d(T) < \delta_0$ имеем $|S(T\xi) - J| < 1$. Зафиксируем разбиение $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ с диаметром $d(T) < \delta_0$, тогда $\forall \xi$ имеем $|S(T\xi)| < |J| + 1$.

Допустим, что функция $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, тогда существует отрезок $[x_{k-1},x_k]$ с концами $x_{k-1},x_k \in T$ такой, что на нем функция $f(x)$ также не ограничена. Выберем $\xi = \{x_1,\dots,x_{k-1},\xi_k,x_{k+1},\dots,x_n\}$ и положим $S(T\xi) \equiv S^*(T\xi)+f(\xi_k)\Delta x_k$. В силу неограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1},x_k]$ $\exists \xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ такое, что $|f(\xi_k)|\Delta x_k \geq 1+|J|+|S^*(T\xi)|$, т. е. существует размеренное разбиение $T\xi$ с диаметром $d(T)<\delta_0$ такое, что $|S(T\xi)| \geq |f(\xi_k)\Delta x_k| - |S^*(T\xi)| \geq |J|+1$. Противоречие.

З а м е ч а н и е. Из ограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, вообще говоря, не следует, что $f \in R[a,b]$.

Рассмотрим, например, функцию Дирихле на отрезке $[0,1]$:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ — рационально,} \\ 1, & x \text{ — иррационально.} \end{cases}$$

Тогда в силу плотности множеств рациональных и иррациональных чисел в $\mathbf{R}$ ($\overline{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}, \overline{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}} = \mathbf{R}$) при любом разбиении T отрезка $[0,1]$ на любом частичном отрезке $[x_{k-1},x_k]$ существует как рациональная q_k, так и иррациональная r_k, откуда для любого разбиения T отрезка $[0,1]$, полагая $q=\{q_1,q_2,\dots,q_n\}$ и $r=\{r_1,r_2,\dots,r_n\}$, имеем $S_f(Tq)=0$, $S_f(Tr)=1$, т. е. $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi)$ не существует. (В самом деле, если бы $\exists \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = J$, то в силу критерия Коши существования предела числовой функции по базе $d(T)\to 0$ $\forall \varepsilon>0$ $\exists B_\delta \in \mathcal{P}$ такое, что $\forall T\xi, T\eta \in B_\delta$ $|S_f(T\xi)-S_f(T\eta)|<\varepsilon$, но при $0<\varepsilon<1$ имеем $|S_f(Tq)-S_f(Tr)|=1$. Противоречие. Итак, $f \overline{\in} R[0,1]$).

§ 2. Суммы Дарбу и критерий Дарбу интегрируемости по Риману

Если $f \in R[a,b]$, то $\exists \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = J \in \mathbf{R}$.

Пусть T – некоторое разбиение отрезка $[a,b]$, тогда возможный разброс интегральных сумм Римана $S_f(T\xi)$ при различном выборе ξ и ξ' определяется величиной $\sup\limits_{\xi,\xi'} |S_f(T\xi)-S_f(T\xi')|$. Ранее (см. ч. I, гл. 3, § 9) была доказана

Л е м м а. *Пусть* $E \subset \mathbf{R}$ *и* $\omega = \sup\limits_x E - \inf\limits_x E$. *Тогда* $\omega = \sup\limits_{x_1,x_2\in E} |x_1-x_2|$.

Таким образом, $\sup\limits_{\xi,\xi'} |S_f(T\xi)-S_f(T\xi')| = \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T)$, *где*

$$\overline{S}_f(T) = \sup_{\xi} S_f(T\xi),\ \underline{S}_f(T) = \inf_{\xi} S_f(T\xi).$$

Величина $\overline{S}_f(T)$ называется верхней суммой Дарбу функции $f(x)$ для разбиения T отрезка $[a,b]$, а $\underline{S}_f(T)$ называется нижней суммой Дарбу.

Т е о р е м а (формулы Дарбу). *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на $[a,b]$. Пусть T – разбиение отрезка $[a,b]$ и $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$. Тогда имеют место формулы Дарбу*

$$\overline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k, \quad \underline{S}_f(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для заданного разбиения T отрезка $[a,b]$ и $\forall \xi_k \in [x_{k-1},x_k]$ имеем $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$, откуда для любого ξ получаем оценку

$$S(T\xi) \le \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k. \tag{2.1}$$

Поскольку $M_k = \sup\limits_{[x_{k-1},x_k]} f(x)$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \overline{\xi}_k \in [x_{k-1},x_k]$ такое, что $f(\overline{\xi}_k) \ge M_k - \varepsilon/(b-a)$, т. е. для выбранного таким образом размеченного разбиения $T\overline{\xi}$ имеем оценку

$$S(T\overline{\xi}) \ge \sum_{k=1}^{n} \left(M_k - \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k - \varepsilon \tag{2.2}$$

(где использовано равенство $\sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = b-a$). Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sup_{\xi} S(T\xi) = \overline{S}(T).$$

Аналогично доказывается равенство

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k = \inf_{\xi} S(T\xi) = \underline{S}(T).$$

З а м е ч а н и е. Если $f \in C([a,b])$, то верхняя и нижняя суммы Дарбу являются интегральными суммами Римана, так как для непрерывной на отрезке функции по теореме Вейерштрасса существуют точки $\overline{\xi}_k, \underline{\xi}_k \in [x_{k-1},x_k]$ такие, что $M_k = f(\overline{\xi}_k)$, $m_k = f(\underline{\xi}_k)$, и поэтому $\overline{S}(T) = S(T\overline{\xi})$, $\underline{S}(T) = S(T\underline{\xi}_k)$. В случае, когда $f(x)$ только ограничена на $[a,b]$, таких точек $\overline{\xi}_k$ и $\underline{\xi}_k$ может не существовать, поэтому суммы Дарбу $\overline{S}(T)$ и $\underline{S}(T)$, вообще говоря, не являются интегральными суммами Римана для $f(x)$.

Замечание. Для данного разбиения T отрезка $[a,b]$ положим $\omega_k = M_k - m_k$, тогда $\omega_k = \omega(f;[x_{k-1},x_k])$ есть колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{k-1},x_k]$. Положим $\Omega_f(T) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k$. Тогда для любого разбиения T имеем

$$\sup_{\xi,\xi'} |S_f(T\xi) - S_f(T\xi')| = \overline{S}_f(T) - \underline{S}_f(T) = \Omega_f(T).$$

Определение. *Пусть T и T' – два разбиения отрезка $[a,b]$. Разбиение T' называется продолжением разбиения T, если любые точки деления, входящие в T, входят и в T', т. е. разбиение T' получается из разбиения T добавлением дополнительных точек деления отрезка $[a,b]$. Если T' – продолжение T, то пишут $T' \prec T$*

$$(T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\},\ T' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}, m \geq n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a = x_0 = x'_0 < x'_1 < x_1 = x'_2 < \ldots < x_k =$$

$$= x'_l < x'_{l+1} < \ldots < x_n = x'_m = b).$$

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и T, T' – два разбиения $[a,b]$, причем $T' \prec T$. Тогда $\overline{S}(T') \leq \overline{S}(T)$, $S(T') \geq S(T)$. Более того, если $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ и разбиение T' содержит не более p дополнительных точек деления по сравнению с разбиением T, имеющим диаметр $d(T)$, то*

$$\overline{S}(T) - 2pMd(T) \leq \overline{S}(T') \leq \overline{S}(T),$$

$$\underline{S}(T) + 2pMd(T) \geq \underline{S}(T') \geq \underline{S}(T).$$

Доказательство. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ и $T' = \{x'_0, x'_1, \ldots, x'_m\}$, $T' \prec T$ и $m - n = p \geq 1$. Без ограничения общности будем считать $p = 1$. Пусть дополнительная точка деления x'_l разбиения T' попала на отрезок $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения T так, что $x_{k-1} = x'_{l-1} < x'_l < x'_{l+1} = x_k$. Тогда $\Delta x_k = \Delta x'_l + \Delta x'_{l+1}$, где $\Delta x'_l$ – длина $[x_{k-1}, x'_l]$, а $\Delta x'_{l+1}$ – длина $[x'_l, x_k]$. В силу свойств точных верхней и нижней граней имеем

$$M_k = \sup_{[x_{k-1},x_k]} f(x) \geq \left\{ \begin{array}{l} M'_l = \sup\limits_{[x_{k-1},x'_l]} f(x), \\ M'_{l+1} = \sup\limits_{[x'_l,x_k]} f(x), \end{array} \right. \quad m_k \leq \left\{ \begin{array}{l} m'_l, \\ m'_{l+1}. \end{array} \right.$$

Поэтому, учитывая неравенство $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a,b]$ и $0 < \Delta x_k \leq d(T)$ для $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем оценки

$$0 \leq \overline{S}(T) - \overline{S}(T') = M_k \Delta x_k - (M'_l \Delta x'_l + M'_{l+1} \Delta x'_{l+1}) =$$

$$= (M_k - M'_l)\Delta x'_l + (M_k - M'_{l+1})\Delta x'_{l+1} \le 2M(\Delta x'_l + \Delta x'_{l+1}) =$$

$$= 2M\Delta x_k \le 2Md(T),$$

откуда $\overline{S}(T) - 2pMd(T) \le \overline{S}(T') \le \overline{S}(T)$.

Аналогично доказывается $\underline{S}(T) + 2pMd(T) \ge \underline{S}(T') \ge \underline{S}(T)$.

Следствие. Если $T' \prec T$, то $\Omega(T') \le \Omega(T)$ и, более точно, $\Omega(T) - 4pd(T) \le \Omega(T') \le \Omega(T)$.

Теорема 2. *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и T_1, T_2 – любые два разбиения $[a,b]$. Тогда $\underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T_2)$.*

Доказательство. Наряду с разбиениями T_1 и T_2 введем новое составное разбиение $T' = \{T_1, T_2\}$, определяемое точками деления как разбиения T_1, так и разбиения T_2. Тогда $T' \prec T_1$ и $T' \prec T_2$ и в силу теоремы 1 имеем оценки: $\overline{S}(T') \le \overline{S}(T_2)$, $\underline{S}(T') \ge \underline{S}(T_1)$, откуда $(\underline{S}(T_1) \le \underline{S}(T') \le \overline{S}(T') \le \overline{S}(T_2)) \Rightarrow (\underline{S}(T_1) \le \overline{S}(T_2))$.

Следствие 1. $\sup\limits_T \underline{S}(T) \le \inf\limits_T \overline{S}(T)$ или, если ввести понятия $\overline{J} = U\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \inf\limits_T \overline{S}(T)$ – верхний интеграл Дарбу и $\underline{J} = L\int\limits_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_T \underline{S}(T)$ – нижний интеграл Дарбу, то для функции $f(x)$, ограниченной на отрезке $[a,b]$, имеем оценку $J = L\int\limits_a^b f(x)dx \le U\int\limits_a^b f(x)dx = \overline{J}$.

Следствие 2. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $\underline{S}(T) \le \underline{J} \le \overline{J} \le \overline{S}(T)$ и $0 \le \overline{J} - \underline{J} \le \Omega(T)$.

Замечание. Рассматривая на множестве всех разбиений $\mathcal{P}^* = \{T\}$ отрезка $[a,b]$ отображение $\Omega : T \to \Omega(T)$, $T \in \mathcal{P}^*$, выберем в $\mathcal{P}^*$ базис фильтра (базу) $\mathbf{B}^* = \{B^*_\delta\}$ с элементами $B^*_\delta = \{T \in \mathcal{P}^* | t = d(T) < \delta\}$ (будем в дальнейшем обозначать базу $\mathbf{B}^*$ символом $t \to +0$). Тогда можно ввести понятие предела $\lim\limits_{t \to +0} \Omega(T)$.

Теорема (предельный критерий интегрируемости по Риману). *Пусть $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда* $(f \in R[a,b]) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega(T) = 0 \ (d(T) = t))$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in R[a,b]$ и $J = \int\limits_a^b f(x)dx$. Тогда $J = \lim\limits_{d(T) \to 0} S(T\xi)$. Вспоминая критерий существования предела (числовой) функции по базису фильтра ($d(T) \to 0$), видим, что в силу необходимости этого критерия $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ такое, что для любых двух размеченных разбиений отрезка $[a,b]$

$T\xi, T\xi' \in B_\delta = \{\hat{T}\hat{\xi} \in \mathcal{P} | d(\hat{T}) < \delta\} \Rightarrow |S(T\xi) - S(T\xi')| < \varepsilon$, т. е. $\sup\limits_{\xi,\xi'} |S(T\xi) - S(T\xi')| = \Omega(T) \leq \varepsilon$.

Итак, показано, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого разбиения

$$T \in B_\delta^* = \{T' \in \mathcal{P}^* | d(T') < \delta\} \Rightarrow (0 \leq \Omega(T) \leq \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \lim_{t \to +0} \Omega_f(T) = 0).$$

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$ и $\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega(T) = 0$. Следствие 2 из теоремы 2 этого параграфа для любого разбиения T отрезка $[a, b]$ дает оценки $0 \leq \overline{J} - \underline{J} \leq \Omega(T)$, откуда $(\lim\limits_{t \to +0} \Omega(T) = 0) \Rightarrow (\overline{J} = \underline{J} = J)$.

Докажем, что $J = \lim\limits_{d(T) \to 0} S(T\xi)$, т. е. $J = \int\limits_a^b f(x)dx$. Пусть $\varepsilon > 0$ любое, тогда из соотношения $\lim\limits_{t \to +0} (\overline{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$ следует, что $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall T \in B_\delta^*$ (так что $t = d(T) < \delta(\varepsilon)$) имеем оценки $0 \leq \overline{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. Но $\forall \xi$ при фиксированном T имеем оценки $\underline{S}(T) \leq S(T\xi) \leq \overline{S}(T)$ и, кроме того, для любого разбиения T $\underline{S}(T) \leq J \leq \overline{S}(T)$. Из оценок

$$\underline{S}(T) \leq S(T\xi) \leq \overline{S}(T),\ \underline{S}(T) \leq J \leq \overline{S}(T)$$

имеем $|S(T\xi) - J| \leq \overline{S}(T) - \underline{S}(T) = \Omega(T)$, так что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall T \in B_\delta^*$ при любом выборе ξ (так что $T\xi \in B_\delta$) имеем оценку $|S(T\xi) - J| < \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{d(T) \to 0} S_f(T\xi) = J$.

Замечание. Если $f(x)$ ограничена на $[a, b]$ и $\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega(T) = 0$, то $\overline{J} = \underline{J} = J = \int\limits_a^b f(x)dx$ и, в частности, $(f \in R[a, b]) \Rightarrow (\lim\limits_{t \to +0} \Omega_f(T) = 0) \Rightarrow (U \int\limits_a^b f(x)dx = L \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx)$.

Теорема (критерий Дарбу интегрируемости по Риману). *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Тогда* $(f \in R[a, b]) \Leftrightarrow (\inf\limits_T \Omega(T) = 0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in R[a, b]$, тогда в силу «предельного критерия интегрируемости по Риману» имеем $\lim\limits_{t \to +0} \Omega(T) = 0$, так что, учитывая, что $\Omega(T) \geq 0\ \forall T$, имеем $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$.

Достаточность. Пусть $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$. Тогда по определению точной нижней грани видим, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ разбиение $T_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{p+1}\}$ отрезка $[a, b]$ с $p + 2$ точками деления такое, что $0 \leq \Omega(T_1) < \varepsilon/2$. В

силу ограниченности функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ $\exists M > 0$ такая, что $|f(x)| \le M$ $\forall x \in [a,b]$. Положим $\delta = \varepsilon/8pM$ и пусть T – любое разбиение отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(T) < \delta$. Пусть $T_2 = \{T_1, T\}$ – составное разбиение $[a,b]$ такое, что $T_2 \prec T_1$ и $T_2 \prec T$, причем разбиение T_2 имеет не более p дополнительных точек по сравнению с T. Тогда в силу следствия к теореме 1 (учитывая неравенство $d(T) < \delta = \varepsilon/8pM$) имеем

$$(T_2 \prec T_1) \Rightarrow (\Omega(T_2) \le \Omega(T_1)) \Rightarrow (\Omega(T_2) \ge \Omega(T) - 4pMd(T) \ge$$

$$\ge \Omega(T) - \varepsilon/2) \Rightarrow (0 \le \Omega(T) \le \Omega(T_2) + \varepsilon/2 \le \Omega(T_1) +$$

$$+\varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon).$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall T \in B_\delta^*$ имеем оценку $0 \le \Omega(T) < \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega_f(T) = 0$. Но тогда из достаточности предельного критерия интегрируемости по Риману следует, что $f \in R[a,b]$ и даже равенство $\overline{J} = \underline{J} = J = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Т е о р е м а (критерий интегрируемости по Риману). *Пусть $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$. Тогда*

$$(f \in R[a,b]) \Leftrightarrow (\overline{J} = \int\limits_a^b f(x)dx = L \int\limits_a^b f(x)dx = \underline{J}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $f \in R[a,b]$, тогда в силу замечания к «предельному критерию интегрируемости по Риману» имеем $\overline{J} = \underline{J} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Достаточность. Пусть $\overline{J} = \underline{J} = J$, но $\overline{J} = \inf\limits_T \overline{S}(T)$ и $\underline{J} = \sup\limits_T \underline{S}(T)$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ разбиения T_1 и T_2 отрезка $[a,b]$ такие, что $\overline{S}(T_1) < \overline{J} + \varepsilon/2$, $\underline{S}(T_2) > \overline{J} - \varepsilon/2$, и для составного разбиения $T = \{T_1, T_2\}$ в силу теоремы 1 имеем

$$(\overline{S}(T) \le \overline{S}(T_1), \underline{S}(T) \ge \underline{S}(T_2)) \Rightarrow (0 \le \Omega(T) = \overline{S}(T) - \underline{S}(T) \le$$

$$\le \overline{S}(T_1) - \underline{S}(T_2) < J + \varepsilon/2 - (J - \varepsilon/2) = \varepsilon).$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение T отрезка $[a,b]$ такое, что $0 \le \Omega(T) < \varepsilon$, т. е. $\inf\limits_T \Omega(T) = 0$. В силу достаточности критерия Дарбу имеем $f \in R[a,b]$ и, как показано выше, $\overline{J} = \underline{J} = J = \int\limits_a^b f(x)dx$.

§ 3. Множества из R меры нуль и длины нуль

В этом параграфе будут использованы определения числового ряда (см. ч. I, гл. 3, § 3) и критерий сходимости для знакопостоянных числовых рядов (см. ч. I, гл. 3, § 4).

О п р е д е л е н и е. *Множество* $A \subset \mathbf{R}$ *имеет меру нуль, если* $\forall \varepsilon > 0$ *существует такое не более чем счетное покрытие множества* A *отрезками* $I_k = [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *что:*

$$1)\, A \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} \text{ и } 2) \sum_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon,$$

где $|I_k| = b_k - a_k$ *– длина отрезка* I_k. Обозначение: $\operatorname{mes} A = 0$.

З а м е ч а н и е. В определении множества меры нуль вместо отрезков $[a_k, b_k]$ можно рассматривать интервалы (a_k, b_k).

Т е о р е м а. *Пусть* $A, B \subset \mathbf{R}$ *и* $B \subset A$. *Тогда* $(\operatorname{mes} A = 0) \Rightarrow (\operatorname{mes} B = 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\operatorname{mes} A = 0$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счетная система отрезков (I_k) такая, что $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} I_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon$, но тогда

$$(B \subset A) \Rightarrow \left(B \subset \bigcup_{k=1}^{+\infty} I_k\right) \Rightarrow (\operatorname{mes} B = 0).$$

Т е о р е м а. *Пусть* $A, A_k \subset \mathbf{R}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$. *Тогда* $(\operatorname{mes} A_k = 0\ \forall k) \Rightarrow (\operatorname{mes} A = 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\operatorname{mes} A_k = 0\ \forall k$, то $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ совокупность отрезков (I_k) $(k, l = 1, 2, \ldots)$ такая, что $\bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} I_{k,l} \supset A_k$ и $\sum\limits_{l=1}^{+\infty} |I_{k,l}| < \varepsilon/2^k$. Но тогда $A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} (\bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} I_{k,l})$. Таким образом, счетная система отрезков $(I_{k,l})$ покрывает множество A. Эту счетную систему можно перенумеровать, обозначая через I_s отрезки $I_{k,l}$, расположенные в порядке возрастания $k + l$, а для одинаковых $k + l$ – в порядке возрастания k. Тогда $\forall N \geq 1$ имеем оценку $\sum\limits_{s=1}^{N} |I_s| \leq \sum\limits_{k=1}^{N} \left(\sum\limits_{l=1}^{N} |I_{k,l}| \right)$, но в силу построения $(I_{k,l})$ имеем $\sum\limits_{l=1}^{N} |I_{k,l}| \leq \sum\limits_{l=1}^{+\infty} |I_{k,l}| < \varepsilon/2^k\ \forall k$, поэтому, очевидно, $\sum\limits_{s=1}^{N} |I_s| < \varepsilon \cdot \sum\limits_{k=1}^{N} 1/2^k < \varepsilon\ \forall N \geq 1$, и в силу критерия

сходимости для знакоположительных числовых рядов имеем

$$\left(\sum_{s=1}^{+\infty}|I_s| = \sup_N \sum_{s=1}^{N}|I_s| < \varepsilon\right) \Rightarrow (\operatorname{mes} A = 0).$$

Следствие 1. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ состоит из конечного или счетного числа точек, то $\operatorname{mes} A = 0$.

Следствие 2. Множество $\mathbf{Q}$ всех рациональных точек из $\mathbf{R}$ имеет меру нуль.

Определение. *Множество $A \subset \mathbf{R}$ имеет (одномерный объем) длину нуль, если $\forall \varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие множества A отрезками $I_k = [a_k, b_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m(\varepsilon))$, что:*

$$1)\ A \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k \ \text{и}\ 2) \sum_{k=1}^{m}|I_k| < \varepsilon.$$

Замечание 1. В определении множества длины нуль можно считать, что покрытие $(I_k = [a_k, b_k])$ состоит из попарно не перекрывающихся отрезков.

Замечание 2. В определении множества длины нуль вместо отрезков $I_k = [a_k, b_k]$ можно брать интервалы $\overset{\circ}{I}_k = (a_k, b_k)$.

Замечание 3. Если $B \subset A$ и множество A имеет длину нуль, то и множество B имеет длину нуль.

Теорема. *Пусть (I_k) $(k = 1, 2, \ldots, m)$ – любое конечное покрытие отрезка $[a, b]$ отрезками I_k так, что $[a, b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{M} I_k$. Тогда* $\sum\limits_{k=1}^{m}|I_k| \geq b - a > 0$.

Доказательство. Пусть $[a, b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k$, где $I_k = [\alpha_k, \beta_k]$, тогда при $m = 1$ теорема справедлива, поскольку $(I_1 = [\alpha_1, \beta_1] \supset [a, b]) \Rightarrow (|I_1| = \beta_1 - \alpha_1 \geq b - a > 0)$. Рассуждая по индукции, переходя от m к $m+1$, допустим, что теорема верна для покрытий, составленных из m отрезков, и пусть $[a, b] \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m+1} I_k$. Изменяя в случае необходимости нумерацию, будем считать, что $a \in [\alpha_1, \beta_1] = I_1$. Тогда $\alpha_1 \leq a \leq \beta_1$. Если при этом $b \leq \beta_1$, то $|I_1| = \beta_1 - \alpha_1 \geq b - a > 0$, если же $\beta_1 < b$, то система $\{I_2, I_3, \ldots, I_{m+1}\}$ образует покрытие отрезка $[\beta_1, b]$, состоящее из m отрезков, и поэтому в силу предположения индукции $\sum\limits_{k=2}^{m+1}|I_k| \geq b - \beta_1 > 0$. Но тогда $\sum\limits_{k=1}^{m+1}|I_k| \geq (\beta_1 - a) + (b - \beta_1) = b - a > 0$, что и завершает доказательство теоремы.

Следствие 1. Отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ не может иметь длины нуль в смысле данного выше определения.

Следствие 2. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ имеет длину нуль, то $\mathring{A} = \varnothing$. В самом деле, если бы $\mathring{A} \neq \varnothing$, то $\exists x_0 \in \mathring{A}$, причем $\exists (\alpha, \beta) \subset \mathring{A}$ такой, что $x_0 \in (\alpha, \beta) \subset A$, и поэтому существует отрезок $[a, b] \subset (\alpha, \beta) \subset A$. Но тогда отрезок $[a, b]$ имел бы длину нуль, поскольку множество A имеет длину нуль. Противоречие.

Следствие 3. Пусть $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ – разбиение отрезка $[a, b]$ с частичными отрезками $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $\{J_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ – конечная система отрезков J_l, такая, что $\bigcup\limits_{l=1}^{m} J_l \supset \bigcup\limits_{s=1}^{m} I_{k_s}$, тогда $\sum\limits_{l=1}^{m} |J_l| \geq \sum\limits_{s=1}^{p} |I_{k_s}|$.

Замечание. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ имеет длину нуль, то множество A имеет и меру нуль. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

Замечание. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ не ограничено, то оно не может иметь длину нуль.

В самом деле, если множество A не ограничено в $\mathbf{R}$, то $\forall k \in \mathbf{N}$ $\exists x_k \in A$ такие, что $|x_k| \geq k$ и $|x_k - x_i| \geq 1$, $k > i$, а поэтому не может существовать конечного покрытия множества A отрезками I_n (имеющими конечные длины $|I_n|$), т. е. множество A не может иметь длину нуль.

Теорема. *Если $K \subset \mathbf{R}$ – замкнутое и ограниченное множество, то K компактно в $\mathbf{R}$.*

В дальнейшем в ч. III этого тома будет доказана более общая теорема для пространства $\mathbf{R}$, поэтому попробуйте доказать эту теорему самостоятельно по схеме доказательства леммы Бореля – Лебега о компактности отрезка (ч. I, гл. 3, § 6).

Доказательство. Поскольку множество K ограничено в $\mathbf{R}$, то существует отрезок $I_0 = [a, b] \supset K$. Дальнейшее доказательство воспроизводит доказательство леммы Бореля – Лебега о компактности отрезка. Допустим, что множество K не компактно, тогда существует покрытие множества K бесконечной системой интервалов $\{M_\gamma\} = \{(\alpha_\gamma, \beta_\gamma)\}$, из которой нельзя выбрать конечного подпокрытия для K. Применяя метод деления отрезка $I_0 = [a, b]$ пополам, получаем по индукции систему отрезков $\{I_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$: $I_n \subset I_{n-1} \subset \ldots \subset I_1 \subset I_0 = [a, b]$; множество $I_n \cap K \neq \varnothing$ не допускает выделения конечного покрытия из системы $\{M_\gamma\}$ и $|I_n| = (b - a)/2^n$. Система отрезков (I_n) $(n \in \mathbf{N}_0)$ стягивающаяся, и по теореме Кантора $\exists \{c\} = \bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} I_n$.

Заметим, что для любой окрестности $U(c)$ $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $U(c) \supset I_{n_0} \supset (I_{n_0} \cap K)$, т. е. $U(c) \cap K \neq \varnothing$, поэтому $c \in K'$. Но множество K замкнуто, т. е. $K' \subset K$, поэтому $c \in K$, и тогда существует интервал (α, β) из системы $\{M_\gamma\}$ такой, что $c \in (\alpha, \beta)$. Но, как уже было замечено, тогда $\exists n_0$ такое, что $(\alpha, \beta) \supset I_{n_0} \supset (I_{n_0} \cap K)$, т. е.

множество $I_{n_0} \cap K$ $(\neq \varnothing)$ оказалось покрытым одним интервалом из системы $\{M_\gamma\}$. Противоречие.

Т е о р е м а. *Пусть* $K \subset \mathbf{R}$ *компактно и* mes $K = 0$. *Тогда множество* K *имеет длину нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $K \subset (-\infty, +\infty)$ компактно в $\mathbf{R}$ и mes $K = 0$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ не более чем счетное покрытие множества K интервалами $\overset{\circ}{I}_k = (a_k, b_k)$ такое, что $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} I_k \supset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \overset{\circ}{I}_k \supset K$ и $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon$. В силу компактности K из нашего (открытого) покрытия можно выделить подпокрытие $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \overset{\circ}{I}_{k_j} \supset K$, причем $\sum\limits_{j=1}^{m} |I_{k_j}^n| \leq \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |I_k| < \varepsilon$, тем самым показано, что множество K имеет длину нуль.

С л е д с т в и е. Если mes $A = 0$, то $\overset{\circ}{A} = \varnothing$. В самом деле, допустим, что mes $A = 0$ и $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$. Тогда существуют точка $x_0 \in \overset{\circ}{A}$ и интервал (α, β) такие, что $x_0 \in (\alpha, b) \subset A$. Но тогда существует и отрезок $[a, b]$ такой, что $x_0 \in [a, \beta] \subset (\alpha, \beta) \subset A$. Но $(\text{mes } A = 0) \Rightarrow (\text{mes } [a, b] = 0)$ и в силу компактности отрезок $[a, b]$ имеет длину нуль, что невозможно.

С л е д с т в и е. Любое счетное ограниченное замкнутое множество из $\mathbf{R}$ имеет длины нуль. В самом деле, счетное множество имеет меру нуль, кроме того, будучи замкнутым и ограниченным, оно компактно в $\mathbf{R}$, а тогда в силу доказанной теоремы оно имеет и длину нуль.

Т е о р е м а. *Если множество* $A \subset (-\infty, +\infty)$ *ограничено, то его граница* ∂A *компактна (в* $\mathbf{R}$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку множество A ограничено в $\mathbf{R}$, то существует отрезок $[a, b] \supset A$. В силу замкнутости отрезка $[a, b] = I$ имеем $I = [a, b] \supset \overline{A}$. Но $(\partial A \subset \overline{A}) \Rightarrow (\partial A \subset [a, b])$. Поэтому множество ∂A ограничено в $\mathbf{R}$. Но как было доказано ранее (см. ч. I, гл. 3, § 1), граница ∂A всегда замкнута. Итак, множество ∂A замкнуто и ограничено в $\mathbf{R}$, т. е. компактно в R.

З а м е ч а н и е. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ имеет длину нуль, то и граница ∂A множества A имеет длину нуль.

В самом деле, поскольку множество A имеет длину нуль, то A ограничено и $\forall \varepsilon > 0$ существует конечное покрытие A отрезками $\{I_k\}$ $(I_k = [a_k, b_k])$ $(k = 1, 2, \ldots, m(\varepsilon))$ такое, что $F_m = \bigcup\limits_{k=1}^{m} I_k \supset A$, причем $\sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| < \varepsilon$. Но множество F_m как объединение конечного числа замкнутых ограниченных множеств само замкнуто и ограничено, причем $(F_m \supset A) \Rightarrow (\overline{F}_m = F_m \supset \overline{A} \supset \partial A)$. Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \{I_k\}$

$(k = 1, 2, \ldots, m(\varepsilon))$ такое, что $\partial A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{m(\varepsilon)} I_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{m} |I_k| < \varepsilon$, т. е. граница ∂A имеет длину нуль.

З а м е ч а н и е. Если множество $A \subset \mathbf{R}$ не компактно, то из того, что оно имеет меру нуль ($\operatorname{mes} A = 0$), вообще говоря, не следует, что оно имеет длину нуль (даже если оно ограничено).

П р и м е р. Пусть $Q = \mathbf{Q} \cap [0, 1] \subset \mathbf{R}$ – множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$. Множество Q ограничено и счетно, так что $\operatorname{mes} Q = 0$. Если бы Q имело длину нуль, то и его граница ∂Q (по доказанному выше) также имела бы длину нуль. Однако $\partial Q = [0, 1]$, а отрезок $[0, 1]$, как было доказано, не может иметь длину нуль.

§ 4. Критерий Лебега интегрируемости по Риману

Ранее (см. ч. I, гл. 4, § 1) были введены понятия колебания функции на отрезке и в точке. Пусть функция $f(x)$ определена и локально ограничена на множестве $A \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in \overline{A}$. Для любого интервала $(\alpha, \beta) \ni x_0$ положим

$$M(f; [\alpha, \beta]) = \sup_{[\alpha, \beta] \cap A} f(x),$$

$$m(f; [\alpha, \beta]) = \inf_{[\alpha, \beta] \cap A} f(x).$$

Колебанием функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ была названа величина $\omega(f; [\alpha, \beta]) = M(f; [\alpha, \beta]) - m(f; [\alpha, \beta])$. Было доказано, что

$$\omega(f; [\alpha, \beta]) = \sup_{x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \cap A} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Далее, при любых $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$, $x_0 \in (\alpha', \beta')$ имеют место оценки

$$-\infty < m(f; [\alpha, \beta]) \leq m(f; [\alpha', \beta']) \leq M(f; [\alpha', \beta']) \leq$$

$$\leq M(f; [\alpha, \beta]) < +\infty;$$

$$0 < \omega(f; [\alpha', \beta']) \leq \omega(f; [\alpha, \beta]) < +\infty.$$

Полагая при

$$\Delta_\delta(x_0) = [x_0 - \delta, x_0 + \delta],\ M(f; x_0) = \lim_{\delta \to 0} M(f; \Delta_\delta(x_0)) =$$

$$= \inf_{d > 0} \sup_{\Delta_\delta(x_0) \cap A} f(x) = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x);$$

$$m(f; x_0) = \lim_{\delta \to 0} m(f; \Delta_\delta(x_0)) = \sup_{\delta > 0} \inf_{\Delta_\delta(x_0) \cap A} f(x) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x),$$

вводим понятие колебания функции $f(x)$ в точке $x_0 \in \overline{A}$ как величину $\omega(f;x_0) = M(f;x_0) - m(f;x_0)$, при этом $\omega(f;x_0) = \lim\limits_{\delta \to +0} \omega(f;\Delta_\delta(x_0))$ и $0 \le \omega(f;x_0) \le \omega(f;\Delta_\delta(x_0)) < +\infty \ \forall \delta > 0$, а также $\omega(f;x_0) \le \omega(f;[\alpha,\beta]) < +\infty \ \forall (\alpha,\beta) \ni x_0$.

Ранее (см. ч. I, гл. 4, § 1, 3) были доказаны теоремы:

Теорема (критерий непрерывности Бэра). *Если* $f \in B(A)$, $x_0 \in A$, *то* $(f \in C(x_0)) \Leftrightarrow (\omega(f;x_0) = 0)$.

Теорема Кантора (о равномерной непрерывности). *Если* $f(x)$ *определена и ограничена на отрезке* $[a,b]$ *и* $\omega(f;x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$, *то функция* $f(x)$ *равномерно непрерывна на отрезке* $[a,b]$.

Обобщим теорему Кантора на разрывные функции.

Теорема Кантора. *Пусть функция* $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ *ограничена на* $[a,b]$ *и* $\exists \omega \ge 0$ *такое, что* $0 \le \omega(f;x) \le \omega \ \forall x \in [a,b]$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ *разбиение* $T_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *отрезка* $[a,b]$ *такое, что* $\omega_k = \omega(f;[x_{k-1},x_k]) < \omega + \varepsilon \ (k = 1,2,\dots,n)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ – любое, но фиксированное. Поскольку $0 < \omega(f;x) \le \omega \ \forall x \in [a,b]$, то $\forall x \in [a,b] \ \exists$ интервал $U_{\delta(x)}(x) = (x - \delta(x), x + \delta(x)) \ni x$ такой, что $\omega(f;\overline{U}_{\delta(x)}(x)) < \omega + \varepsilon$, причем $[a,b] \subset \bigcup\limits_{x \in [a,b]} U_{\delta(x)}(x)$. В силу компактности отрезка $[a,b]$ существует конечное подпокрытие

$$\{U_{\delta_k}(\overline{x}_k)\} \equiv \{(a_k,b_k)\} \ (k = 1,2,\dots,m), \ [a,b] \subset \bigcup_{k=1}^{m} (a_k,b_k).$$

Пусть T_0 – такое разбиение отрезка $[a,b]$, что все точки вида $x = a_k$, $x = b_k$ $(k = 1,2,\dots,m)$, принадлежащие отрезку $[a,b]$, входят в разбиение T_0, и любой частичный отрезок $[x_{i-1},x_i]$ из разбиения T_0 содержится в некотором отрезке $[a_k,b_k] = \overline{U}_{\delta_k}(\overline{x}_k)$. Тогда, очевидно, $\omega(f;[x_{i-1},x_i]) < \omega + \varepsilon \ \forall i$.

Следствие. При выполнении условий теоремы Кантора $\forall \varepsilon > 0 \ \exists$ такое разбиение T_0 отрезка $[a,b]$, что $\Omega_f(T_0) < (\omega + \varepsilon)(b - a)$.

Теорема. *Пусть* $F \subset (-\infty,+\infty)$ – *замкнутое множество и функция* $f : F \to \mathbf{R}$ *определена и ограничена на множестве* F. *Пусть* $E(\varepsilon) = \{x \in F | \omega(f;x) \ge \varepsilon > 0\}$. *Тогда:*

1) $E(\varepsilon_2) \subset E(\varepsilon_1) \ \forall 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$; *2)* $E'(\varepsilon) \subset E(\varepsilon) \ \forall \varepsilon > 0$, *т. е. множество* $E(\varepsilon)$ *замкнуто в* $\mathbf{R} \ \forall \varepsilon > 0$.

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Для доказательства утверждения 2) предположим, что $x_0 \in E'(\varepsilon)$, тогда $\forall \delta > 0 \ \exists x_\delta \in E(\varepsilon) \cap \dot{U}_\delta(x_0)$, причем $\omega(f;F \cap U_\delta(x_0)) \ge \omega(f;x_\delta) \ge \varepsilon > 0$. Но в силу замкнутости множества F имеем $(F \supset E(\varepsilon)) \Rightarrow (\overline{F} = F \supset \overline{E(\varepsilon)} \supset E'(\varepsilon)) \Rightarrow (x_0 \in F)$. Но тогда поскольку $\omega(f;x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f;F \cap U_\delta(x_0))$, то $(\omega(f;x_0) \ge \varepsilon > 0) \Rightarrow (x_0 \in E(\varepsilon)) \Rightarrow (E'(\varepsilon) \subset E(\varepsilon))$, т. е. множество $E(\varepsilon)$ замкнуто в $\mathbf{R}$.

Замечание. Если E – множество всех точек разрыва функции $f(x)$, определенной и ограниченной на замкнутом множестве $F \subset (-\infty, +\infty)$, то $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E\left(\frac{1}{m}\right)$.

Теорема (критерий Лебега интегрируемости по Риману). *Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и E – множество точек разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$. Тогда*

$$(f \in R[a,b]) \Leftrightarrow (\operatorname{mes} E = 0).$$

Доказательство. Необходимость. Пусть $f \in R[a,b]$ и $E \subset [a,b]$ – множество точек разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$. Поскольку $E = \bigcup_{m=1}^{+\infty} E(1/m)$, то достаточно доказать, что $\operatorname{mes} E(1/m) = 0$ $\forall m \in \mathbf{N}$. Тогда множество E как объединение счетного множества меры нуль само будет иметь меру нуль. Будет доказано, что множество $E(1/m)$ имеет длину нуль $\forall m \in \mathbf{N}$. Поскольку $f \in R[a,b]$, то в силу критерия Дарбу (интегрируемости по Риману) имеем $\inf\limits_{T} \Omega_f(T) = 0$, т. е. при фиксированном $m \in N$ $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение $T = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ отрезка $[a,b]$ такое, что $0 \le \Omega_f(T) < \varepsilon/2m$.

Рассмотрим совокупность $\{I_k\} = \{[x_{k-1}, x_k]\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ всех частичных отрезков, соответствующих выбранному разбиению T. Положим $\hat{E}(1/m) = E(1/m) \cap \bigcup_{k=1}^{n} \overset{\circ}{I}_k$ и $\hat{\hat{E}}(1/m) = E(1/m) \cap \bigcup_{k=1}^{n} \partial I_k$. Поскольку граница $\partial I_k = \{x_{k-1}\} \cup \{x_k\}$ есть совокупность двух точек, то ∂I_k имеет длину нуль. Но поскольку $\hat{\hat{E}}(1/m) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \partial I_k$, то и множество $\hat{\hat{E}}(1/m)$ имеет длину нуль. Но тогда для зафиксированного $\varepsilon > 0$ существует конечная система отрезков $\{\mathcal{J}_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, L(\varepsilon))$ такая, что $\hat{\hat{E}}(1/m) \subset \bigcup_{l=1}^{L(\varepsilon)} \mathcal{J}_l$ и $\sum_{l=1}^{L(\varepsilon)} |\mathcal{J}_l| < \varepsilon/2$.

Рассмотрим теперь множество $\hat{E}(1/m) \subset \bigcup_{k=1}^{n} \overset{\circ}{I}_k$. Возьмем любую точку $x_0 \in \hat{E}(1/m) \neq \varnothing$. Тогда существует k_0 такое, что $x_0 \in I_{k_0}$, и в силу определения множества $\hat{E}(1/m)$ имеем $x_0 \in \overset{\circ}{I}_{k_0} = (x_{k_0-1}, x_{k_0})$, и поэтому $\exists \delta > 0$ такое, что $\Delta_\delta(x_0) \subset I_{k_0} \Rightarrow (\omega_{k_0} = \omega(f; I_{k_0}) \ge \omega(f; \Delta_\delta(x_0)) \ge \omega(f; x_0) \ge 1/m > 0)$.

Таким образом, $\hat{E}(1/m) \subset \bigcup_{(k)} I_k$, где суммирование (k) распространяется на те частичные отрезки I_k из T, на которых $\omega_k = \omega(f; I_k) \ge 1/m$. Но в силу выбора разбиения T отрезка $[a,b]$ по заданному $\varepsilon > 0$

имеем

$$\frac{1}{m}\sum_{(k)(\omega_k\geq 1/m)}|I_k|\leq\sum_{(k)}\omega_k\cdot|I_k|\leq\sum_{j=1}^{n}\omega(f;[x_{j-1},x_j])\Delta x_j=$$

$$=\Omega_f(T)<\varepsilon/2m\Rightarrow\left(\sum_{(k)}|I_k|<\varepsilon/2\,(\omega_k\geq 1/m)\right).$$

Итак, $E(1/m)=\hat{E}(1/m)\cup\hat{\hat{E}}(1/m)\subset\bigcup\limits_{(k)}I_k\cup\bigcup\limits_{l=1}^{L(\varepsilon)}\mathcal{J}_l$, где $\sum\limits_{(k)}|I_k|+\sum\limits_{l=1}^{L(\varepsilon)}|\mathcal{J}_l|<\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon>0$ вытекает, что множество $E(1/m)$ имеет длину нуль, чем и завершается доказательство необходимости критерия Лебега интегрируемости по Риману.

Достаточность. Пусть $E\subset[a,b]$ – множество точек разрыва функции $f(x)$, определенной и ограниченной на отрезке $[a,b]$. Заметим, что $\forall\varepsilon>0$, имеем $E(\varepsilon)=\{x\in[a,b]|\omega(f;x)\geq\varepsilon>0\}\subset E\subset[a,b]$, т. е. $E(\varepsilon)$ ограничено. Но, как было доказано, множество $E(\varepsilon)$ замкнуто, но тогда замкнутое и ограниченное множество $E(\varepsilon)$ компактно в $\mathbf{R}$ при любом $\varepsilon>0$.

Пусть $\operatorname{mes}E=0$, тогда $(E(\varepsilon)\subset E)\Rightarrow(\operatorname{mes}E(\varepsilon)=0)$. В силу компактности множество $E(\varepsilon)$ имеет и длину нуль $\forall\varepsilon>0$. Итак, $\forall\varepsilon>0$ множество $E(\varepsilon)$ имеет длину нуль, т. е. для того же $\varepsilon>0$ $\exists$ конечная система $\mathcal{J}$ отрезков $\{\mathcal{J}_l\}$ $(l=1,2,\ldots,m)$ такая, что система интервалов $\{\overset{\circ}{\mathcal{J}}_l\}$ покрывает $E(\varepsilon)$, т. е. $\bigcup\limits_{l=1}^{m}\mathcal{J}_l\supset\bigcup\limits_{l=1}^{m}\overset{\circ}{\mathcal{J}}_l\supset E(\varepsilon)$, причем $\sum\limits_{l=1}^{m}|\mathcal{J}_l|<\varepsilon$.

Пусть $T=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$, состоящее из точек a, b и всех концов отрезков $\mathcal{J}_l$ $(l=1,2,\ldots,m)$, лежащих на $[a,b]$. Пусть $I_k=[x_{k-1},x_k]$ $(k=1,2,\ldots,n)$ – частичный отрезок из разбиения T. В силу построения интервал $(x_{k-1},x_k)=\overset{\circ}{I}_k$ не содержит концов отрезков $\mathcal{J}_l$ из системы $\mathcal{J}$, поэтому возможны лишь два случая: 1) существует индекс l_0 такой, что $I_k\subset\mathcal{J}_{l_0}$; эту группу отрезков (из T) будем обозначать через $I'\equiv\{I_{k'}\}$; 2) $(x_{k-1},x_k)\cap\mathcal{J}_l=\varnothing$ $\forall l$. В этом случае конец x_{k-1} (или конец x_k) может быть концом некоторого отрезка из системы $\mathcal{J}$, но даже и в этом случае $x_{k-1}\overline{\in}E(\varepsilon)$ $(x_k\overline{\in}E(\varepsilon))$. В самом деле, если бы $x_{k-1}\in E(\varepsilon)$, то, поскольку система интервалов $\{\overset{\circ}{\mathcal{J}}_l\}$ покрывает множество $E(\varepsilon)$, существует индекс l_1 такой, что $x_{k-1}\in\overset{\circ}{\mathcal{J}}_{l_1}$, и тогда, очевидно, $(x_{k-1},x_k)\cap\mathcal{J}_{l_1}\neq\varnothing$ вопреки построению разбиения T.

Итак, $((x_{k-1}, x_k) \cap \mathcal{J}_l = \varnothing \ (l = 1, 2, \ldots, m)) \Rightarrow (I_k \cap E(\varepsilon) = \varnothing)$. Эту группу отрезков I_k будем обозначать через $I'' \equiv \{I_{k''}\}$.

Тем самым показано, что каждый из отрезков I_k разбиения T содержится либо в группе I', либо в группе I''. Поскольку $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, то существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$, и тогда $\omega_k = \omega(f; I_k) \leq 2M$ $\forall I_k$ из T. В частности, если $I_{k'} \in I'$, то $\bigcup\limits_{(k')} I_{k'} \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} \mathcal{J}_l$ и в силу следствия 3 из § 3 имеем оценку

$$\sum_{(k')} \omega_{k'} |I_{k'}| \leq 2M \sum_{l_1}^{m} |I_l| < 2M\varepsilon.$$

Пусть теперь $I_{k''} \in I''$. Тогда $I_{k''} \cap E(\varepsilon) = \varnothing$, и поэтому $\omega(f; x) < \varepsilon$ $\forall x \in I_{k''}$. Применим к отрезку $I_{k''} = [x_{k''-1}, x_{k''}]$ следствие из теоремы Кантора (полагая в нем $\omega = \varepsilon$). Тогда существует разбиение $T^{(k'')}$ отрезка $I_{k''}$: $T^{(k'')} = \{x_{k''-1} = y_0, y_1, \ldots, y_{n(k'')} = x_{k''}\}$ с частичными отрезками $I_l^{(k'')} = [y_{l-1}, y_l]$ такое, что

$$\sum_{l=1}^{n(k'')} \omega(f; [y_{l-1}, y_l]) |I_l^{(k'')}| < 2\varepsilon |I_{k''}|.$$

Образуем теперь составное разбиение T^0 отрезка $[a, b]$ с помощью разбиений T и $T^{(k'')}$, обозначив через I_r^0 его частичные отрезки. Тогда имеем оценки

$$0 \leq \Omega_f(T^0) = \sum_{(I_r^0 \subset I_{k'} \in I')} \omega_r |I_r^0| +$$

$$+ \sum_{(I_r^0 \subset I_{k''} \in I'')} \omega_r |I_r^0| < 2\varepsilon M +$$

$$+ \sum_{(k'')} 2\varepsilon \cdot |I_{k''}| < 2\varepsilon(M + b - a).$$

В самом деле, поскольку $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [a, b]$, то $\omega_r \leq 2M$ $\forall r$, причем $\sum\limits_{(I_r^0 \subset I_{k'} \in I')} |I_r^0| = \sum\limits_{(k')} |I_{k'}| < \varepsilon$, так что $\sum\limits_{(I_r^0 \subset I_{k'} \in I')} \omega_r |I_r^0| \leq 2M\varepsilon$. Далее, для любого r из группы $(I_r^0 \subset I_{k''} \in I'')$ имеем $\omega_r \leq 2\varepsilon$, причем $\sum\limits_{(I_r^0 \subset I_{k''} \in I'')} |I_r^0| = \sum\limits_{k''} |I_{k''}| \leq b - a$, так что $\sum\limits_{(I_r^0 \subset I_{k''} \in I'')} \omega_r |I_r^0| \leq 2\varepsilon(b - a)$.

Итак, при $\varepsilon > 0$ существует разбиение T^0 отрезка $[a, b]$ такое, что $0 \leq \Omega_f(T^0) < 2\varepsilon(M + b - a)$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем $\inf\limits_T \Omega_f(T) = 0$, откуда в силу достаточности критерия Дарбу $f \in R[a, b]$, что и требовалось доказать.

§ 5. Классы функций, интегрируемых по Риману

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a,b]$ и имеет на нем не более счетного множества точек разрыва, то $f \in R[a,b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $E \subset [a,b]$ – множество точек разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Если множество E не более чем счетно, то $\operatorname{mes} E = 0$, а потому в силу критерия Лебега интегрируемости по Риману $f \in R[a,b]$.

С л е д с т в и е 1. $(f \in C([a,b])) \Rightarrow (f \in R[a,b])$.

З а м е ч а н и е. Ввиду важности следствия 1 приведем еще одно доказательство интегрируемости непрерывной функции по Риману, не опирающееся на критерий Лебега.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C([a,b])$, то по теореме Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке, следует, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall$ разбиения T отрезка $[a,b]$ с диаметром $d(T) < \delta \Rightarrow (\omega_k = \omega(f;[x_{k-1},x_k]) < \varepsilon/(b-a)\ \forall k)$. Но тогда $\forall T \in B_\delta^*$ (т. е. при $t = d(T) < \delta$), $\Omega_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a} \sum\limits_{k=1}^{n} \Delta x_k = \dfrac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon$, так что $\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega_f(T) = 0$, и поэтому в силу предельного критерия интегрируемости по Риману имеем $f \in R[a,b]$.

С л е д с т в и е 2. Если функция $f(x)$ определена и монотонна на отрезке $[a,b]$, то $f \in R[a,b]$.

В самом деле, если $f(x)$ монотонна на отрезке $[a,b]$, то она ограничена на $[a,b]$ и имеет на $[a,b]$ не более счетного множества точек разрыва. Но тогда в силу теоремы 1 $f \in R[a,b]$.

З а м е ч а н и е. Приведем еще одно доказательство интегрируемости монотонной функции, не опирающееся на критерий Лебега.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f \uparrow$ на $[a,b]$, тогда $f(a) \le f(x) \le f(b)\ \forall x \in [a,b]$, т. е. существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$. В силу монотонности $f(x)$ для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $\omega_k = \omega(f;[x_{k-1},x_k]) = f(x_k) - f(x_{k-1}) \ge 0\ \forall k$, но тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon/2M$ такое, что $\forall T \in B_\delta^*$ (так что $t = d(T) < \delta$) $\Omega_f(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k \Delta x_k \le t \sum\limits_{k=1}^{n} \omega_k < \dfrac{\varepsilon}{2M} \sum\limits_{k=1}^{n} (f(x_k) - f(x_{k-1})) = \dfrac{\varepsilon}{2M}(f(b) - f(a)) \le \dfrac{\varepsilon}{2M} 2M = \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{t \to +0} \Omega_f(T) = 0$, откуда в силу предельного критерия интегрируемости по Риману имеем $f \in R[a,b]$.

З а м е ч а н и е. Помимо классов $C([a,b])$ и $R[a,b]$ введем классы

$B[a,b]$ и $M[a,b]$, где $B[a,b]$ – множество всех функций $f(x)$, определенных и ограниченных на $[a,b]$; $M[a,b]$ – множество всех функций $f(x)$, определенных и монотонных на $[a,b]$. Тогда по доказанному выше имеем

$$\left\{ \begin{array}{c} C([a,b]) \\ M[a,b] \end{array} \right\} \subset R[a,b] \subset B[a,b].$$

Замечание (о вычислении определенного интеграла Римана). Пусть $f \in B[a,b]$. Для того чтобы вычислить $\int\limits_a^b f(x)dx$, нужно проверить, что $f \in R[a,b]$, и в случае $f \in R[a,b]$ в силу теоремы о единственности интеграла Римана можно вычислить предел $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi)$ по какой-нибудь последовательности размеченных разбиений $T^{(n)}\xi^{(n)}$ с $d(T^{(n)}) \to 0$, полагая, например, $h_n = (b-a)/n$, $x_k = a + kh_n$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f((x_{k-1}+x_k)/2)h_n$.

Определение. *Пусть $A \subset \mathbf{R}$, тогда характеристической функцией X_A множества A называется функция*

$$X_A(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1,\ x \in A, \\ 0,\ x \overline{\in} A. \end{array} \right.$$

Определение. *Ограниченное множество $A \subset \mathbf{R}$, граница ∂A которого имеет меру нуль* (mes $\partial A = 0$), *а стало быть (в силу компактности границы ∂A), и длину нуль, называется измеримым по Жордану.*

Теорема (критерий измеримости по Жордану). *Пусть $A \subset [a,b]$. Тогда (множество A измеримо по Жордану* (т. е. mes $\partial A = 0$)) $\Leftrightarrow$ $(X_A \in R[a,b])$.

Доказательство. Покажем, что $\partial A = E \equiv \{x \in \mathbf{R} | \omega(X_A; x) > 0\}$, $\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$ имеем $x_0 \in \overset{\circ}{A} \cup A_e \cup \partial A$. Но:

1) $x_0 \in \overset{\circ}{A}$. Тогда $\exists \Delta_\delta(x_0) \subset \overset{\circ}{A} \subset A$, так что $X_A(x) = 1$ $\forall x \in \Delta_\delta(x_0)$, т. е. $X_A \in C(x_0)$ $\forall x_0 \in \overset{\circ}{A}$.

2) $x_0 \in A_e$. Тогда $\exists \Delta_\delta(x_0) \subset CA$, так что $X_A(x) = 0$ $\forall x \in \Delta_\delta(x_0)$, т. е. $X_A \in C(x_0)$ $\forall x_0 \in A_e$.

3) $x_0 \in \partial A$. Тогда $\forall \delta > 0$ $\exists x_1 \in \Delta_\delta(x_0) \cap A$ и $\exists x_2 \in \Delta_\delta(x_0) \cap CA$, т. е. $X_A(x_1) = 1$, $X_A(x_2) = 0$, так что $(\omega(X_A; \Delta_\delta(x_0)) = 1$ $\forall \delta > 0) \Rightarrow (\omega(X_A, x_0) = 1 > 0)$, т. е. $X_A \overline{\in} C(x_0)$ $\forall x_0 \in \partial A$.

Итак, $\partial A = E$. Но $(A \subset [a,b]) \Rightarrow (\partial A = E \subset [a,b])$. Таким образом, в силу критерия Лебега имеем

$$(X_A \in R[a,b]) \Rightarrow (\text{mes } E = \text{mes } \partial A = 0) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow$ ($A \subset [a,b]$ — измеримо по Жордану).

Определение. *Если множество* $A \subset [a,b]$ *измеримо по Жордану, то интеграл Римана* $\int\limits_a^b X_A(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} |A|$ *называется длиной множества* A *в* $\mathbf{R}$.

Замечание. Ранее определение множества длины нуль было введено с помощью конечных покрытий множества отрезками. Выше введена длина $|A|$ множества A с помощью интеграла Римана от характеристической функции X_A. Необходимо поэтому рассмотреть вопрос об эквивалентности этих двух определений.

Теорема (об эквивалентности двух определений множества длины нуль). *Пусть* $A \subset [a,b]$. *Тогда* ($|A| = 0$) $\Leftrightarrow$ *(множество* A *имеет длину нуль (в старом определении)).*

Доказательство. Необходимость. Пусть $|A| = 0$. Тогда $X_A \in R[a,b]$ и $\int\limits_a^b X_A(x)dx = 0$. Докажем, что $\overset{\circ}{A} = \varnothing$. В самом деле, если $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$, то существует интервал $(\alpha,\beta) \subset A$, и тогда можно было бы указать разбиение T_0 отрезка $[a,b]$ такое, что для некоторого k, $(\alpha,\beta) \supset I_k = [x_{k-1},x_k]$, причем $|I_k| = \delta > 0$. Но тогда $m_k = m(X_A; I_k) = 1$, и поэтому $\underline{S}_{X_A}(T_0) \geq m_k \Delta x_k = \delta > 0$, откуда $|A| = \int\limits_a^b X_A(x)dx = L\int\limits_a^b X_A(x)dx = \sup\limits_T \underline{S}_{X_A}(T) \geq \delta > 0$. Противоречие с условием $|A| = 0$.

Итак, $\overset{\circ}{A} = \varnothing$. Но тогда $A \subset \partial A$. Далее, ($X_A \in R[a,b]$) $\Rightarrow$ (множество A измеримо по Жордану, а потому $\operatorname{mes} \partial A = 0$). В силу компактности граница ∂A имеет длину нуль (в старом определении). Но $A \subset \partial A$, поэтому и множество A имеет длину нуль в старом определении.

Достаточность. Пусть $A \subset [a,b]$ есть множество длины нуль (в старом определении). Тогда $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная система $\mathcal{J}$ отрезков $\{\mathcal{J}_l\}$ ($l = 1,2,\ldots,m(\varepsilon)$) такая, что $A \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} \overset{\circ}{\mathcal{J}}_l \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} \mathcal{J}_l$, причем $\sum\limits_{l=1}^{m} |\mathcal{J}_l| < \varepsilon$. Теперь, следуя ходу доказательства достаточности критерия Лебега, рассмотрим разбиение T отрезка $[a,b]$, составленное из точек a, b и всех концов отрезков $\mathcal{J}_l$ (из системы $\mathcal{J}$), лежащих на отрезке $[a,b]$. Тогда, как было доказано, любой частичный отрезок $I_k = [x_{k-1},x_k]$ разбиения T содержится только в одной из двух групп I' и I'': I') существует индекс l_0 такой, что $I_k \subset \mathcal{J}_{l_0}$; I'') $I_k \cap A = \varnothing$.

Рассмотрим теперь для характеристической функции X_A верхнюю сумму Дарбу $\overline{S}_X(T)$ на отрезке $[a,b]$. Очевидно,

$$(0 \leq M_{k'} = M(X_A; I_{k'}) \leq 1,\ M_{k''} = M(X_A; I_{k''}) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (0 \le \overline{S}_{X_A}(T) = \sum_{(k')} M_{k'} \Delta x_{k'} \le \sum_{(k')} \Delta x_{k'} \le \sum_{l=1}^{m} |\mathcal{J}_l| < \varepsilon).$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0\ \exists T$ такое, что $0 \le \overline{S}_{X_A}(T) < \varepsilon$. Но тогда $\inf\limits_{T} \overline{S}_{X_A}(T) = 0 = \overline{\mathcal{J}} \equiv U \int\limits_a^b X_A(x)dx$. Но $(X_A(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b]) \Rightarrow (\underline{\mathcal{J}} \ge 0)$, поэтому из $0 \le \underline{\mathcal{J}} \le \overline{\mathcal{J}} = 0 \Rightarrow X_A \in R[a,b]$ и $\left(\int\limits_a^b X_A(x)dx = 0\right) \Rightarrow (|A| = 0)$.

Пример. Пусть $Q = \mathbf{Q} \cap [0,1]$, тогда Q как счетное множество имеет меру нуль (mes $Q = 0$), однако ее характеристическая функция $X_Q(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \overline{\in} Q \end{cases}$ есть функция Дирихле, поэтому $X_Q \overline{\in} R[0,1]$, т. е. множество Q не измеримо по Жордану и не имеет длины. В частности, множество Q не имеет длины нуль.

Замечание 1. При доказательстве теоремы об эквивалентности определений множеств длины нуль в старом и новом смысле попутно было показано, что при $A \subset \mathbf{R}$ $(|A| = 0) \Rightarrow (\overset{\circ}{A} = \varnothing)$, так что множество длины нуль не может иметь внутренних точек.

Замечание 2. Если $A \subset (-\infty, +\infty)$, то $(|A| = 0) \Rightarrow (|\partial A| = |\overline{A}| = 0)$.

В самом деле, ранее было доказано, что $(|A| = 0) \Rightarrow (|\partial A| = 0)$, но тогда $\overline{A} = A \cup \partial A$ имеет длину нуль (в старом определении), т. е. $(|\overline{A}| = 0)$.

Теорема. *Пусть множества $A_1, A_2 \subset [a,b]$ измеримы по Жордану. Тогда: 1) множество $A_1 \cup A_2$ измеримо по Жордану; 2) множество $A_1 \cap A_2$ измеримо по Жордану; 3) множества $[a,b] \setminus A_i = CA_i \cap [a,b]$ $(i = 1,2)$ измеримы по Жордану; 4) множества $A_1 \setminus A_2$ и $A_2 \setminus A_1$ измеримы по Жордану.*

Доказательство. 1) Поскольку множества $A_1, A_2 \subset [a,b]$ измеримы по Жордану, то mes $\partial A_i = |\partial A_i| = 0$ $(i = 1,2)$. Но легко видеть (докажите это самостоятельно), что $\partial(A_1 \cup A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$, откуда mes $\partial(A_1 \cup A_2) = |\partial(A_1 \cup A_2)| = 0$. Но $(A_1, a_2 \subset [a,b]) \Rightarrow (A_1 \cup A_2 \subset [a,b])$, поэтому множество $A_1 \cup A_2$ измеримо по Жордану.

2) Очевидное включение $\partial(A_1 \cap A_2) \subset \partial A_1 \cup \partial A_2$ позволяет тем же путем доказать измеримость множества $A_1 \cap A_2 \subset [a,b]$.

3) Если множество $A \subset [a,b]$ измеримо по Жордану, то mes $\partial A = |\partial A| = 0$, но $(\partial CA = \partial A \subset [a,b]) \Rightarrow (\text{mes } \partial CA = |\partial CA| = 0)$. Для отрезка $[a,b]$ имеем $\partial[a,b] = \{a\} \cup \{b\}$, так что $|\partial[a,b] = 0$, т. е. отрезок $[a,b]$ измерим по Жордану, причем (см. пример 1 из § 1 этой главы)

$$|[a,b]| = \int_a^b X_{[a,b]}(x)dx = \int_a^b 1dx = b - a.$$

Но тогда $[a,b] \setminus A_i = \mathrm{C}A_i \cap [a,b] \subset [a,b]$, $(\partial([a,b] \setminus A_i) \subset \partial \mathrm{C}A_i \cup \partial[a,b])$ $\Rightarrow (|\partial([a,b] \setminus A_i)| = 0)$, т. е. множество $[a,b] \setminus A$ измеримо по Жордану. (Заметим, что множество $\mathrm{C}A_i$ не ограничено, а потому и не измеримо по Жордану, хотя $\operatorname{mes} \partial \mathrm{C}A_i = |\partial \mathrm{C}A| = 0$.)

4) $(A_1, A_2 \in [a,b]) \Rightarrow (A_1 \setminus A_2 \subset [a,b])$, причем $A_1 \setminus A_2 = \mathrm{C}A_2 \cap A_1$. В силу измеримости множеств A_1, A_2 $\operatorname{mes} \partial A_i = |\partial A_i| = 0$ $(i = 1,2)$. Поскольку $\partial(A_1 \setminus A_2) \subset \partial \mathrm{C}A_2 \cup \partial A_1 = \partial A_2 \cup \partial A_1$, то $\operatorname{mes} \partial(A_1 \setminus A_2) = |\partial(A_1 \setminus A_2)| = 0$, т. е. множество $A_1 \setminus A_2 \subset [a,b]$ (а также $A_2 \setminus A_1 \subset [a,b]$) измеримо по Жордану.

Следствие. Пусть множества $A_i \subset [a,b]$ $(i = 1,2,\dots,m)$ измеримы по Жордану. Тогда множества $\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{m} A_i$ также измеримы по Жордану.

Замечание. Приведенное следствие не распространяется на счетные объединения множеств, измеримых по Жордану, например, множество $Q = \mathbf{Q} \cap [0,1]$ не измеримо по Жордану, хотя $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \{q_k\}$, где $Q = \{q_k; k = 1,2,\dots\}$ и каждое множество $\{q_k\}$ (точка) измеримо по Жордану: $|\{q_k\}| = 0$.

Теорема. *Система σ всех множеств A отрезка $[a,b]$, измеримых по Жордану, образует алгебру, т. е. выполнены условия: а) $[a,b] \in \sigma$; б) $(\forall A_1, A_2 \in \sigma) \Rightarrow (A_1 \cup A_2,\ A_1 \cap A_2 \in \sigma)$; в) $(\forall A \in \sigma) \Rightarrow (\mathrm{C}A \cap [a,b] = [a,b] \setminus A \in \sigma)$.*

§ 6. Свойства интеграла Римана

Определение. *Непустое множество $\mathcal{F}$ называется (коммутативным) кольцом, если на $\mathcal{F}$ определены две бинарные операции – сложение и умножение, обе коммутативные и ассоциативные, а также связанные законом дистрибутивности, причем сложение обладает обратной операцией – вычитанием.*

Рассмотрим класс $R[a,b]$ и введем в нем бинарные операции сложения и умножения следующим образом:

$$\forall f, g \in R[a,b]\ (f+g)(x) = f(x) + g(x);$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)\ \forall x \in [a,b],$$

так что $\varphi(x) = 0\ \forall x \in [a,b]$ есть «нуль» в $R[a,b]$, а $e(x) = 1\ \forall x \in [a,b]$ есть «единица» в $R[a,b]$.

Теорема. *Класс $R[a,b]$ есть (коммутативное) кольцо функций с обычными действиями сложения и умножения.*

Эта теорема вытекает из нижеследующих теорем 1 и 2.

Теорема 1. *Если $f_j \in R[a,b]$ и c_j – постоянные $(j = 1,2,\dots,m)$, то $\sum\limits_{j=1}^{m} c_j f_j \in R[a,b]$, причем*

$$\int_a^b \sum_{j=1}^m c_j f_j(x)dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f_j(x)dx.$$

Доказательство. Пусть $f_j \in R[a,b]$ $(j = 1,2,\ldots,m)$ и $h(x) = \sum\limits_{j=1}^m c_j f_j(x)$. Тогда для любого размеченного разбиения $T\xi$ отрезка $[a,b]$ имеем представление

$$S_h(T\xi) = \sum_{k=1}^n h(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m c_j f_j(\xi_k)\right)\Delta x_k =$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j \left(\sum_{k=1}^n f_j(\xi_k)\Delta x_k\right) = \sum_{j=1}^m c_j S_{f_j}(T\xi),$$

откуда в силу теоремы о «пределе суммы» получаем

$$\exists \lim_{d(T)\to 0} S_h(T\xi) = \lim_{d(T)\to 0} \sum_{j=1}^m c_j S_{f_j}(T\xi) =$$

$$= \sum_{j=1}^m c_j \cdot \lim_{d(T)\to 0} S_{f_j}(T\xi) \Rightarrow h \in R[a,b],$$

причем

$$\int_a^b \sum_{j=1}^m c_j f_j(x)dx = \sum_{j=1}^m c_j \int_a^b f_j(x)dx.$$

Следствие. Если множества $A, B \subset [a,b]$ измеримы по Жордану и $A \cap B = \varnothing$, то множество $A \cup B$ измеримо по Жордану и $|A \cup B| = |A| + |B|$.

В самом деле, как показано в § 5 этой главы, система всех множеств отрезка $[a,b]$, измеримых по Жордану, есть алгебра σ, поэтому $(A, B \in \sigma) \Rightarrow (A \cup B \in \sigma)$ и, в частности, X_A, X_B, $X_{A\cup B} \in R[a,b]$. Поскольку $A \cap B = \varnothing$, то $X_{A\cup B}(x) = X_A(x) + X_B(x)$ $\forall x \in [a,b]$, и тогда по теореме 1 получаем

$$|A \cup B| = \int_a^b X_{A\cup B}(x)dx = \int_a^b (X_A(x) + X_B(x))dx =$$

$$= \int_a^b X_A(x)dx + \int_a^b X_B(x)dx = |A| + |B|.$$

Т е о р е м а 2. $(f, g \in R[a,b]) \Rightarrow (f \cdot g \in R[a,b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f, g \in R[a,b]) \Rightarrow (f, g \in B[a,b]) \Rightarrow (f \cdot g \in B[a,b])$.

Пусть E_f, E_g и E_{fg} – множества точек разрыва функций $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \cdot g(x)$ соответственно, тогда имеем

$$E_{f \cdot g} \subset E_f \cdot E_g. \tag{6.1}$$

В самом деле, поскольку $|f(x)| \leq M_f$, $|g(x)| \leq M_g$ $\forall x \in [a,b]$, то $\forall x, y \in [a,b]$ имеем

$$|f(x)g(x) - f(y)g(y)| = |f(x) \cdot (g(x) - g(y)) + g(y) \cdot (f(x) - f(y))| \leq$$

$$\leq |f(x)| \cdot |g(x) - g(y)| + |g(y)| \cdot |f(x) - f(y)|,$$

т. е. $\forall \delta > 0$ и $\forall x \in [a,b]$ получаем оценку $\omega(f \cdot g;\ U_\delta(x)) \leq M_f \omega(g; U_\delta(x)) + M_g \omega(f; U_\delta(x))$, откуда, переходя к пределу при $\delta \to 0$, имеем $0 \leq \omega(f \cdot g; x) \leq M_f \omega(g; x) + M_g \omega(f; x)$ $\forall x \in [a,b]$, т. е. имеет место (6.1).

В силу критерия Лебега интегрируемости по Риману имеем

$$(f, g \in R[a,b]) \Rightarrow (\text{mes } E_f = \text{mes } E_g = 0),$$

но тогда из (6.1) получаем mes $E_{f \cdot g} = 0$ и вновь, применяя критерий Лебега, имеем $f \cdot g \in R[a,b]$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $\exists p > 0$ *такое, что* $|f(x)| \geq p > 0$ $\forall x \in [a,b]$. *Тогда* $1/f \in R[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \in B[a,b])$, но тогда из условия $|1/f(x)| \leq 1/p$ $\forall x \in [a,b]$ имеем $1/f \in B[a,b]$. Далее, $\forall x, y \in [a,b]$ имеем $|1/f(x) - 1/f(y)| = |f(x) - f(y)|/(|f(x)| \cdot |f(y)|) \leq |f(x) - f(y)|/p^2$, откуда $\forall \delta > 0$ и $\forall x \in [a,b]$ имеем

$$\left(\omega(1/f; U_\delta(x)) \leq \frac{1}{p^2}\omega(f; U_\delta(x))\right) \Rightarrow \left(\omega(1/f; x) \leq \frac{1}{p^2}\omega(f; x)\right).$$

Пусть E_f и $E_{1/f}$ – множества точек разрыва функций $f(x)$ и $1/f(x)$ соответственно. Тогда из нашей оценки вытекает $E_{1/f} \subset E_f$. Применение критерия Лебега интегрируемости по Риману дает $(f \in R[a,b])$ $\Rightarrow$ $(\text{mes } E_f = 0) \Rightarrow (\text{mes } E_{1/f} = 0) \Rightarrow (1/f \in R[a,b])$.

С л е д с т в и е. Пусть $f, g \in R[a,b]$ и $\exists p > 0$ такое, что $|g(x)| \leq p > 0$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда $f/g \in R[a,b]$.

Т е о р е м а 4. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (|f| \in R[a,b])$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \in B[a,b]) \Rightarrow (|f| \in B[a,b])$. Но $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ $\forall x, y \in [a,b]$, т. е. $\forall \delta > 0$ и $\forall x \in [a,b]$ имеем оценку $\omega(|f|; U_\delta(x)) \leq \omega(f; U_\delta(x)) \Rightarrow (\omega(|f|; x) \leq \omega(f; x))$.

Пусть E_f и $E_{|f|}$ – множества точек разрыва функций $f(x)$ и $|f(x)|$ соответственно. Тогда из нашей оценки имеем $E_{|f|} \subset E_f$, и применение критерия Лебега интегрируемости по Риману дает $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (\text{mes } E_f = 0) \Rightarrow (\text{mes } E_{|f|} = 0) \Rightarrow (|f| \in R[a,b])$.

З а м е ч а н и е. Из $|f| \in R[a,b]$, вообще говоря, не следует, что $f \in R[a,b]$. Например, $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 1, & x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$ Тогда $|f(x)| \equiv 1 \in R[a,b]$, но $f \overline{\in} R[a,b]$.

До сих пор предполагалось, что $a < b$.

О п р е д е л е н и е. *При* $a = b$ *положим* $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$, *при* $a > b$ *положим* $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$, *если один из интегралов существует.*

Т е о р е м а 5. *Пусть* $f(x)$ *определена на* $[a,b]$ *и* $a < c < b$. *Если* $f \in R[a,c]$ *и* $f \in R[c,b]$, *то* $f \in R[a,b]$, *причем* $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f \in R[a,c] \wedge R[c,b]) \Rightarrow (f \in B[a,c] \wedge B[c,b]) \Rightarrow (f \in B[a,b])$. Поскольку $f \in R[a,c]$, то для множества всех точек разрыва функции f на $[a,c]$ $E_f[a,c] = \{x \in [a,c] | \omega(f;x) > 0\}$ в силу критерия Лебега интегрируемости по Риману имеем $\text{mes } E_f[a,c] = 0$. Аналогично $(f \in R[c,b]) \Rightarrow (\text{mes } E_f[c,b] = 0)$. Но поскольку $E_f[a,b] \subset E_f[a,c] \cup E_f[c,b] \cup \{c\}$, то $\text{mes } E_f[a,b] = 0$, и в силу того же критерия Лебега интегрируемости функции по Риману имеем $f \in R[a,b]$, так что $\exists \int\limits_a^b f(x)dx = \mathcal{J}$.

Рассмотрим любое разбиение T отрезка $[a,b]$, содержащее точку c. Тогда $T = \{T_1, T_2\}$, где $T_1 = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = c\}$ есть разбиение отрезка $[a,c]$, $T_2 = \{c = x_k < x_{k+1} < \ldots < x_n = b\}$ есть разбиение отрезка $[c,b]$. В силу следствия 2 из теоремы 2 § 2 имеем оценки $\overline{S}_{[a,c]}(T_1) + \overline{S}_{[c,b]}(T_2) = \overline{S}_{[a,b]}(\overline{T}) \geq \overline{J} = J = \underline{J} \geq \underline{S}_{[a,b]}(T) = \underline{S}_{[a,c]}(T_1) + \underline{S}_{[c,b]}(T_2)$, т. е. $\overline{S}_{[a,c]}(T_1) + \overline{S}_{[c,b]}(T_2) \geq J \geq \underline{S}_{[a,c]}(T_1) + \underline{S}_{[c,b]}(T_2)$, откуда

$$\left(\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \inf_{\{T_1,T_2\}} (\overline{S}(T_1) + \overline{S}(T_2)) =\right.$$

$$= \inf_{T_1} \overline{S}_{[a,c]}(T_1) + \inf_{T_2} \overline{S}_{[c,b]}(T_2) \geq J \geq$$

$$\geq \sup_{T_1} \underline{S}_{[a,c]}(T_1) + \sup_{T_2} \underline{S}_{[c,b]}(T_2) = \sup_{\{T_1,T_2\}} |\underline{S}(T_1) + \underline{S}(T_2)| =$$

$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Bigg) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int_a^b f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} J = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right).$$

Следствие. Полагая $\int_a^b f(x)dx = J[a,b]$, имеем при $a < c < b$: $J[a,b] = J[a,c] + J[c,b]$, т. е. интеграл Римана есть аддитивная функция отрезков.

Теорема 6. *Пусть* $a \le \alpha < \beta \le b$ *и* $f \in R[a,b]$. *Тогда* $f \in R[\alpha,\beta]$.

Доказательство. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \in B[a,b]) \Rightarrow (f \in B[\alpha,\beta])$. В силу необходимости критерия Лебега $(f \in R[a,b]) \Rightarrow$ (множество $E[a,b] = \{x \in [a,b] | \omega(f;x) > 0\}$ всех точек разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ имеет меру нуль, т. е. $\operatorname{mes} E[a,b] = 0$). Но $([\alpha,\beta] \subset [a,b]) \Rightarrow (E[\alpha,\beta] \subset E[a,b])$, поэтому множество $E[\alpha,\beta]$ всех точек разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[\alpha,\beta]$ также имеет меру нуль, т. е. $\operatorname{mes} E[\alpha,\beta] = 0$, а потому в силу достаточности критерия Лебега имеем $f \in R[\alpha,\beta]$.

Следствие. Пусть $a < c < b$ и $f \in R[a,b]$, тогда $f \in R[a,c] \wedge R[c,b]$ и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема 7. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $m \le f(x) \le M \ \forall x \in [a,b]$. *Тогда при* $a < b$ *имеет место* $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

Доказательство. Для любого размеченного разбиения $T\xi$ отрезка $[a,b]$ в силу неравенств $m \le f(\xi_k) \le M \ \forall k$ имеем $m(b-a) \le S_f(T\xi) \le M(b-a)$, и поскольку $f \in R[a,b]$, то $\exists \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = \int_a^b f(x)dx$, причем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

Теорема 8. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $f(x) \ge 0 \ \forall x \in [a,b]$. *Тогда* $\int_a^b f(x)dx \ge 0$. Теорема 8 следует из теоремы 7.

Следствие (интегрирование неравенств). Пусть $f, g \in R[a,b]$ и $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx$.

Следствие (монотонность «меры Жордана»). Если множества $A, B \subset \mathbf{R}$ измеримы по Жордану, то $(A \subset B) \Rightarrow (|A| \le |B|)$.

В самом деле, $(A \subset B) \Rightarrow (X_A(x) \le X_B(x)\ \forall x \in (-\infty, +\infty))$.

Из измеримости множеств A и B по Жордану в силу критерия измеримости по Жордану видим, что существует отрезок $[a,b] \supset B \supset A$ и $X_A, X_B \in R[a,b]$, но тогда по теореме об интегрировании неравенств имеем $|A| = \int\limits_a^b X_A(x)dx \le \int\limits_a^b X_B(x)dx = |B|$.

Следствие. Пусть $f \in R[a,b]$. Тогда имеет место оценка $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Доказательство. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (|f| \in R[a,b])$. Из неравенств $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|\ \forall x \in [a,b]$ в силу теоремы об интегрировании неравенств имеем оценки $-\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, откуда $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

Следствие. Пусть $f \in R[a,b]$ и $|f(x)| \le L\ \forall x \in [a,b]$. Тогда $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le L(b-a)$.

Теорема 9. *Если $f \in R[a,b]$, то множество всех точек непрерывности функции $f(x)$ всюду плотно на отрезке $[a,b]$.*

Доказательство. Пользуясь критерием непрерывности Бэра, достаточно доказать, что на любом отрезке $[\alpha,\beta] \subset [a,b]\ \exists$ точка $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ такая, что $\omega(f;x_0) = 0$.

Допустим от противного, что $\exists [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ такой, что $\omega(f;x) > 0\ \forall x \in [\alpha,\beta]$. Тогда $[\alpha,\beta] \subset E$, где E – множество точек разрыва $f(x)$ на $[a,b]$. Но $f \in R[a,b]$ и в силу необходимости критерия Лебега интегрируемости по Риману $\operatorname{mes} E = 0$, и поэтому отрезок $[\alpha,\beta] \subset E$ также должен иметь меру нуль, а в силу компактности и длину нуль. Но отрезок не может иметь длину нуль. Противоречие.

Лемма. *Пусть $f \in R[a,b]$ и $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b]$, причем существует точка $x_0 \in [a,b]$ такая, что $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$. Тогда* $\int\limits_a^b f(x)dx > 0$.

Доказательство. Поскольку $f \in C(x_0)$ и $f(x_0) > 0$, то в силу локальных свойств непрерывных функций существует такой отрезок $[\alpha,\beta]$, что $x_0 \in [\alpha,\beta] \subset [a,b]$ и $f(x) \ge 1/2 \cdot f(x_0) > 0\ \forall x \in [\alpha,\beta]$.

Но $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \in R[a,\alpha],\ f \in R[\alpha,\beta],\ f \in R[\beta,b])$. В силу аддитивности интеграла Римана и теоремы 8 имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\beta^b f(x)dx \geq$$

$$\geq 1/2 \cdot f(x_0)(\beta - \alpha) > 0.$$

Т е о р е м а 10. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $f(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$. *Тогда* $\int_a^b f(x)dx > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме 9 $\exists x_0 \in [a,b]$ такая, что $f \in C(x_0)$, $f(x_0) > 0$, $f(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$, но тогда оценка теоремы 10 вытекает из нашей леммы.

Т е о р е м а 11. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$. *Тогда* $\left(\int_a^b f(x)dx = 0\right) \Rightarrow (\text{mes}\ \mathcal{E} = 0$, *где* $\mathcal{E} = \{x \in [a,b] | f(x) > 0\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим множество E – множество всех точек разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$ и покажем, что $\mathcal{E} \subset E$. Допустим от противного, что $\exists x_0 \in \mathcal{E}$ такая, что $f \in C(x_0)$, тогда $f(x_0) > 0$ и по лемме $\int_a^b f(x)dx > 0$ вопреки предположению теоремы.

Итак, $\mathcal{E} \subset E$. Но в силу необходимости критерия Лебега $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (\text{mes}\ E = 0) \Rightarrow (\text{mes}\ \mathcal{E} = 0)$.

Т е о р е м а 12. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $\mathcal{E} = \{x \in [a,b] | f(x) \neq 0\}$. *Тогда* $(\text{mes}\ \mathcal{E} = 0) \Rightarrow \left(\int_a^b f(x)dx = 0\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (|f| \in R[a,b]) \Rightarrow \mathcal{E} = \{x \in [a,b] | |f(x)| > 0\}$. Поскольку $|f(x)| \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $\underline{S}_{|f|}(T) \geq 0$. Докажем, что на самом деле $\underline{S}_{|f|}(T) = 0\ \forall T$. Допустим от противного, что существует разбиение T_0 отрезка $[a,b]$ такое, что $S_{|f|}(T_0) > 0$. Тогда в разбиении T_0 существует такой частичный отрезок I_{k_0} длины $\delta > 0$, что $\inf\limits_{I_{k_0}} |f(x)| > 0$. Но тогда $(|f(x)| > 0\ \forall x \in I_{k_0}) \Rightarrow (I_{k_0} \subset \mathcal{E})$, так что $\mathcal{E} \neq \varnothing$. Но по условию $\text{mes}\ \mathcal{E} = 0$, поэтому, как было доказано ранее, $\overset{\circ}{\mathcal{E}} = \varnothing$. Противоречие.

Итак, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем $\underline{S}_{|f|}(T) = 0$, откуда $\underline{J} = \sup\limits_T \underline{S}_{|f|}(T) = 0$. Но $|f| \in R[a,b]$, поэтому $\int_a^b |f(x)|dx = \underline{J} = 0$, и поскольку

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx = 0,$$

то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$.

Следствие. Если $f, g \in R[a,b]$, $\mathcal{E} = \{x \in [a,b] | f(x) \neq g(x)\}$, то $(\text{mes } \mathcal{E} = 0) \Rightarrow \left(\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b g(x)dx\right)$.

Лемма. *Пусть* $A_1, A_2 \subset (-\infty, +\infty)$, *тогда*

$$X_{A_1 \cup A_2}(x) = X_{A_1}(x) + X_{A_2}(x) - X_{A_1 \cap A_2}(x) \; \forall x \in (-\infty, +\infty) \qquad (6.2)$$

Доказательство. Пусть $x_0 \overline{\in} A_1 \cup A_2$, тогда $x_0 \overline{\in} A_i$ $(i = 1, 2)$ и $x_0 \overline{\in} A_1 \cap A_2$, т. е.

$$X_{A_1 \cup A_2}(x_0) = X_{A_1}(x_0) = X_{A_2}(x_0) = X_{A_1 \cap A_2}(x_0) = 0,$$

так что соотношение (6.2) имеет место при $x \overline{\in} A_1 \cup A_2$.

Пусть $x_0 \in A_1 \cup A_2$, тогда $X_{A_1 \cup A_2}(x_0) = 1$, причем возможны случаи:

а) $x_0 \in A_1$, но $x_0 \overline{\in} A_2$ (или $x_0 \in A_2$, но $x_0 \overline{\in} A_1$). Тогда $X_{A_1}(x_0) = 1$, $X_{A_2}(x_0) = X_{A_1 \cap A_2}(x_0) = 0$ (или $X_{A_2}(x_0) = 1$, $X_{A_1}(x_0) = X_{A_1 \cap A_2}(x_0) = 0$), т. е. (6.2) имеет место и в случае а).

б) $x_0 \in A_1 \cap A_2$. Но тогда $X_{A_1}(x_0) = X_{A_2}(x_0) = X_{A_1 \cap A_2}(x_0) = 1$, т. е. (6.2) имеет место и в случае б).

Следствие 1. Пусть множества $A_1, A_2 \subset [a,b]$ измеримы по Жордану, тогда измеримы по Жордану множества $A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$, причем $|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2|$ и, в частности, $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|$.

Доказательство. Поскольку множества, измеримые по Жордану на отрезке $[a,b]$, образуют алгебру, то из измеримости по Жордану A_1, A_2 следует, что множества $A_1 \cup A_2$ и $A_1 \cap A_2$ также измеримы по Жордану. В силу критерия измеримости по Жордану имеем тогда $X_{A_1}, X_{A_2}, X_{A_1 \cup A_2}, X_{A_1 \cap A_2} \in R[a,b]$, откуда по теореме 1 $X_{A_1 \cup A_2} + X_{A_1 \cap A_2}$, $X_{A_1} + X_{A_2} \in R[a,b]$, причем

$$|A_1 \cup A_2| + |A_1 \cap A_2| = \int\limits_a^b X_{A_1 \cup A_2}(x)dx + \int\limits_a^b X_{A_1 \cap A_2}(x)dx =$$

$$= \int\limits_a^b (X_{A_1 \cup A_2}(x) + X_{A_1 \cap A_2}(x))dx = \int\limits_a^b (X_{A_1}(x) + X_{A_2}(x))dx =$$

$$= \int\limits_a^b X_{A_1}(x)dx + \int\limits_a^b X_{A_1}(x)dx = |A_1| + |A_2|.$$

Поскольку $X_{A_1 \cap A_2}(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, то $(|A_1 \cap A_2| \geq 0) \Rightarrow (|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2|)$.

Следствие 2. Пусть множества $A_l \subset [a,b]$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ измеримы по Жордану. Тогда множество $\bigcup\limits_{l=1}^{m} A_l$ также измеримо по Жордану, причем

$$|\bigcup_{l=1}^{m} A_l| \leq \sum_{l=1}^{m} |A_l|.$$

Следствие 3 (усиленная аддитивность меры Жордана). Пусть множества $A_1, A_2 \subset [a,b]$ измеримы по Жордану и $|A_1 \cap A_2| = 0$. Тогда множество $A_1 \cup A_2$ измеримо по Жордану, причем $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$.

В самом деле, в силу следствия 1 имеем $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$, откуда $(|A_1 \cap A_2| = 0) \Rightarrow (|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|)$.

Следствие 4. Пусть множества $A_j \subset [a,b]$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ измеримы по Жордану, причем $|A_j \cap A_k| = 0 \ \forall j \neq k$. Тогда $|\bigcup\limits_{j=1}^{m} A_j| = \sum\limits_{j=1}^{m} |A_j|$.

Следствие 5 (свойства меры Жордана). Пусть на отрезке $[a,b]$ рассмотрена система σ множеств $\{A\}$, измеримых по Жордану (т. е. таких, что $\operatorname{mes} \partial A = 0 \ \forall A \in \sigma$). Тогда на системе σ, образующей алгебру (множеств), определена неотрицательная функция «мера Жордана»; $\mu : A \to |A| = \int\limits_a^b X_A(x)dx \geq 0$, обладающая свойствами:

1) $|A| \geq 0 \ \forall A \in \sigma$;

2) $|A_1 \cup A_2| \leq |A_1| + |A_2| \ \forall A_1, A_2 \in \sigma$;

3) $\forall A_1, A_2 \in \sigma$ таких, что $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ (или $|A_1 \cap A_2| = 0$) $\Rightarrow |A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2|$;

4) если $[\alpha, \beta] \subset [a,b]$, то $|[\alpha, \beta]| = \beta - \alpha$.

Заметим, что свойства 2) и 3) выражают конечную аддитивность меры Жордана. Заметим также, что мера Жордана не обладает свойством счетной аддитивности.

Теорема (1-я обобщенная теорема о среднем). *Пусть* $g \in R[a,b]$ *и* $g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$. *Пусть* $f \in B[a,b]$ *и* $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. *Пусть* $f \cdot g \in R[a,b]$. *Тогда существует число* μ *такое, что* $m \leq \mu \leq M$, *причем* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int\limits_a^b g(x)dx$.

Если $f \in C[a,b]$, *то* $\exists c \in [a,b]$ *такая, что* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx =$

$f(c)\int\limits_a^b g(x)dx$.

Доказательство. Поскольку $g(x) \geq 0\ \forall x \in [a,b]$, то $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)\ \forall x \in [a,b]$. Но $g,\ f \cdot g \in R[a,b]$, поэтому, применяя теорему об интегрировании неравенств, имеем

$$m\int\limits_a^b g(x)dx \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если $\int\limits_a^b g(x)dx = 0$, то при любом $\mu \in [m,M]$ имеем

$$0 = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx.$$

Если же $\int\limits_a^b g(x)dx > 0$, то $m \leq \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int\limits_a^b g(x)dx \leq M$, т. е. существует число $\mu = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx \Big/ \int\limits_a^b g(x)dx$, удовлетворяющее условию $m \leq \mu \leq M$ и такое, что $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \mu\int\limits_a^b g(x)dx$.

Если $f \in C([a,b])$, то в силу теоремы Вейерштрасса (о максимуме и минимуме) существуют точки $x_1, x_2 \in [a,b]$ такие, что $f(x_1) = M$ и $f(x_2) = m$. Поскольку $m \leq \mu \leq M$, то в силу теоремы Больцано о промежуточных значениях функции, непрерывной на отрезке, существует точка $c \in [a,b]$ такая, что $f(c) = \mu$, и тогда $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int\limits_a^b g(x)dx$.

1-я теорема о среднем. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $m = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$, $M = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$. *Тогда существует число* $\mu \in [m,M]$ *такое, что* $\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$, *если же при этом* $f \in C([a,b])$, *то существует точка* $c \in [a,b]$ *такая, что* $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Замечание. Если $f \in C([a,b])$, то можно считать, что $\exists c_0 \in (a,b)$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c_0)(b-a).$$

О п р е д е л е н и е. *Если функция* $g(x)$ *определена на* $[a,b]$ *и существуют постоянные* $K>0$ *и* $\alpha\in(0,1]$ *такие, что* $|g(x_1)-g(x_2)|\le K|x_1-x_2|^\alpha\ \forall x_1,x_2\in[a,b]$, *то говорят, что функция* $g(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a,b]$ *условию Гельдера с показателем* α *и постоянной* K. Запись: $g\in H_\alpha[a,b]$. *При* $\alpha=1$ *говорят, что функция* $g(x)$ *удовлетворяет на отрезке* $[a,b]$ *условию Липшица:* $g\in \mathrm{Lip}[a,b]\equiv H_1[a,b]$.

З а м е ч а н и е. $(g\in H_\alpha[a,b])\Rightarrow(g\in C[a,b])$. В самом деле, $\forall x_0\in[a,b]$ и $\forall\Delta x\ (a\le x_0+\Delta x\le b)\ (g\in H_\alpha[a,b])\Rightarrow(|g(x_0+\Delta x)-g(x_0)|\le K|\Delta x|^\alpha)\Rightarrow(\exists\lim\limits_{\Delta x\to0}g(x_0+\Delta x)=g(x_0))\Rightarrow(g\in C(x_0)\ \forall x_0\in[a,b])\Rightarrow(g\in C[a,b])$.

З а м е ч а н и е. Если $g\in H_\alpha[a,b]$ при $\alpha>1$, то $g(x)\equiv\mathrm{const}$ на $[a,b]$.

В самом деле, $\forall\Delta x\ne0$ имеем $\forall x,\ x+\Delta x\in[a,b]\ (0\le|g(x+\Delta x)-g(x)|/|\Delta x|\le K|\Delta x|^{\alpha-1}$, где $\alpha-1>0)\Rightarrow(\exists\lim\limits_{\Delta x\to0}(g(x+\Delta x)-g(x))/\Delta x=0)\Rightarrow(\mathrm{D}\,g(x)=0\ \forall x\in[a,b])\Rightarrow(g(x)\equiv\mathrm{const}$ на $[a,b])$.

Пусть $f\in R[a,b]$, тогда $f\in R[a,x]\ \forall x\in[a,b]$, и поэтому имеет смысл функция $\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$, причем $\Phi(a)=\int\limits_a^a f(t)dt=0$.

Т е о р е м а (о непрерывности определенного интеграла Римана как функции верхнего предела). $(f\in R[a,b])\Rightarrow(\Phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt\in C([a,b]))$ *(точнее,* $\Phi\in H_1[a,b]$*)*.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\forall x,\ x+\Delta x\in[a,b]$ имеем в силу аддитивности интеграла Римана $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int\limits_a^{x+\Delta x}f(t)dt-\int\limits_a^x f(t)dt=\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)dt$ (при $\Delta x>0$) и $\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=-\int\limits_{x+\Delta x}^x f(t)dt$ (при $\Delta x<0$). Но $(f\in R[a,b])\Rightarrow(f\in B[a,b])\Rightarrow(M=\sup\limits_{[a,b]}|f(x)|<+\infty)$, поэтому

$$|\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)|\le\left|\int\limits_x^{x+\Delta x}f(t)dt\right|\le M|\Delta x|,$$

т. е. $\Phi\in H_1[a,b]$, откуда $\Phi\in C([a,b])$.

Л е м м а (тождество Абеля). *Пусть даны последовательности* (α_k), (a_k), (G_k), *где* $a_k=G_k-G_{k-1}$. *Тогда при* $m>n$ *имеет место тождество Абеля*

$$\sum_{k=n}^m a_k\alpha_k=\sum_{k=n}^{m-1}G_k(\alpha_k-\alpha_{k+1})+G_m\alpha_m-G_{n-1}\alpha_n$$

и, в частности, тождество Абеля при $G_k \equiv s_k = \sum_{l=1}^{k} a_l$, $a_k = s_k - s_{k-1}$, $s_0 = 0$ *имеет вид*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \alpha_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + s_n \alpha_n.$$

Доказательство. Полагая $a_k = G_k - G_{k-1}$, имеем

$$\sum_{k=n}^{m} a_k \alpha_k = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k (G_k - G_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k G_k - \sum_{k=n}^{m} \alpha_k G_{k-1} =$$

$$= \sum_{k=n}^{m} \alpha_k G_k - \sum_{l=n-1}^{m-1} \alpha_{l+1} G_l = \sum_{l=n}^{m-1} G_l(\alpha_l - \alpha_{l+1}) + G_m \alpha_m - G_{n-1}\alpha_n.$$

Замечание. Итак, имеем тождества Абеля ($m > n$)

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k (G_k - G_{k-1}) = \sum_{k=n}^{m-1} G_k(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + G_m \alpha_m - G_{n-1}\alpha_n$$

и

$$\sum_{k=n}^{m} \alpha_k (G_{k-1} - G_k) \equiv \sum_{k=n}^{m} (-\alpha_k)(G_k - G_{k-1}) =$$

$$= \sum_{k=n}^{m-1} G_k(\alpha_{k+1} - \alpha_k) - G_m \alpha_m + G_{n-1}\alpha_n.$$

Следствие. Если $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \ldots \geq \alpha_n \geq 0$ и существуют постоянные m, M такие, что $m \leq G_l \leq M$ $(l = 1, 2, \ldots, n)$, то при $G_0 = 0$ имеем оценку

$$\alpha_1 m \leq \sum_{k=1}^{n} (G_k - G_{k-1})\alpha_k \leq \alpha_1 M.$$

Аналогично если $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$, то при $G_n = 0$ имеем оценку

$$\alpha_n m \leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (G_{k-1} - G_k) \leq \alpha_n M.$$

В самом деле, в силу тождества Абеля при $n = 1$ и $m = n$ имеем

$$\sum_{k=1}^{n} (G_k - G_{k-1})\alpha_k = \sum_{k=1}^{n} G_k(\alpha_k - \alpha_{k-1}) + G_n \alpha_n - G_0 \alpha_1,$$

откуда, поскольку $G_0 = 0$, $m \le G_k \le M$ и $\alpha_k - \alpha_{k+1} \ge 0$, имеем

$$m\alpha_1 = m\left(\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_n\right) \le \sum_{k=1}^{n}(G_k - G_{k-1})\alpha_k \le$$

$$\le M\left(\sum_{k=1}^{n-1}(\alpha_k - \alpha_{k+1}) + \alpha_n\right) = M\alpha_1.$$

2-я интегральная теорема о среднем. *Пусть* $f \in R[a,b]$ *и* $g \in M[a,b]$. *Тогда существует точка* $c \in [a,b]$ *такая, что*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $g(x) \downarrow$ на $[a,b]$ и $g(x) \ge 0$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда

$$(g \in M[a,b]) \Rightarrow (g \in R[a,b]),$$

$$(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \cdot g \in R[a,b]),$$

причем

$$\exists \lim_{d(T)\to 0} S_{f\cdot g}(T\xi) = J = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Рассмотрим специальное размеченное разбиение $T\xi^0$, где $\xi^0 = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}\}$, и положим

$$S_{fg}(T\xi^0) \equiv S_{fg}(T) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})f(x_{k-1})\Delta x_k.$$

Тогда $\exists \lim\limits_{t\to+0} S_{fg}(T) = \mathcal{J}$. Положим

$$m_k(f) \equiv m(f; I_k) \le M(f; I_k) \equiv M_k(f),$$

тогда при любом выборе $\mu_k \in [m_k(f), M_k(f)]$ имеем

$$|f(x_{k-1}) - \mu_k| \le \omega(f; I_k) \equiv \omega_k(f).$$

Положим $S_{\mu g}(T) = \sum\limits_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\mu_k\Delta x_k$. Тогда поскольку $0 \le g(x) \le g(a)$ $\forall x \in [a,b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем оценки

$$|S_{fg}(T) - S_{\mu g}(T)| \le \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})\omega_k(f)\Delta x_k \le g(a)\Omega_f(T).$$

Но $f \in R[a,b]$, и поэтому в силу предельного критерия интегрируемости по Риману имеем $\lim\limits_{t\to+0} \Omega_f(T) = 0$, так что

$$\exists \lim_{t\to+0} S_{\mu g}(T) = \lim_{t\to+0} S_{fg}(T) = J.$$

Поскольку $(f \in R[a,b]) \Rightarrow (f \in R[x_{k-1}, x_k])$, то в силу 1-й интегральной теоремы о среднем $\exists \mu_k \in [m_k(f), M_k(f)]$ такое, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx = \mu_k \Delta x_k,$$

и тогда при указанном выборе μ_k имеем

$$S_{\mu g}(T) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

Введем функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, $\Phi(a) = 0$. В силу теоремы о непрерывности интеграла Римана по верхнему пределу имеем $\Phi \in C([a,b])$ и, в частности, $\Phi \in B[a,b]$, так что

$$-\infty < m = \inf_{[a,b]} \Phi \le \Phi(x) \le \sup_{[a,b]} \Phi = M < +\infty.$$

Но тогда $\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt = \Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})$, причем $\Phi(x_0) \equiv \Phi(a) = 0$. Имеем

$$S_{\mu g}(T) = \sum_{k=1}^{n} g(x_{k-1})(\Phi(x_k) - \Phi(x_{k-1})).$$

Полагая $\alpha_k = g(x_{k-1})$, видим, что $g(a) = \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_n = g(x_{n-1}) \ge 0$. Полагая $\Phi(x_k) \equiv G_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и $\Phi(x_0) = G_0 = 0$, имеем в силу оценки $m \le G_k = \Phi(x_k) \le M$ и следствия к тождеству Абеля оценку $mg(a) \le S_{\mu g}(T) \le Mg(a)$ $\forall T$.

Переходя в ней к пределу по базе $t \to +0$, имеем

$$mg(a) \le \int_a^b f(x)g(x)dx \le Mg(a).$$

В случае $g(a) > 0$ имеем оценку

$$m \le \int_a^b f(x)g(x)dx/g(a) \le M.$$

Но $\Phi \in C([a,b])$, и поэтому в силу теоремы Вейерштрасса (о максимуме и минимуме непрерывной функции) $\exists c_{1,2} \in [a,b]$ такие, что $\Phi(c_1) = m \leq M = \Phi(c_2)$, и тогда по теореме Больцано о промежуточных значениях непрерывной функции $\exists c \in [a,b]$ такое, что $\Phi(c) = \int\limits_a^b f(x)g(x)dx/g(a)$, т. е. имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx. \tag{6.3}$$

В случае $g(a) = 0$ равенство (6.3) имеет место $\forall c \in [a,b]$.

Пусть теперь $g(x) \downarrow$ на $[a,b]$, причем $g(x)$ может иметь и отрицательные значения на $[a,b]$. Тогда для функции $h(x) = g(x) - g(b)$ имеем $h(x) \downarrow$ на $[a,b]$ и $h(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Тогда по доказанному выше (см. (6.3)) видим, что существует точка $c \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)h(x)dx = h(a)\int\limits_a^c f(x)dx \text{ или } \int\limits_a^b f(x)g(x)dx -$$

$$-g(b)\int\limits_a^b f(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx - g(b)\int\limits_a^c f(x)dx,$$

т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx + g(b)\left(\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^c f(x)dx\right),$$

откуда имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)dx, \tag{6.4}$$

что и доказывает 2-ю теорему о среднем в случае $g(x) \downarrow$ на $[a,b]$.

Если $g(x) \uparrow$ на $[a,b]$, то применяем 2-ю теорему о среднем в виде (6.4) к функции $(-g(x)) \downarrow$ на $[a,b]$.

Замечание 1. Пусть $f \in R[a,b]$, $g(x) \downarrow$ на $[a,b]$ и $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, тогда $\exists c \in [a,b]$ такая, что имеет место равенство (6.3).

Замечание 2. Пусть $f \in R[a,b]$, $g(x) \uparrow$ на $[a,b]$ и $g(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, тогда $\exists c \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b)\int\limits_a^b f(x)dx. \tag{6.5}$$

Для доказательства равенства (6.5) полагаем

$$S_{fg}(T)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)f(x_k)\Delta x_k, \text{ так что } S_{\mu g}(T)=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)\mu_k\Delta x_k \equiv$$

$$\equiv \sum_{k=1}^{n} g(x_k)\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx=\sum_{k=1}^{n} g(x_k)(G(x_{k-1})-G(x_k)),$$

где $G(x)=\int\limits_{x}^{b} f(t)dt$. Учитывая, что $G(x_n)\equiv G(b)=0$, $m\le G(x_k)\le M$ $(k=1,2,\dots,n)$ и $0\le g(x_k)\le g(b)$ $(k=1,2,\dots,n)$, и применяя следствие к тождеству Абеля, получаем оценки $mg(b)\le S_{\mu g}(T)\le Mg(b)$ и $mg(b)\le\int\limits_{a}^{b} f(x)g(x)dx\le Mg(b)$, после чего, учитывая, что $G(c)=\int\limits_{c}^{b} f(x)dx$, доказательство (6.5) завершается, как и при доказательстве основной 2-й теоремы о среднем.

Т е о р е м а (о дифференцируемости интеграла Римана по верхнему пределу). *Пусть* $f\in R[a,b]$ *и* $f\in C(x_0)$, *где* $x_0\in(a,b)$. *Тогда для функции* $\Phi(x)=\int\limits_{a}^{x} f(t)dt$ $\exists \mathrm{D}\Phi(x_0)=f(x_0)$.

З а м е ч а н и е. Если в теореме $f\in C(a)$ (соответственно $f\in C(b)$), то $\exists \mathrm{D}^{+}\Phi(a)=f(a)$ (соответственно $\exists \mathrm{D}^{-}\Phi(b)=f(b)$) (доказать самостоятельно).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f\in R[a,b]$, то функция $\Phi(x)$ существует $\forall x\in[a,b]$. Далее, $\forall\Delta x>0$ такого, что $x_0+\Delta x\in[a,b]$, имеем

$$\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0)=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt;\ f(x_0)\cdot\Delta x=\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(x_0)dt,$$

поэтому

$$(\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0))/\Delta x-f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x}(f(t)-f(x_0))dt.$$

Аналогично при $\Delta x<0$ $(x_0+\Delta x\in[a,b])$ имеем равенство

$$(\Phi(x_0+\Delta x)-\Phi(x_0))/\Delta x-f(x_0)=\frac{1}{\Delta x}\left(-\int\limits_{x_0+\Delta x}^{x_0}(f(t)-f(x_0))dt\right).$$

Но $f \in C(x_0)$, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall t \in [a,b]$, удовлетворяющего неравенству $|t - x_0| < \delta$, имеем $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Пусть $0 < |\Delta x| < \delta$, тогда $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall |t - x_0| \le |\Delta x|$, т. е.

$$|(\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0))/\Delta x - f(x_0)| \le$$

$$\le \frac{1}{|\Delta x|} \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t) - f(x_0)|dt \le \varepsilon/|\Delta x| \cdot \left| \int\limits_{x_0}^{x_0+\Delta x} 1dt \right| = \varepsilon,$$

откуда

$$(\exists \lim_{\Delta x \to 0} (\Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0))/\Delta x = f(x_0)) \Rightarrow (\exists \mathrm{D}\Phi(x_0) = f(x_0)).$$

Т е о р е м а (о существовании точной примитивной у непрерывной функции). *Пусть* $f \in C([a,b])$. *Тогда функция* $f(x)$ *имеет точную примитивную* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *на отрезке* $[a,b]$, *причем* $\Phi(a) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f \in C([a,b])) \Rightarrow (f \in R[a,b]) \Rightarrow (\Phi \in C([a,b]))$ и в силу предыдущей теоремы $\forall x \in (a,b)\ \exists \mathrm{D}\Phi(x) = f(x)$.

Т е о р е м а (о существовании первообразной у кусочно-непрерывной функции). *Пусть* $f \in B[a,b]$ *и* $f \in C(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus K_n$ *(где* K_n *– конечное множество). Тогда функция* $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ *является первообразной для функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a,b]$, *причем* $\Phi(a) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $f \in B[a,b]$, причем множество точек разрыва функции $f(x)$ на $[a,b]$ совпадает с K_n, т. е. конечно, поэтому $f \in R[a,b]$. Далее,

$$(f \in R[a,b]) \Rightarrow (\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \in C([a,b]) \text{ и } \Phi(a) = 0).$$

Наконец, из теоремы о дифференцируемости интеграла Римана по верхнему пределу видим, что $\forall x \in [a,b] \setminus K_n\ \exists \mathrm{D}\Phi(x) = f(x)$. Таким образом, функция $\Phi(x)$ является первообразной для $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Т е о р е м а (формула Ньютона – Лейбница для кусочно-непрерывной функций). *Пусть* $f \in B[a,b]$ *и* $f \in C(x)\ \forall x \in [a,b] \setminus K_n$ *(где* K_n *конечно). Пусть* $F(x) = \int f(x)dx$ *– неопределенный интеграл от функции* $f(x)$ *на* $[a,b]$. *Тогда* $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)\ \forall x \in [a,b]$, *и, в частности,* $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Доказательство. Из условий теоремы вытекает, что функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ является первообразной для $f(x)$ на $[a, b]$. Из теоремы об общем виде первообразной следует, что $F(x) = \Phi(x) + C$, где $F(x) = \int f(x)dx$, $x \in [a, b]$, но при $x = a$ $\Phi(a) = 0 \Rightarrow C = F(a)$, т. е. $\Phi(x) = F(x) - F(a)$ $\forall x \in [a, b]$.

Итак, $\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$, где $F(x)$ – любая первообразная функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Замечание. Формулу Ньютона – Лейбница записывают в виде

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \text{ где } F(x) = \int f(x)dx.$$

Пример.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) - \ln 1 = \ln(1+\sqrt{2}).$$

Замечание. Если функция $F(x)$ есть примитивная для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то из этого, вообще говоря, не следует, что $f \in R[a, b]$. Например, функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \sin x^{-2}, & x \neq 0 \end{cases}$$

есть точная примитивная на отрезке $[-1, 1]$ для функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin^{-2} - 2x^{-1} \cos x^{-2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

но $f \overline{\in} B[-1, 1]$, и поэтому $f \overline{\in} R[-1, 1]$.

Пример. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ функцию Римана.

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}, \\ 1/q \text{ при } x = p/q \text{ рациональном } (p/q - \text{несократимая дробь}, q \in \mathbf{N}). \end{cases}$$

Очевидно, $f \in B[a, b]$.

Докажем, что функция Римана непрерывна в любой иррациональной точке и имеет разрывы 1-го рода в любой рациональной точке. В самом деле, пусть $x_0 \in [a, b]$ фиксировано. $\forall \varepsilon > 0$ существует лишь конечное число $q \in \mathbf{N}$ таких, что $0 < q < 1/\varepsilon$, поэтому на отрезке $[a, b]$ имеется лишь конечное число рациональных точек p/q, для которых $f(p/q) = 1/q \geq \varepsilon$.

Но тогда $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что множество $\dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap [a,b]$ не содержит ни одной рациональной точки p/q, для которой $1/q \geq \varepsilon$, т. е. $0 \leq f(x) < \varepsilon \ \forall x \in \dot{U}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \cap [a,b]$. Тем самым доказано, что

$$\forall x_0 \in [a,b] \exists \lim_{x \to x_0 \pm 0} f(x) = f(x_0 \pm 0) = 0,$$

т. е. функция Римана может иметь разрывы только 1-го рода.

Поскольку $f(x_0) = 0$ для x_0 иррациональной, то $f \in C(x_0)$ $\forall x_0 \overline{\in} K_\infty = \mathbf{Q} \cap [a,b]$. В случае $x_0 = p/q \in K_\infty$ $f(x_0) = 1/q > 0$, т. е. $f \overline{\in} C(x_0)$ $\forall x_0 \in K_\infty$.

Итак, функция Римана ограничена и множество ее точек разрыва K_∞ счетно, а потому $\operatorname{mes} K_\infty = 0$. Но тогда в силу критерия Лебега $f \in R[a,b]$, причем в силу теоремы 12 § 6 гл. 2

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = 0 \ \forall x \in [a,b].$$

Заметим, что $\mathrm{D}\Phi(x) = 0 = f(x)$, $\forall x \overline{\in} K_\infty$ и $\mathrm{D}\Phi(x_0) = 0 \neq f(x_0)$ $\forall x_0 \in K_\infty$, где множество K_∞ не является конечным, поэтому $\Phi(x)$ не может быть первообразной функции Римана (в нашем определении).

Замечание. Если функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[a,b]$, т. е. $f \in C([a,b] \setminus K_n) \wedge B[a,b]$, то $f \in R[a,b]$ и функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ всегда есть ее первообразная.

Теорема (формула Ньютона – Лейбница). *Пусть функция $F \in C([a,b])$ и является первообразной для функции $f \in R[a,b]$. Тогда имеет место формула Ньютона – Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство. Пусть функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, тогда $F \in C([a,b])$ и существует множество $K_m = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ такое, что $\forall x \in (a,b) \setminus K_m$ $\exists \mathrm{D}F(x) = f(x)$. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ построим продолжение $\overline{T} \prec T$, добавив точки K_m, и пусть $\overline{T} = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Тогда по теореме Лагранжа о конечных приращениях существуют точки $\eta_i \in (x_{i-1}, x_i)$ такие, что $F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\eta_i)\Delta x_i$, и поэтому

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n (F(x_i) - F(x_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i = S_f(\overline{T}\eta).$$

Но $f \in R[a,b]$, и поскольку существует $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = \int\limits_a^b f(x)dx$, то в силу критерия Коши существования предела числовой функции по базе $(d(T) \to 0)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall T\xi$, $\overline{T}\eta \in B_\delta$, имеем $|S_f(T\xi) - S_f(\overline{T}\eta)| < \varepsilon$, и поскольку $S_f(\overline{T}\eta) = F(b) - F(a)$, то имеем $\lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = F(b) - F(a)$, т. е. $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Замечание. Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ будет при этом первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

В самом деле, если $F(x)$ – первообразная для $f \in R[a,b]$, то по доказанной теореме Ньютона – Лейбница $\Phi(x) = F(x) - F(a)$, т. е. функция $\Phi(x)$ также является первообразной для $f(x)$ на $[a,b]$.

Замечание. Если $f \in R[a,b]$ и $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ $\forall x \in [a,b]$, то $\Phi \in C([a,b])$ и имеет место равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = \Phi(b) - \Phi(a)$ (где $\Phi(a) = 0$).

Однако $\Phi(x)$, вообще говоря, не является первообразной для функции $f \in R[a,b]$, поскольку множество ее точек разрыва $\mathcal{E} = \{x \in [a,b] | \omega_f(x) > 0\}$ может не быть конечным (хотя бы в силу критерия Лебега $\operatorname{mes} \mathcal{E} = 0$). Так будет для функции Римана, введенной выше, для которой $\mathcal{E} = \mathbf{Q} \cap [a,b]$ счетно.

Теорема 1 (о замене переменной в определенном интеграле Римана). *Пусть* $f(x) \in C([A,B])$, $\varphi(t) \in C^{(1)}([\alpha,\beta])$, *причем* $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [A,B]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; $[a,b] \subset [A,B]$.

Тогда

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{D}\varphi(t)dt.$$

Доказательство. Поскольку $f \in C([A,B])$, то на отрезке $[A,B]$ для функции $f(x)$ существует точная примитивная $F(x)$ и в силу формулы Ньютона – Лейбница $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Далее, функция $(f \circ \varphi)\ \mathrm{D}\varphi \in C([\alpha,\beta])$ и поэтому также имеет точную примитивную, равную в силу теоремы о производной сложной функции $F[\varphi(t)]$. Но тогда, вновь применяя формулу Ньютона – Лейбница, имеем

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{D}\varphi(t)dt = F[\varphi(t)]|_\alpha^\beta = F(b) - F(a),$$

т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{D}\varphi(t)dt.$$

Т е о р е м а 2 (о замене переменной в интеграле Римана). *Пусть* $f \in R[a,b]$, $\varphi \in \mathcal{D}([\alpha,\beta])$ *и* $\mathrm{D}\varphi \in R[\alpha,\beta]$, *причем* $\varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b] = \varphi([\alpha,\beta])$ *есть строго монотонная функция* ($\varphi \uparrow\uparrow$ *или* $\downarrow\downarrow$ *на* $[\alpha,\beta]$), *для которой* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (*или соответственно* $\varphi(\alpha) = b$, $\varphi(\beta) = a$). *Тогда* $f \circ \varphi \cdot \mathrm{D}\varphi \in R[\alpha,\beta]$ *и*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{D}\varphi(t)dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $\varphi \uparrow\uparrow$ на $[\alpha,\beta]$. Тогда отображение $t \to \varphi(t)$ осуществляет гомеоморфизм отрезка $[\alpha,\beta]$ на отрезок $[a,b] = \varphi([\alpha,\beta])$, так что существует обратный гомеоморфизм $x \to \varphi^{-1}(x)$, причем $\varphi^{-1} \in C([a,b])$ и $\varphi^{-1} \uparrow\uparrow$ на $[a,b]$. Для любого размеченного разбиения $T\xi$ отрезка $[a,b]$

$$T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\},$$

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ (i = 1,2,\ldots,n)$$

рассмотрим точки $t_i = \varphi^{-1}(x_i) \in [\alpha,\beta]$, $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i) \in [t_{i-1}, t_i]$. Тогда $T_0\tau \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{-1}(T\xi)$ (где $T_0 = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$, $\tau_i = \varphi^{-1}(\xi_i)$) есть размеченное разбиение отрезка $[\alpha,\beta]$, «индуцированное» (с помощью гомеоморфизма (φ^{-1}) размеченным разбиением $T\xi$. Аналогично, любому размеченному разбиению $T_0\tau$ отрезка $[\alpha,\beta]$ можно поставить в соответствие «индуцированное» (φ) размеченное разбиение $T\xi \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(T_0\tau)$ отрезка $[a,b]$ по правилу $x_i = \varphi(t_i)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Поскольку $\varphi \uparrow\uparrow$ на $[\alpha,\beta]$ и $\varphi^{-1} \uparrow\uparrow$ на $[a,b]$, то $\Delta x_i = \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) > 0$ и $\Delta t_i = \varphi^{-1}(x_i) - \varphi^{-1}(x_{i-1}) > 0$, и тогда для $T = \varphi(T_0)$ $d(T) = \max\limits_i \Delta x_i = \max\limits_i (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) > 0$, а для $T_0 = \varphi^{-1}(T)$ $d(T_0) = \max\limits_i \Delta t_i = \max\limits_i (\varphi^{-1}(x_i) - \varphi^{-1}(x_{i-1})) > 0$.

Поскольку $\varphi \in C([\alpha,\beta])$ и $\varphi^{-1} \in C([\alpha,\beta])$, то по теореме Кантора функция $\varphi(t)$ равномерно непрерывна на $[\alpha,\beta]$, а $\varphi^{-1}(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$, и тогда при $T = \varphi(T_0)$ имеем $\lim\limits_{d(T_0)\to 0} d(T) = 0$ и при $T_0 = \varphi^{-1}(T)$ $\lim\limits_{d(T)\to 0} d(T_0) = 0$. Если использовать базы $d(T) \to 0$ и $d(T_0) \to 0$, то имеем:

1) обозначение $(d(T) \to 0) \stackrel{\varphi^{-1}}{\Rightarrow} (d(T_0) \to 0)$ означает, что для любого элемента $A_\eta = \{T_0\tau | d(T_0) < \eta\}$ базы $(d(T_0) \to 0)$ существует элемент

$B_\delta = \{T\xi | d(T) < \delta\}$ базы $(d(T) \to 0)$ такой, что $T_0\tau = \varphi^{-1}(T\xi) \in A_\eta$ $\forall T\xi \in B_\delta$;

2) обозначение $(d(T_0) \to 0) \overset{\varphi}{\Rightarrow} (d(T) \to 0)$ означает, что $\forall B_\delta\ \exists A_\eta$ такой, что $T\xi = \varphi(T_0\tau) \in B_\delta\ \forall T_0\tau \in A_\eta$. В силу условия $f \in R[a,b]$ $\exists \lim\limits_{d(T)\to 0} S_f(T\xi) = \int\limits_a^b f(x)dx = J$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ существует элемент $B_{\delta(\varepsilon)}$ (базы $d(T) \to 0$) такой, что

$$|S_f(T\xi) - J| < \varepsilon/2\ \forall T\xi \in B_{\delta(\varepsilon)}. \tag{6.6}$$

Для доказательства утверждения $(f\circ\varphi)\cdot \mathrm{D}\varphi \in R[\alpha,\beta]$ рассмотрим любое размеченное разбиение $T_0\tau$ отрезка $[\alpha,\beta]$ и соответствующее ему «индуцированное» размеченное разбиение $T\xi = \varphi(T_0\tau)$ отрезка $[a,b]$. Поскольку $\varphi \in \mathcal{D}([\alpha,\beta])$, то в силу теоремы Лагранжа о конечных приращениях, примененной к функции $\varphi(t)$ на отрезке $[t_{i-1},t_i]$, существует точка $\vartheta \in (t_{i-1},t_i)$ такая, что $\Delta x_i \equiv \varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1}) = \mathrm{D}\varphi(\vartheta)\Delta t_i$, и тогда имеем представление (при $T\xi = \varphi(T_0\tau)$, $\xi_i = \varphi(\tau_i)$, $x_i = \varphi(t_i)$)

$$S_f(T\xi) \equiv \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\mathrm{D}\varphi(\vartheta)\Delta t_i =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))\mathrm{D}\varphi(\tau_i)\Delta t_i + I(T_0\tau), \tag{6.7}$$

где положено

$$I(T_0\tau) = \sum_{i=1}^n f(\varphi(\tau_i))(\mathrm{D}\varphi(\vartheta_i) - \mathrm{D}\varphi(\tau_i))\Delta t_i.$$

Поскольку $f \in R[a,b] \wedge B[a,b]$, то существует постоянная $M > 0$ такая, что $|f(x)| \le M\ \forall x \in [a,b]$, и, полагая $\omega_i(\mathrm{D}\varphi) = \omega(\mathrm{D}\varphi;[t_{i-1},t_i])$, имеем оценку

$$|I(T_0\tau)| \le M\sum_{i=1}^n \omega_i(\mathrm{D}\varphi)\Delta t_i = M\Omega_{\mathrm{D}\varphi}(T_0).$$

Но $\mathrm{D}\varphi \in R[\alpha,\beta]$, и поэтому в силу предельного критерия интегрируемости по Риману $\exists \lim\limits_{d(T_0)\to 0} \Omega_{\mathrm{D}\varphi}(T_0) = 0$, а потому $\lim\limits_{d(T_0)\to 0} I(T_0\tau) = 0$ и для фиксированного в (6.6) $\varepsilon > 0$ существует элемент $A_{\eta(\varepsilon)}$ (из базы $d(T_0) \to 0$) такой, что

$$|I(T_0\tau)| < \varepsilon/2\ \forall T_0\tau \in A_{\eta(\varepsilon)}. \tag{6.8}$$

Из представления (6.7) имеем (при $T\xi = \varphi(T_0\tau)$) представление

$$S_{f\circ\varphi\cdot\mathrm{D}\varphi}(T_0\tau) = S_f(T\xi) - I(T_0\tau),$$

дающее оценку

$$|S_{f\circ\varphi\cdot \mathrm{D}\varphi}(T_0\tau) - J| \le |S_f(T\xi) - J| + |I(T_0\tau)|. \tag{6.9}$$

Рассмотрим сначала элемент $A_{\eta(\varepsilon)}$ (базы $d(T_0) \to 0$), для которого выполнена оценка (6.8). Поскольку $(d(T_0) \to 0) \overset{\varphi}{\Rightarrow} (d(T) \to 0)$ (где $T\xi = \varphi(T_0\tau)$), то для элемента $B_{\delta(\varepsilon)}$ (базы $d(T) \to 0$) из оценки (6.6) существует элемент $A_{\eta_1} \subset A_{\eta(\varepsilon)}$ такой, что

$$T\xi = \varphi(T_0\tau) \in B_{\delta(\varepsilon)} \ \forall T_0\tau \in A_{\eta_1}. \tag{6.10}$$

Но тогда $\forall \varepsilon > 0$ (фиксированного в оценках (6.6) и (6.8)) существует элемент A_{η_1} (базы $d(T_0) \to 0$) такой, что имеет место (6.10), и поэтому выполнены оценка (6.8) и оценка (6.6), т. е. из (6.9) в силу (6.6), (6.8) имеем оценку

$$|S_{f\circ\varphi\cdot \mathrm{D}\varphi}(T_0\tau) - J| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ \forall T_0\tau \in A_{\eta_1},$$

т. е.

$$\exists \lim_{d(T_0)\to 0} S_{f\circ\varphi\cdot \mathrm{D}\varphi}(T_0\tau) = \int_a^b f(x)dx,$$

так что $f \circ \varphi \cdot \mathrm{D}\varphi \in R[\alpha, \beta]$ и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\mathrm{D}\varphi(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

Т е о р е м а (о среднем в интегральной форме). *Пусть функция $f(x)$ имеет на отрезке $[a, b]$ первообразную $F(x)$ и $f \in R[a, b]$. Тогда*

$$F(b) - F(a) = (b - a)\int_0^1 f(a + t(b - a))dt,$$

и, в частности, если $F(x)$ есть точная примитивная на $[a, b]$ для функции $f(x) = \mathrm{D}F(x)$, то

$$F(b) - F(a) = (b - a)\int_0^1 \mathrm{D}F(a + t(b - a))dt.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме Ньютона – Лейбница имеем

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Сделав в интеграле Римана, стоящем справа, гомеоморфную замену $x = a + (b-a)t$, имеем в силу теоремы 2

$$F(b) - F(a) = (b-a)\int_a^b f(a + t(b-a))dt.$$

Замечание (по поводу интегрирования сложной функции). Пусть $f(x) \in R[a,b]$ и $\varphi(t) \in R[\alpha,\beta]$, причем $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. Будет ли $F = f \circ \varphi \in R[\alpha,\beta]$?

Контрпример. Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (\text{так что } f \in R[0,1]),$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} 1/q \text{ при } t = p/q \in \mathbf{Q} - \text{несократимая дробь}, \\ 0 \text{ при } t \text{ иррациональном}. \end{cases}$$

Функция Римана $\varphi(t)$ разрывна в каждой точке вида $t = p/q$ и непрерывна в каждой иррациональной точке. Но тогда множество E_φ точек разрыва функции φ счетно, а потому имеет меру нуль. В силу критерия Лебега (интегрируемости по Риману) $\varphi \in R[0,1]$. Однако для функции

$$F = f \circ \varphi \text{ имеем } F(t) = \begin{cases} 0, & t \overline{\in} \mathbf{Q} \cap [0,1], \\ 1, & t \in \mathbf{Q} \cap [0,1], \end{cases}$$

т. е. $F = f \circ \varphi$ есть функция Дирихле, не интегрируемая на $[0,1]$.

Можно доказать следующую теорему.

Теорема (достаточное условие интегрируемости по Риману сложной функции). *Пусть* $f(x) \in C([a,b])$, $\varphi(t) \in R[\alpha,\beta]$ *и* $\varphi([\alpha,\beta]) \subset [a,b]$. *Тогда* $F = f \circ \varphi \in R[\alpha,\beta]$.

Теорема 1 (об интегрировании по частям). *Пусть* u, $v \in \mathcal{D}([a,b])$ *и* $\mathrm{D}u$, $\mathrm{D}v \in R[a,b]$. *Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

Доказательство. $(u, v, \mathrm{D}u, \mathrm{D}v \in R[a,b]) \Rightarrow (uv', u'v \in R[a,b])$. Далее, $((u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\ \forall (x \in [a,b]) \Rightarrow ((u\cdot v)' \in R[a,b])$. По формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_a^b (u(x)\cdot v(x))'dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b$$

и, кроме того,

$$\int_a^b (u(x)v(x))'dx = \int_a^b (u(x)v'(x) + u'(x)v(x))dx =$$

$$= \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

откуда

$$u(x)v(x)|_a^b = \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Т е о р е м а 2 (об интегрировании по частям). *Пусть* $a < b$ *и* $f, g \in R[a,b]$. *Пусть* $F(x) = \int_a^x f(t)dt + A$, $G(x) = \int_a^x g(t)dt + B$, *где* A *и* B *- любые постоянные. Тогда*

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(f, g \in R[a,b]) \Rightarrow (f, g \in B[a,b])$. Далее, $(F, G \in C([a,b])) \Rightarrow (F, G \in B[a,b])$, поэтому существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|F(x)| \le M,\ |G(x)| \le M\ \forall x \in [a,b].$$

Наконец, $(F, G \in R[a,b]) \Rightarrow (f \cdot G, g \cdot F \in R[a,b])$. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$F(x)G(x)|_a^b = \sum_{k=1}^n (F(x_k)G(x_k) - F(x_{k-1})G(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^n F(x_k)(G(x_k) - G(x_{k-1})) + \sum_{k=1}^n G(x_{k-1})(F(x_k) - F(x_{k-1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^n F(x_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)dt + \sum_{k=1}^n G(x_{k-1}) \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt =$$

(так как $(G(x) = \int_a^x g(t)dt + B) \Rightarrow (G(x_k) - G(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} g(t)dt)$,

$$(F(x) = \int_a^x f(t)dt + A) \Rightarrow (F(x_k) - F(x_{k-1}) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)dt)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} F(t)g(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} G(t)f(t)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (F(x_k) - F(t))g(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} (G(x_{k-1}) - G(t))f(t)dt.$$

Но

$$|g(t)| \le M_g,\ |f(t)| \le M_f\ \forall t \in [a,b],$$

$$|F(x_k) - F(t)| \le \omega(F;[x_{k-1},x_k]) \equiv \omega_k(F),$$

$$|G(x_{k-1}) - G(t)| \le \omega(G;[x_{k-1},x_k]) \equiv \omega(G)\ \forall t \in [x_{k-1},x_k],$$

т. е.

$$\left| F(x)G(x)|_a^b - \left(\int_a^b F(t)g(t)dt + \int_a^b G(t)f(t)dt \right) \right| \le$$

$$\le M_g \sum_{k=1}^{n} \omega_k(F)\Delta x_k + M_f \sum_{k=1}^{n} \omega_k(G)\Delta x_k = M_g \Omega_F(T) + M_f \Omega_G(T).$$

Но $(F, G \in R[a,b]) \Rightarrow (\lim\limits_{t \to +0} \Omega_F(T) = \lim\limits_{t \to +0} \Omega_G(T) = 0)$, так что, переходя к пределу по базе $(t \to +0)$, имеем искомое равенство

$$F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)dx - \int_A^b G(x)f(x)dx = 0.$$

Следствие. Пусть $a < b$ и функции $F(x)$ и $G(x)$ являются соответственно первообразными для функций $f, g \in R[a,b]$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b F(x)g(x)dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)dx.$$

В самом деле, $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ и $\mathcal{Y}(x) = \int\limits_a^x g(t)dt$ есть первообразные для функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, причем $F(x) = \Phi(x) + F(a)$, $G(x) = \mathcal{Y}(x) + G(a)$.

2-я теорема о среднем. *Пусть* $f \in C([a,b])$, $g \in C^{(1)}([a,b])$, $\mathrm{D}g(x) \ge 0$ $(\mathrm{D}g(x) \le 0)$ $\forall x \in [a,b]$. *Тогда существует* $c \in [a,b]$ *такое, что* $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int\limits_a^c f(x)dx + g(b)\int\limits_c^b f(x)dx$.

Доказательство. Полагая $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, видим, что $\mathrm{D}\Phi(x) = f(x)$, поскольку $f \in C([a,b])$ и $\Phi(a) = 0$. Применяя формулу интегрирования по частям, имеем

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \int\limits_a^b g(x)d\Phi(x) = g(b)\Phi(b) - g(a)\Phi(a) -$$

$$- \int\limits_a^b \Phi(x)\mathrm{D}g(x)dx \ (\Phi(a) = 0).$$

Но $\Phi \in C[a,b]$; $\mathrm{D}g(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ и $\mathrm{D}g \in C[a,b] \subset R[a,b]$. Тогда по 1-й обобщенной теореме о среднем существует $c \in [a,b]$ такое, что

$$\left(\int\limits_a^b \Phi(x)\mathrm{D}g(x)dx = \Phi(c) \int\limits_a^b \mathrm{D}g(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx \cdot (g(b) - g(a)) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int\limits_a^b f(x)dx - (g(b) - g(a)) \int\limits_a^c f(x)dx = \right.$$

$$= g(b) \left(\int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^c f(x)dx \right) + g(a) \int\limits_a^c f(x)dx =$$

$$\left. = g(a) \int\limits_a^c f(x)dx + g(b) \int\limits_c^b f(x)dx \right).$$

Определение. *Пусть E есть множество (линейное пространство) функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a,b]$. Функционалом $F(f)$ называется отображение $F : E \to \mathbf{R}$.*

Примеры функционалов. $F_1(f) = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$, $F_2(f) = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$; $F_3(f) = f(x_0)$, $x_0 \in [a,b]$; $F_4(f) = \mathrm{D}f(x_0)$, $x_0 \in (a,b)$.

Пример. Пусть $E = R[a,b]$, тогда отображение $F : f \to J(f)$, где $J(f) = \int\limits_a^b f(x)dx \in \mathbf{R}$ есть функционал на $R[a,b]$.

Определение. *Функционал $F(f)$, определенный на (линейном пространстве) E, называется:*

1) аддитивным, если $F(f+g) = F(f) + F(g) \ \forall f, g \in E$;

2) однородным, если $F(\alpha \cdot f) = \alpha \cdot F(f) \ \forall f \in E$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$;

3) неотрицательным, если $F(f) \geq 0 \ \forall f \in E$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$;

4) положительным, если $F(f) > 0\ \forall f \in E$, $f(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$.

Определение. *Аддитивный однородный функционал на (линейном пространстве)* E *называется линейным функционалом на* E.

Определение. *Пусть* $E = R[a, b]$ *и* $||f|| \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{[a,b]} |f(x)|\ \forall f \in E$. *Линейный функционал* $F(f)$ *на* $R[a, b]$ *называется ограниченным, если существует число* $K > 0$ *такое, что* $|F(f)| \leq K||f||\ \forall f \in R[a, b]$.

Теорема. *Функционал* $J(f) = \int\limits_a^b f(x)dx$ *есть линейный, ограниченный, положительный функционал на* $R[a, b]$.

Доказательство. В силу теорем 1, 2 этого параграфа $R[a, b]$ есть кольцо, поэтому $J(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot J(f) + \beta \cdot J(g)$ $\forall f, g \in R[a, b], \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$, так что $J(f)$ есть однородный и аддитивный функционал на $R[a, b]$, т. е. $J(f)$ есть линейный функционал на $R[a, b]$. В силу следствия к теореме 8 имеем оценку сверху $|J(f)| \leq K||f||$ $\forall f \in R[a, b]$, где $K = b - a > 0$, т. е. $J(f)$ есть ограниченный, линейный функционал на $R[a, b]$. Из теоремы 8 имеем

$$(\forall f \in R[a, b],\ f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]) \Rightarrow (J(f) \geq 0),$$

причем если $f(x) > 0\ \forall x \in [a, b]$, то в силу теоремы 10 $J(f) > 0$, т. е. $J(f)$ – положительный линейный функционал на $R[a, b]$.

§ 7. Понятие о мере множеств. Длина числового множества как мера. Площадь криволинейной трапеции

Понятие меры $\mu(A)$ множества A является естественным обобщением понятий длины отрезка, площади многоугольника, объема многогранника. Пусть некоторым множествам $\{E\} = \mathcal{E}$ из $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$ и т. д. соотнесено понятие меры. Такие множества будем называть измеримыми, а их мера будет обозначаться через $\mu(E)$. Будем считать, что мера $\mu(E)$ обладает следующими свойствами:

1) для любого измеримого множества $e \in \mathcal{E} \Rightarrow (\mu(E) \in \mathbf{R}$ и $\mu(E) \geq 0)$;

2) (монотонность меры) для любых измеримых множеств $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ таких, что $E_1 \subset E_2$, $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$;

3) (аддитивность меры) если множества $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$ измеримы и $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, то $\mu(E_1 \cup E_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$ (в частности, имеет место конечная аддитивность меры:

$$(\forall E_i \in \mathcal{E}\ (i = 1, 2, \ldots, n),\ E_i \cap E_j = \varnothing\ \forall i \neq j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mu(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)).$$

Пример. Рассмотрим интервалы $\overset{\circ}{I}= (a,b) \subset \mathbf{R}$ и положим $\mu(\overset{\circ}{I}) = b-a$. Пусть $\mathcal{E} = \{I, \overset{\circ}{I}\}$. Тогда свойства 1) и 2) для меры $\mu(\overset{\circ}{I})$ выполнены, что касается свойства 3), то заметим, что (для любых интервалов $\overset{\circ}{I}_1, \overset{\circ}{I}_2$, таких, что $\overset{\circ}{I}_1 \cap \overset{\circ}{I}_2 = \varnothing$) $\Rightarrow (\mu(\overset{\circ}{I}_1 \cup \overset{\circ}{I}_2) = \mu(\overset{\circ}{I}_1) + \mu(\overset{\circ}{I}_2))$.

Пусть теперь $\overset{\circ}{I}= (a,b)$ и $a < c < b$. Положим $\overset{\circ}{I}_1= (a,c)$, $\overset{\circ}{I}_2= (c,b)$, тогда $\mu(\overset{\circ}{I}) = b-a = (c-a)+(b-c) = \mu(\overset{\circ}{I}_1) + \mu(\overset{\circ}{I}_2)$, но, с другой стороны, $\overset{\circ}{I}=\overset{\circ}{I}_1 \cup \overset{\circ}{I}_2 \cup \Delta$, где $\Delta = \{c\}$, причем множества $\overset{\circ}{I}_1$, $\overset{\circ}{I}_2$ и Δ попарно не пересекаются, и поэтому при выполнении свойства 3) должно быть $(\mu(\overset{\circ}{I}) = \mu(\overset{\circ}{I}_1) + \mu(\overset{\circ}{I}_2) + \mu(\Delta)) \Rightarrow (\mu(\Delta) = 0)$.

Итак, если любой точке $\{c\}$ приписать меру $\mu(c) = 0$, то условие 3) для меры $\mu(\overset{\circ}{I})$ будет выполнено. Но в этом случае для отрезка $I = [a,b]$, интервала $\overset{\circ}{I}= (a,b)$ и полуинтервалов $J_1[a,b)$, $J_2 = (a,b]$ имеем $\mu(I) = \mu(\overset{\circ}{I}) = \mu(\overset{\circ}{I}_1) = \mu(\overset{\circ}{I}_2) = b-a$. Из следствия 5 (о свойствах меры Жордана) к теореме § 6 вытекает

Теорема. *Пусть $\mathcal{E} = \{A\}$ - множество всех измеримых по Жордану множеств из $[a,b]$. Тогда длина множества $\mu(A) = |A| = \int\limits_a^b X_A(x)dx$ есть мера, удовлетворяющая условию нормировки: $\mu(I) = |I| = \beta - \alpha \ \forall I = [\alpha,\beta] \subset [a,b]$.*

Определение. *Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$. Тогда $\forall (\alpha,\beta) \subset [a,b]$ криволинейной трапецией назовем множество $\mathcal{D}(\alpha,\beta) = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | \alpha < x < \beta, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$ и положим $\mathcal{D}[\alpha,\beta] \equiv \overline{\mathcal{D}}(\alpha,\beta)$.*

Теорема. *Если $f \in C([a,b])$, $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$ и $\mathcal{E} = \{\mathcal{D}(\alpha,\beta)\}$, то $\mu(\mathcal{D}(\alpha,\beta)) = \mu(\mathcal{D}[\alpha,\beta]) = \int\limits_a^b f(x)dx$ есть мера (площадь) на $\mathcal{E}$, удовлетворяющая условию нормировки: $\mu(I_h^2) = h \cdot (\beta-\alpha)$ $\forall I_h^2 = \mathcal{D}_h[\alpha,\beta]$ с $f(x) \equiv h > 0$.*

Доказательство. Учитывая условие $f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$, имеем в силу теоремы 8:

1) $\forall \mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\alpha,\beta) \in \mathcal{E}$ (где $(f \in C([a,b])) \Rightarrow (f \in R[a,b])$), тогда

$$\mu(\mathcal{D}) = \int\limits_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0;$$

2) (монотонность меры $\mu(\mathcal{D})$) $\forall \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{E}$ при $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\alpha_1,\beta_1) \subset \mathcal{D}(\alpha_2,\beta_2) = \mathcal{D}_2$, тогда $(\alpha_1,\beta_1) \subset (\alpha_2,\beta_2) \subset [a,b]$, откуда

$$\mu(\mathcal{D}_1) = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx \leq \int\limits_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x)dx = \mu(\mathcal{D}_2),$$

т. е. $\mu(\mathcal{D}_1) \le \mu(\mathcal{D}_2)$.

По поводу аддитивности меры $\mu(\mathcal{D})$ заметим, что при $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\alpha, \beta)$ $\forall \gamma \in (\alpha, \beta)$ имеем $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \Delta$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\alpha, \gamma)$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\gamma, \beta)$, $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x = \gamma,\ 0 \le y \le f(x)\}$, и поэтому в силу теоремы 1 § 6 имеем

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\gamma^\beta f(x)dx = \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2),$$

при этом, очевидно, $\mu(\Delta) = \int_\gamma^\gamma f(x)dx = 0$, и поэтому

$$\mu(\mathcal{D}) = \mu(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \Delta) = \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2) + \mu(\Delta) = \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2).$$

Итак, $\forall \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{E}$, где $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}(\alpha_1, \beta_1)$, $\mathcal{D}_2 = \mathcal{D}(\alpha_2, \beta_2)$, при $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing$ имеем $a \le \alpha_1 < \beta_1 \le \alpha_2 < \beta_2 \le b$ (или $a \le \alpha_2 < \beta_2 \le \alpha_1 < \beta_1 \le b$), откуда, полагая $\mu(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} f(x)dx + \int_{\alpha_2}^{\beta_2} f(x)dx$, имеем

$$3)\ \mu(\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2) = \mu(\mathcal{D}_1) + \mu(\mathcal{D}_2)\ \forall \mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathcal{E},\ \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \varnothing,$$

т. е. мера $\mu(\mathcal{D})$ обладает свойством аддитивности на $\mathcal{E}$.

Наконец, условие «нормировки» 4) также выполнено, поскольку $\forall I_h^2 = \mathcal{D}[\alpha, \beta]$ с $f(x) \equiv h > 0$, имеем

$$\mu(I_h^2) = \int_\alpha^\beta h dx = h(\beta - \alpha),$$

что совпадает с величиной площади I_h^2, принятой в школьной геометрии.

В силу доказанной теоремы можно ввести понятие площади криволинейной трапеции $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\}$ при $f \in C([a, b])$ с дополнительным условием $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a, b]$. Обобщим понятие площади трапеции на случай функции $f(x)$, меняющей знак на отрезке $[a, b]$, считая (рис. 48), что площадь трапеции также имеет знак. Далее, если $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | a \le x \le b,\ f_1(x) \le y \le f_2(x)\}$ и $f_i \in C([a, b])$ $(i = 1, 2)$, то можно ввести понятие «площади» и для множества $\mathcal{D}$, полагая

$$\mu(\mathcal{D}) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Можно таким же способом определить «площадь» и для более сложных фигур, представимых в виде объединения конечного числа не перекрывающихся областей вида D_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$, каждая из которых имеет такую границу ∂D_i, что любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает ее не более чем в двух точках или по целому отрезку (рис. 49). Общая теория измерения площадей плоских фигур будет построена в дальнейшем с помощью двойных интегралов Римана.

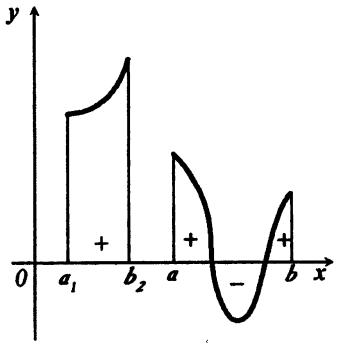


Рис. 48

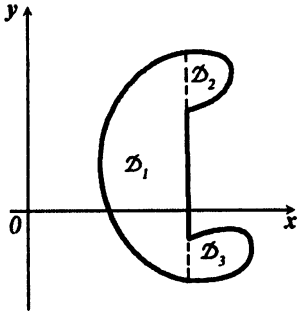


Рис. 49

§ 8. Замечания о некоторых геометрических и механических приложениях интеграла Римана

1. Объем тела вращения. Пусть $f \in C([a,b])$ и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. Рассмотрим любое разбиение T отрезка $[a,b]$ и на каждом частичном отрезке $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ построим два прямоугольника с высотами $M_k = \sup\limits_{I_k} f(x)$ и $m_k = \inf\limits_{I_k} f(x)$ соответственно. При вращении трапеции $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ вокруг оси Ox видим, что тело вращения заключено между двумя ступенчатыми телами, составленными из цилиндров с объемами

$$\pi \underline{S}_{f^2}(T) = \sum_{k=1}^{n} m_k^2 \Delta x_k, \; \pi \overline{S}_{f^2}(T) = \pi \sum_{k=1}^{n} M_k^2 \Delta x_k.$$

Поскольку $f \in C([a,b])$, то $(f^2 \in C([a,b])) \Rightarrow (f^2 \in R[a,b])$, и поэтому

$$\exists \lim_{t \to +0} \pi \underline{S}_{f^2}(T) = \lim_{t \to +0} \overline{S}_{f^2}(T) = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

Назовем «объемом» тела вращения число

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

2. Масса и центр тяжести неоднородного тела. Рассмотрим неоднородный стержень, расположенный на отрезке $[a, b]$ оси Ox с линейной плотностью $\rho(x)$ так, что $\rho(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta m(x)/\Delta x$, где $\Delta m(x)$ есть масса части стержня, расположенного на отрезке $[x, x + \Delta x]$. Рассмотрим любое размеченное разбиение $T\xi$ отрезка $[a, b]$. Тогда $S_\rho(T\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(\xi_k)\Delta x_k$ приближенно есть значение массы стержня. Если $\rho \in C([a, b])$, то $\exists M = \int\limits_a^b \rho(x)dx$. Величина M называется массой неоднородного стержня с линейной плотностью $\rho(x)$. Для определения координаты центра тяжести нашего неоднородного стержня вспомним, что для конечной системы материальных точек $\{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ с массами $m(x_i) = m_i$ координата центра тяжести вычисляется по формуле

$$x_c = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k \Big/ \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Рассмотрим любое разбиение T отрезка $[a, b]$. Тогда масса m_k стержня $[x_{k-1}, x_k]$ есть

$$m_k = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \rho(x)dx, \text{ причем } M = \sum_{k=1}^{n} m_k = \int\limits_a^b \rho(x)dx$$

есть масса всего стержня. Поскольку $\rho \in C([\alpha, \beta])$, то по теореме о среднем $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такая, что $m_k = \rho(\xi_k)\Delta x_k$. Тогда

$$x_c \sim \sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k)\Delta x_k / M.$$

Поскольку $\rho \in C([a, b])$, то, переходя к пределу по базе $(d(T) \to 0)$, имеем $x_c = \int\limits_a^b x\rho(x)dx \Big/ \int\limits_a^b \rho(x)dx$.

3. Работа переменной силы. Пусть материальная точка перемещается из точки a в точку b оси Ox под действием переменной силы $\mathbf{F}(x)$, параллельной оси Ox. Рассмотрим любое размеченное разбиение $T\xi$ отрезка $[a, b]$, тогда работу A силы $\mathbf{F}(x)$ на отрезке $[a, b]$ можно приближенно считать равной величине $S_F(T\xi) = \sum\limits_{k=1}^{n} F(\xi_k)\Delta x_k$, если $F \in \mathbf{C}([a, b])$, то определим работу A силы $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ по формуле $A = \lim\limits_{d(T) \to 0} S_F(T\xi) = \int\limits_a^b F(x)dx$.

§ 9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме

Т е о р е м а. *Пусть* $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}([a,b])$ *и* $\mathrm{D}^{(n+1)}f \in R[a,b]$. *Пусть* $x_0 \in (a,b)$, *тогда имеет место формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме*

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x,x_0)\,\forall x \in [a,b],$$

где

$$r_n(x-x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{D}^{n+1}f(t)dt. \tag{9.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}([a,b])$, то функция $\mathrm{D}^{k-1}f(x)$ есть точная на $[a,b]$ примитивная для функции $\mathrm{D}^k f(x)$ при $k = 1,2,\ldots,n+1$, причем $\mathrm{D}^k f \in C([a,b]) \subset R[a,b]$ при $k = 1,2,\ldots,n$. Но тогда в силу формулы Ньютона – Лейбница имеем

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{D}f(t)dt\,\forall x \in [a,b],$$

полагая $u(t) = \mathrm{D}f(t)$, $dv(t) = dt \equiv d(-(x-t))$ и интегрируя по частям, имеем

$$f(x) = f(x_0) + [-(x-t)\mathrm{D}f(t)]\big|_{t=x_0}^{t=x} + \int_{x_0}^{x}(x-t)\mathrm{D}^2 f(t)dt,$$

т. е.

$$f(x) = f(x_0) + \mathrm{D}f(x_0)(x-x_0) + \int_{x_0}^{x}(x-t)\mathrm{D}^2 f(t)dt.$$

Вновь интегрируя по частям при $u(t) = \mathrm{D}^2 f(t)$, $dv(t) = d[-(x-t)^2/2]$, получаем

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)\mathrm{D}^2 f(t)dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2!}\mathrm{D}^2 f(t)\right]\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} +$$

$$+\frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2\mathrm{D}^3 f(t)dt,$$

т. е.

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{2} \frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{2!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^2\mathrm{D}^3 f(t)dt,$$

тем самым по индукции доказана формула

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\mathrm{D}^n f(t)dt.$$

Но $\mathrm{D}^n f(t)$ является точной первообразной для $\mathrm{D}^{n+1} f \in R[a,b]$, так что, вновь интегрируя по частям при $u(t) = \mathrm{D}^n f(t)$, $v(t) = -(x-t)^n/n$, получаем

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\mathrm{D}^n f(t)dt = \left[-\frac{(x-t)^n}{n}\mathrm{D}^n f(t)\right]\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} +$$

$$+\frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{D}^{n+1} f(t)dt,$$

чем и доказана формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathrm{D}^k f(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{D}^{n+1} f(t)dt.$$

Следствие 1. Пусть $f \in C([a,b])$, причем производная $\mathrm{D}^n f(x)$ является на отрезке $[a,b]$ первообразной для функции $g \in R[a,b]$. Пусть $x_0 \in (a,b)$. Тогда имеет место формула Тейлора с остаточным членом вида

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n g(t)dt.$$

В частности, если $\mathrm{D}^n f(x)$ имеет кусочно-непрерывную (ограниченную) на $[a,b]$ производную, т. е. при $\mathrm{D}^{n+1} f \in C([a,b] \setminus K_m)$, то

$$r_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n\mathrm{D}^{n+1} f(t)dt.$$

В самом деле, поскольку $\mathrm{D}^n f \in C([a,b])$ – первообразная для $g \in R[a,b]$, то по формуле Ньютона – Лейбница $\forall x_0 \in (a,b)$

$$\mathrm{D}^n f(t) = \mathrm{D}^n f(a) + \int_{x_0}^{t} g(z)dz,$$

и тогда, полагая $\mathrm{D}^n f(t) = G(t)$ и $F(t) = -(x-t)^n/n \equiv -\dfrac{(x-x_0)^n}{n} + \int_{x_0}^{t}(x-z)^{n-1}dz$, применяя обобщенную теорему об интегрировании по частям, имеем

$$\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\mathrm{D}^n f(t)dt \equiv \int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}G(t)dt =$$

$$= \left[-\frac{(x-t)^n}{n}\cdot G(t)\right]\Bigg|_{t=x_0}^{t=x} + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n g(t)dt =$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n}\mathrm{D}^n f(x_0) + \frac{1}{n}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n g(t)dt,$$

что и доказывает формулу Тейлора в рассматриваемом случае.

Следствие 2. Если $f \in C^{(n+1)}([a,b])$, то в силу 1-й обобщенной теоремы о среднем $\exists \xi \in [x_0, x]$ такое, что (см. (9.1))

$$r_n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{D}^{n+1} f(\xi),$$

т. е. получаем остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа. Можно считать, что $\xi \in (x_0, x)$.

Замечание 1. Пусть $f \in \mathcal{D}^{(n+1)}([a,b])$ и $\mathrm{D}^{n+1} f \in R[a,b]$, тогда, делая замену $z = t - x_0$ в (9.1), имеем

$$r_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{0}^{x-x_0}(x-x_0-z)^n \mathrm{D}^{n+1} f(x_0+z)dz,$$

откуда после еще одной замены $z = (x-x_0)\lambda$ имеем

$$r_n(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_{0}^{1}(1-\lambda)^n \mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \lambda(x-x_0))d\lambda.$$

Замечание 2. Если $f \in C^{(n+1)}([a,b])$, то, полагая $x - x_0 = h$, в силу замечания 1 имеем (при $n+1 \geq p \geq 1$)

$$r_n(x, x_0) = \frac{h^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1-\lambda)^{n+1-p} \cdot (1-\lambda)^{p-1} \cdot \mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \lambda h) d\lambda.$$

Применение 1-й обобщенной теоремы о среднем дает равенство

$$r_n(x, x_0) = \frac{h^{n+1}}{n!}(1-\vartheta)^{n-p+1} \mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h) \int_0^1 (1-\lambda)^{p-1} d\lambda,$$

так что

$$r_n(x, x_0) = \frac{(1-\vartheta)^{n+1-p}}{p \cdot n!} \cdot \mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h) h^{n+1} \, (0 \leq \vartheta \leq 1),$$

откуда получаем остаточный член формулы Тейлора при $p = 1$ в форме Коши

$$r_n(x, x_0) = \frac{(1-\vartheta)^n}{n!} \mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h) h^{n+1} \, (0 \leq \vartheta \leq 1)$$

и при $p = n+1$ в форме Лагранжа

$$r_n(x, x_0) = \frac{\mathrm{D}^{n+1} f(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \, (0 \leq \vartheta \leq 1).$$

Можно считать, что $0 < \vartheta < 1$.

Часть III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Глава 1

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ $\mathbf{R}^n$ В $\mathbf{R}^m$

§ 1. Линейные, евклидовы, нормированные и метрические пространства

О п р е д е л е н и е. *Непустое множество E называется линейным (или векторным) пространством, если в E определены операции сложения элементов из E и умножения на числа из поля* $\mathbf{R}$, *причем: 1)* $(\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E) \Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y} \in E)$ *и операция сложения ассоциативна, коммутативна и обладает обратной операцией вычитания; 2)* $(\forall \mathbf{x} \in E, \forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}) \Rightarrow (\alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{x}) = \alpha\beta \cdot \mathbf{x},\ 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x})$. *Операции сложения и умножения на числа (из* $\mathbf{R}$*) связаны законом дистрибутивности.*

П р и м е р 1. 1) $E = \mathbf{R}$ – числовая прямая с обычными арифметическими операциями сложения и умножения есть линейное пространство. 2) Пространство $\mathbf{R}^n$ становится линейным пространством, если для векторов $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ ввести операции сложения и умножения на числа (из $\mathbf{R}$) следующим образом:

$$(\forall \mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n) \in \mathbf{R}^n);$$

$$(\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1, \ldots, \alpha_n x_n) \in \mathbf{R}^n).$$

П р и м е р 2. Множество $C([a,b])$ с обычными операциями сложения функций и умножения их на действительные числа есть линейное пространство непрерывных функций.

О п р е д е л е н и е. *Элементы $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ линейного пространства E называются линейно зависимыми, если* $\exists c_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *не все равные нулю, такие, что* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = 0$. *Если же из равенства* $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \mathbf{x}_i = 0$ *(где* $\mathbf{x}_i \neq 0\ \forall i$*) следует, что* $c_i = 0$

($i = 1, 2, \ldots, n$), *то элементы* $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n} \in E$ *называются линейно независимыми.*

О п р е д е л е н и е. *Если в линейном пространстве* E *можно найти* n *линейно независимых элементов, а любые* $n+1$ *элементы этого пространства линейно зависимы, то говорят, что пространство* E *имеет размерность* n. *Если же в пространстве* E *можно указать систему из произвольного числа линейно независимых элементов, то* E *называется бесконечномерным.*

П р и м е р ы. Пространство $\mathbf{R}$ одномерно. Пространство $\mathbf{R}^n$ n-мерно. Элементы $\mathbf{e}_i = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) из $\mathbf{R}^n$ линейно независимы. Пространство $C([a, b])$ бесконечномерно, так как элементы $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots \in C([a, b])$ линейно независимы $\forall n \in \mathbf{N}$.

О п р е д е л е н и е. *Скалярным произведением на линейном пространстве* E *называется положительная билинейная форма* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *которая любой паре элементов* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ *ставит в соответствие действительное число* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, *причем: 1)* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$; *2)* $(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = \alpha_1 (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + \alpha_2 (\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$ $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in E$, $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$; *3)* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \geq 0$ $\forall \mathbf{x} \in E$, *причем* $((\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = 0)$.

О п р е д е л е н и е. *Линейное пространство* E *со скалярным произведением* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *называется евклидовым пространством.*

О п р е д е л е н и е. *Нормой на линейном пространстве* E *называется неотрицательная функция* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$, *которая каждому элементу* $\mathbf{x} \in E$ *ставит в соответствие действительное неотрицательное число* $||\mathbf{x}|| \in \mathbf{R}_+$, *причем: 1) (положительность нормы)* $||\mathbf{x}|| \geq 0$ $\forall \mathbf{x} \in E$, *причем* $(||\mathbf{x}|| = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{x} = 0)$; *2) (выпуклость нормы)* $||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$; *3)* $||\alpha \cdot \mathbf{x}|| = |\alpha| \cdot ||\mathbf{x}||$ $\forall \mathbf{x} \in E$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$.

З а м е ч а н и е. Из свойств 2) и 3) легко выводится обобщенное условие выпуклости $||\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i|| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\mathbf{x}_i||$, также неравенство

$$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \geq |\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{y}||\,| \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E.$$

З а м е ч а н и е. Если функция $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$, определенная на E, обладает свойствами 2) и 3) нормы, а вместо свойства 1) обладает свойством 1') $||\mathbf{x}|| \geq 0$ $\forall \mathbf{x} \in E$, то функция $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$ называется полунормой в E.

О п р е д е л е н и е. *Линейное пространство* E, *в котором задана норма* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$, *называется нормированным пространством.*

Т е о р е м а. *В евклидовом пространстве* E *со скалярным произведением* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *можно ввести норму:* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Норма $||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$, очевидно, обладает свойствами 1) и 3). Свойство 2) следует из неравенства Минковского, которое будет доказано ниже.

Т е о р е м а (неравенство Коши – Буняковского). *Если E – евклидово пространство, то* $|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$ *(где* $||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$\varphi(\lambda) = (\lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}, \lambda\mathbf{x}+\mathbf{y}) \, \forall \lambda \in \mathbf{R}.$$

Тогда

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 \cdot ||\mathbf{x}||^2 + 2\lambda \cdot (\mathbf{x},\mathbf{y}) + ||\mathbf{y}||^2 \ge 0 \ \forall \lambda \in \mathbf{R} \text{ и } \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E$$

и, в частности, при $||\mathbf{x}|| > 0$ имеем $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ оценку $0 \le \varphi(\lambda) = (\lambda \cdot ||\mathbf{x}|| + (\mathbf{x},\mathbf{y})/||\mathbf{x}||)^2 + (||\mathbf{x}||^2 \cdot ||\mathbf{y}||^2 - (\mathbf{x},\mathbf{y})^2)/||\mathbf{x}||^2$. Выбирая λ таким, что $\lambda \cdot ||\mathbf{x}|| + \dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{||\mathbf{x}||} = 0$, видим, что

$$(\varphi(\lambda) \ge 0) \Rightarrow (||\mathbf{x}||^2 \cdot ||\mathbf{y}||^2 - (\mathbf{x},\mathbf{y})^2 \ge 0) \Rightarrow (|(\mathbf{x},\mathbf{y})| \le ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||).$$

Т е о р е м а (неравенство Минковского). *Если E – евклидово пространство, то, полагая* $||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$*, имеем неравенство*

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}|| \ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in E.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С помощью неравенства Коши – Буняковского имеем

$$||(\mathbf{x}+\mathbf{y})||^2 = (\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + (\mathbf{y},\mathbf{y}) =$$

$$= ||\mathbf{x}||^2 + 2(\mathbf{x},\mathbf{y}) + ||\mathbf{x}||^2 \le ||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}|| + ||\mathbf{y}||^2 = (||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||)^2,$$

т. е. $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$.

С л е д с т в и е. Из неравенства Минковского следует выполнение свойства выпуклости 2) для нормы $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$.

З а м е ч а н и е. Наличие в евклидовом пространстве E скалярного произведения $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ позволяет определить в этом пространстве не только норму $||\mathbf{x}||$ (т. е. длину) вектора $\mathbf{x} \in E$, но и угол φ между двумя векторами $\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$. В самом деле, поскольку из неравенства Коши – Буняковского вытекает оценка $|(\mathbf{x},\mathbf{y})/||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||| \le 1$, то угол φ между двумя векторами $\mathbf{x} \ne 0$ и $\mathbf{y} \ne 0$ можно ввести по формуле $\cos\varphi = (\mathbf{x},\mathbf{y})/||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$. Векторы $\mathbf{x},\mathbf{y} \in E$, для которых $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ (а стало быть, $\varphi = \pi/2$), называются ортогональными.

П р и м е р ы. 1) В n-мерном векторном пространстве $\mathbf{R}^n$ для векторов $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1,\ldots,b_n)$ введем скалярное произведение по формуле $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i$. (Очевидно, все свойства 1)–3)

скалярного произведения выполнены.) Тогда норма $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ называется евклидовой нормой в $\mathbf{R}^n$. Неравенство Коши – Буняковского $|(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leq ||\mathbf{a}|| \cdot ||\mathbf{b}||$ дает

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}.$$

Неравенство Минковского $||\mathbf{a}+\mathbf{b}|| \leq ||\mathbf{a}|| + ||\mathbf{b}||$ дает

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2},$$

причем

$$\left(\left\|\sum_{k=1}^{m} \mathbf{a}^{(k)}\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} ||\mathbf{a}^{(k)}||\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{m} a_i^{(k)}\right)^2\right)^{1/2} \leq \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} (a_i^{(k)})^2\right)^{1/2}\right).$$

Отметим также неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|,$$

вытекающее из оценки

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i \neq j} |a_i| \cdot |a_j| \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

2) В линейном пространстве $C([a,b]) \subset R[a,b]$ для $\mathbf{x} = x(t)$, $\mathbf{y} = y(t) \in C([a,b])$ положим $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int_a^b x(t) \cdot y(t) dt$. Условия 1)–3) для скалярного произведения, очевидно, выполнены. В частности, $\forall x(t) \in C([a,b])$, имеем $(x(t) \equiv 0) \Leftrightarrow \left(\int_a^b x^2(t) dt = 0\right)$. Тогда функция $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}|| = \left(\int_a^b x^2(t) dt\right)^{1/2}$ есть норма в $C([a,b])$. Неравенство Коши – Буняковского $|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq ||\mathbf{x}|| \cdot ||\mathbf{y}||$ дает

$$\left|\int_a^b x(t) y(t) dt\right| \leq \left(\int_a^b x^2(t) dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b y^2(t) dt\right)^{1/2},$$

а неравенство Минковского $||\mathbf{x}+\mathbf{y}|| \le ||\mathbf{x}|| + ||\mathbf{y}||$ дает

$$\left(\int_a^b (x(t)+y(t))^2 dt\right)^{1/2} \le \left(\int_a^b x^2(t)dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b y^2(t)dt\right)^{1/2}.$$

О п р е д е л е н и е. *Метрическим пространством называется пара* $\{X, \rho\}$, *состоящая из множества (пространства)* X *и расстояния* ρ, *т. е. неотрицательной действительной функции* $\rho(x, y)$, *определенной на любых* x *и* y *из* X *и удовлетворяющей условиям: 1) (положительность)* $\rho(x, y) \ge 0\ \forall x, y \in X$, *причем* $(\rho(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$; *2) (симметрия)* $\rho(x, y) = \rho(y, x)\ \forall x, y \in X$; *3) (неравенство треугольника)* $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)\ \forall x, y, z \in X$.

З а м е ч а н и е. Из неравенства треугольника вытекают неравенства $\rho(x, z) \ge |\rho(x, y) - \rho(y, z)|$ и $\rho(x_1, x_m) \le \rho(x_1, x_2) + \rho(x_2, x_3) + \ldots + \rho(x_{m-1}, x_m)\ \forall x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$.

Метрическое пространство будем в дальнейшем обозначать либо как $R = \{X, \rho\}$, либо просто X.

Т е о р е м а. *Евклидово пространство* E *со скалярным произведением* $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *является метрическим пространством при* $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in$ имеем:

1) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \ge 0$, $(||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

2) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| = ||\mathbf{y} - \mathbf{x}|| = \rho(\mathbf{y}, \mathbf{x})$;

3) $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{z}|| = ||(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{z})|| \le ||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| + ||\mathbf{y} - \mathbf{z}|| = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})$.

С л е д с т в и е. Нормированное пространство E с нормой $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$ является метрическим пространством с расстоянием $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$, обладающим двумя дополнительными свойствами: а) (инвариантность относительно сдвига) $\rho(\mathbf{x} - \mathbf{a}, \mathbf{y} - \mathbf{a}) = \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a} \in E$; б) $\rho(\alpha\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y}) = |\alpha| \cdot \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y})\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E, \forall \alpha \in \mathbf{R}$.

П р и м е р ы. Числовая прямая $\mathbf{R}$ есть метрическое пространство с расстоянием $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |x - y|$ (эту метрику называют естественной в $\mathbf{R}$). Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с расстоянием $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$, есть метрическое пространство (с естественной метрикой).

§ 2. Дифференцирование и интегрирование (векторных) функций одного действительного переменного

О п р е д е л е н и е. *Пусть (числовые) функции* $x \to f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *определены на отрезке* $[a, b]$. *Тогда (векторная) функция*

$\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ $(x\to\mathbf{f}(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ *отображает отрезок* $[a,b]$ *в* n*-мерное евклидово пространство* $\mathbf{R}^n$.

Положим: 1) $\mathbf{f}\in C([a,b])$, *если* $f_i\in C([a,b])$ $(i=1,2,\dots,n)$ *и, в частности,* $\lim\limits_{x\to x_0}\mathbf{f}(x)=(\lim\limits_{x\to x_0}f_1(x),\dots,\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x))$ $(x_0\in[a,b])$;

2) $\mathbf{f}\in\mathcal{D}(x_0)$ $(x_0\in(a,b))$, *если* $f_i\in\mathcal{D}(x_0)$ $\forall i$, *причем* $\mathrm{D}\mathbf{f}(x_0)\stackrel{def}{=}(\mathrm{D}f_1(x_0),\dots,\mathrm{D}f_n(x_0))$;

3) $\mathbf{f}\in C^{(m)}((a,b))$, *если* $f_i\in C^{(m)}((a,b))$ $\forall i$, *причем* $\mathrm{D}^m\mathbf{f}(x)\stackrel{def}{=}(\mathrm{D}^mf_1(x_0),\dots,\mathrm{D}^mf_n(x_0))$;

4) $\mathbf{f}\in R[a,b]$, *если* $f_i\in R[a,b]$ $(i=1,2,\dots,n)$, *причем*

$$\int\limits_a^b\mathbf{f}(x)dx\stackrel{def}{=}\left(\int\limits_a^bf_1(x)dx,\dots,\int\limits_a^bf_n(x)dx\right);$$

5) (векторная) функция $\mathbf{F}(x)$ *есть первообразная для (векторной) функции* $\mathbf{f}(x)$ *на* $|a,b|$, *если* $\mathbf{F}\in C(|a,b|)$ *и* $\forall x\in(a,b)\setminus K_m$ $\exists\mathrm{D}\mathbf{F}(x)=\mathbf{f}(x)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{f}^{(k)}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$, $\mathbf{f}^{(k)}\in R[a,b]$ *и* $c_k\in\mathbf{R}$ *постоянные* $(k=1,2,\dots,m)$. *Тогда* $\sum\limits_{k=1}^m c_k\mathbf{f}^{(k)}\in R[a,b]$, *причем*

$$\int\limits_a^b\sum_{k=1}^m c_k\mathbf{f}^{(k)}(x)dx=\sum_{k=1}^m c_k\int\limits_a^b\mathbf{f}^{(k)}(x)dx.$$

Т е о р е м а 2 (формула Ньютона – Лейбница). *Если* $\mathbf{F}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{F}\in C([a,b])$ *есть первообразная для* $\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$, *причем* $\mathbf{f}\in R[a,b]$, *то* $\int\limits_a^b\mathbf{f}(x)dx=\mathbf{F}(b)-\mathbf{F}(a)$.

Для $\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ $(x\to\mathbf{f}(x)=(f_1(x),\dots,f_n(x))$ введем обозначения $|\mathbf{f}(x)|\equiv\|\mathbf{f}(x)\|=\sqrt{(\mathbf{f}(x),\mathbf{f}(x))}=\left(\sum\limits_{i=1}^n f_i^2(x)\right)^{1/2}$.

Т е о р е м а 3. *Пусть* $\mathbf{f}:[a,b]\to\mathbf{R}^n$ *и* $\mathbf{f}\in R[a,b]$. *Тогда* $\|\mathbf{f}\|\in R[a,b]$, *причем* $\left\|\int\limits_a^b\mathbf{f}(x)dx\right\|\le\int\limits_a^b\|\mathbf{f}(x)\|dx$, *т. е.*

$$\left(\sum_{i=1}^n\left(\int\limits_a^bf_i(x)dx\right)^2\right)^{1/2}\le\int\limits_a^b\left(\sum_{i=1}^nf_i^2(x)\right)^{1/2}dx.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f_i:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $f_i\in R[a,b]$ $\forall i$, то множество точек разрыва (числовой) функции $f_i(x)$ на $[a,b]$ (т. е.

$E_{f_i} = \{x \in [a,b] |\ \omega(f_i;x) > 0\})$ в силу критерия Лебега интегрируемости по Риману имеет меру нуль $\operatorname{mes} E_{f_i} = 0\ \forall i$. Далее, если $f_i \in C(x_0)$ $(x_0 \in [a,b])$ $\forall i$, то, учитывая равенство $|\mathbf{f}(x)| \equiv ||\mathbf{f}(x)|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2(x)\right)^{1/2}$, видим, что (числовая) функция $||\mathbf{f}|| \in C(x_0)$, то тогда, очевидно, имеем

$$E_{||\mathbf{f}||} = \{x \in [a,b] |\ \omega(||\mathbf{f}||;x) > 0\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F_{f_i}$$

и поэтому $(\operatorname{mes}(E_{f_i} = 0\,\forall i) \Rightarrow (\operatorname{mes} E_{||\mathbf{f}||} = 0)$. Замечая, что $(f_i \in B[a,b]\ \forall i) \Rightarrow (||\mathbf{f}|| \in B[a,b])$, и применяя еще раз критерий Лебега к числовой функции $||\mathbf{f}(x)||$, имеем $||\mathbf{f}|| \in R[a,b]$. Теперь для любого размеченного разбиения $T\xi$ отрезка $[a,b]$ в силу обобщенного неравенства Минковского (для нормы $\mathbf{f} \to ||\mathbf{f}|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} f_i^2(x)\right)^{1/2}$, имеем оценку

$$||S_{\mathbf{f}}(T\xi)|| = \left|\left|\sum_{k=1}^{m} \mathbf{f}(\xi_k) \cdot \Delta x_k\right|\right| \le \sum_{k=1}^{m} ||\mathbf{f}(\xi_k)|| \cdot \Delta x_k = S_{\mathbf{f}}(T\xi). \qquad (2.1)$$

В силу свойств евклидовой нормы имеем

$$\left| ||S_{\mathbf{f}}(T\xi)|| - \left|\left| \int_a^b \mathbf{f}(x)dx \right|\right| \right| \le \left|\left| S_{\mathbf{f}}(T\xi) - \int_a^b \mathbf{f}(x)dx \right|\right| \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| S_{f_i}(T\xi) - \int_A^b f_i(x)dx \right|.$$

Но $(\mathbf{f} \in R[a,b]) \Rightarrow (f_i \in R[a,b]\ (i = 1,2,\ldots,n))$, так что

$$\lim_{d(T)\to 0} S_{f_i}(T\xi) = \int_a^b f_i(x)dx\ (i = 1,2,\ldots,n)$$

и поэтому существует

$$\lim_{d(T)\to 0} \left| ||S_{\mathbf{f}}(T\xi)|| - \left|\left| \int_a^b \mathbf{f}(x)dx \right|\right| \right| = 0,$$

т. е.

$$\exists \lim_{d(T)\to 0} ||S_{\mathbf{f}}(T\xi)|| = \left|\left| \int_a^b \mathbf{f}(x)dx \right|\right|.$$

Далее,

$$(||\mathbf{f}|| \in R[a,b]) \Rightarrow \left(\exists \lim_{d(T)\to 0} S_{||\mathbf{f}||}(T\xi) = \int_a^b ||\mathbf{f}(x)||dx \right),$$

но тогда можно перейти к пределу по базе $d(T) \to 0$ в неравенстве (2.1), что и дает оценку

$$\left\| \int_a^b \mathbf{f}(x)dx \right\| \le \int_a^b ||\mathbf{f}(x)||dx.$$

§ 3. Векторные функции ограниченной вариации

О п р е д е л е н и е. *Пусть (векторная) функция* $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ $(x \to \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ *определена на отрезке* $[a,b]$ *и* $T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = b\}$ *- любое разбиение отрезка* $[a,b]$. *Тогда величина* $\bigvee_a^b \mathbf{f} = \sup_T \sum_{k=1}^m ||\Delta \mathbf{f}_k||$, *где* $\Delta \mathbf{f}_k = \mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_{k-1})$, *называется полной вариацией (векторной) функции* $\mathbf{f}(x)$ *на отрезке* $[a,b]$. *Если* $\bigvee_a^b \mathbf{f} < +\infty$, *то говорят, что* $\mathbf{f}(x)$ *- (векторная) функция ограниченной вариации на отрезке* $[a,b]$. Запись: $\mathbf{f} \in \bigvee[a,b]$. В частности, для числовой функции $x \to f(x) \in \mathbf{R}$, определенной на $[a,b]$, получаем $\bigvee_a^b f = \sup_T \sum_{k=1}^m |\Delta f_k|$, где $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$. Запись: $f \in \bigvee[a,b]$.

З а м е ч а н и е 1. Если $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ и $f \in H_1[a,b]$, то $f \in \bigvee[a,b]$. В самом деле, для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$(f \in H_1[a,b] = \mathrm{Lip}[a,b]) \Rightarrow (\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| \le$$

$$\le K \sum_{k=1}^m \Delta x_k = K(b-a) < +\infty) \Rightarrow (\bigvee_a^b f \le K(b-a) < +\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f \in \bigvee[a,b]).$$

З а м е ч а н и е 2. Если $f : [a,b] \to \mathbf{R}$ и $f \in M[a,b]$, то $f \in \bigvee[a,b]$. В самом деле, пусть $f \in M[a,b]$, тогда для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^m |f(x_k) - f(x_{k-1})| = \left| \sum_{k=1}^m (f(x_k) - f(x_{k-1}) \right| = |f(b) - f(a)| \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\bigvee_a^b f = |f(b) - f(a)| < +\infty\right) \Rightarrow (f \in \bigvee[a, b]).$$

З а м е ч а н и е 3. Пусть $f : [a, b] \to \mathbf{R}$, тогда $(f \in \bigvee[a, b]) \Rightarrow (f \in B[a, b])$.

В самом деле, $(|f(x)| \leq |f(a)| + |f(x) - f(a)| \leq |f(a)| + \bigvee_a^b f < +\infty$ $\forall x \in [a, b]) \Rightarrow (f \in B[a, b])$.

З а м е ч а н и е 4. Из $f \in C([a, b])$, вообще говоря, не следует, что $f \in \bigvee[a, b]$.

П р и м е р. Для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\pi/x), & 0 < x \leq 2, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (f \in C([0, 2]))$$

рассмотрим разбиение

$$T_n = \{0, 2/(2n-1), 2/(2n-3), \ldots, 2/5, 2/3, 2\},$$

так что

$$x_k = 2/(2n + 1 - 2k)\ (k = 1, 2, \ldots, n-1),\ x_0 = 0.$$

Тогда имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1}| = 2/(2n-1) +$$

$$+(2/(2n-1) + 2/(2n-3)) + \ldots + (2/5 + 2/3) +$$

$$+(2/3 + 2) > 1/2 + 1/3 + \ldots + 1/n.$$

Но по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$\ln(k+1) - \ln k = 1/(k + \vartheta) \leq 1/k,\ \vartheta \in (0, 1),$$

поэтому

$$\left(\bigvee_0^2 f \geq \sum_{k=2}^{n} 1/k \geq \sum_{k=2}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=2}^{n} 1/k = +\infty\right) \Rightarrow \left(\bigvee_0^2 f = +\infty\right) \Rightarrow (f \overline{\in} \bigvee[0, 2]).$$

Т е о р е м а. *Пусть числовые функции* $f, g \in \bigvee[a, b]$ *и* $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$. *Тогда* $\lambda \cdot f + \mu \cdot g$, $f \cdot g \in \bigvee[a, b]$; *причем*

$$\bigvee_a^b (\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| \bigvee_a^b f + |\mu| \bigvee_a^b g.$$

В частности, $\bigvee[a,b]$ есть кольцо относительно обычных операций сложения и умножения.

Доказательство. Поскольку $f, g \in \bigvee[a,b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ имеем

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\Delta(\lambda\cdot f+\mu\cdot g)_k| = \sum_{k=1}^{m}|\lambda\Delta f_k+\mu\Delta g_k| \le\right.$$

$$\left.\le|\lambda|\sum_{k=1}^{m}|\Delta f_k|+|\mu|\sum_{k=1}^{m}|\Delta g_k| \le |\lambda|\bigvee_a^b f+|\mu|\bigvee_a^b g\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\bigvee_a^b(\lambda f+\mu g) \le |\lambda|\bigvee_a^b f+|\mu|\bigvee_a^b g<+\infty\right) \Rightarrow (\lambda f+\mu g\in\bigvee[a,b]).$$

Далее, поскольку f и g – числовые функции, то определена числовая функция $f\cdot g$, причем $(f,g\in\bigvee[a,b]) \Rightarrow (f,g\in B[a,b])$, т. е. существуют постоянные A и B такие, что $|f(x)|\le A$, $|g(x)|\le B$ $\forall x\in[a,b]$, откуда

$$\left(\sum_{k=1}^{m}|\Delta(f\cdot g)_k| = \sum_{k=1}^{m}|f(x_k)\Delta g_k+g(x_{k-1})\Delta f_k| \le\right.$$

$$\left.\le A\sum_{k=1}^{m}|\Delta g_k|+B\sum_{k=1}^{m}|\Delta f_k| \le A\bigvee_a^b g+B\bigvee_a^b f\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\bigvee_a^b(f\cdot g) \le A\bigvee_a^b g+B\bigvee_a^b f<+\infty\right) \Rightarrow (f\cdot g\in\bigvee[a,b]).$$

Замечание. Класс $M[a,b]$ не образует кольца относительно сложения и умножения. В самом деле, хотя $x, x^2 \in M[0,1]$, но $x - x^2 \overline{\in} M[0,1]$, далее, $x\in M[-1,1]$, но $x^2\overline{\in}M[-1,1]$.

Теорема Жордана. *Пусть $f:[a,b]\to\mathbf{R}$. Тогда $(f\in\bigvee[a,b])$ $\Leftrightarrow$ $(f=f_1-f_2$, где $f_1\uparrow$ и $f_2\uparrow$ на $[a,b])$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть $f=f_1-f_2$, где числовые функции $f_1\uparrow$ и $f_2\uparrow$ на $[a,b]$. Тогда $(f_1,f_2\in M[a,b]\subset\bigvee[a,b])$ $\Rightarrow (f=f_1-f_2\in\bigvee[a,b])$, поскольку $\bigvee[a,b]$ есть кольцо.

Необходимость. Пусть $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ и $f\in\bigvee[a,b]$. Положим $v_f(x)=\bigvee\limits_a^x f$ при $a<x\le b$ и $v_f(a)=0$. Далее, положим $f_1(x)=\frac{1}{2}(v_f(x)+f(x))$, $f_2(x)=\frac{1}{2}(v_f(x)-f(x))$. Очевидно, $f=f_1-f_2$. Докажем, что $f_1\uparrow$ и $f_2\uparrow$ на $[a,b]$. Пусть $x_1,x_2\in[a,b]$ любые, причем $x_1<x_2$, тогда имеем оценку

$$v_f(x_1)+|f(x_2)-f(x_1)| \le \bigvee_a^{x_2} f = v_f(x_2).$$

В самом деле, поскольку

$$v_f(x_1) = \sup_{T[a,x_1]} \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k|,$$

то $\forall \varepsilon > 0$ существует разбиение T_1 отрезка $[a, x_1]$ такое, что

$$v_f(x_1) < \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k| + \varepsilon,$$

и тогда

$$v_f(x_1) + |f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon + \sum_{k=1}^{m} |\Delta f_k| +$$

$$+ |f(x_2) - f(x_1)| \le \varepsilon + \bigvee_a^{x_2} f = \varepsilon + v_f(x_2).$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем оценку, из которой имеем

$$|f(x_2) - f(x_1)| \le v_f(x_2) - v_f(x_1).$$

Но тогда

$$2(f_1(x_2) - f_1(x_1)) = v_f(x_2) - v_f(x_1) + f(x_2) - f(x_1) \ge$$

$$\ge v_f(x_2) - v_f(x_1) - |f(x_2) - f(x_1)| \ge 0,$$

т. е. $f_1 \uparrow$ на $[a, b]$. Аналогично

$$2(f_2(x_2) - f_2(x_1)) = v_f(x_2) - v_f(x_1) - (f(x_2) - f(x_1)) \ge$$

$$\ge v_f(x_2) - v_f(x_1) - |f(x_2) - f(x_1)| \ge 0,$$

т. е. $f_2 \uparrow$ на $[a, b]$.

Следствие. Если числовая функция $f \in \bigvee[a, b]$, то она может иметь разрывы только 1-го рода, причем множество ее точек разрыва не более чем счетно.

Следствие. $\bigvee[a, b] \subset R[a, b]$.

Перейдем теперь к (векторным) функциям $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ ($x \to \mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$ ограниченной вариации.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$. *Тогда*

$$(\mathbf{f} \in \bigvee[a, b]) \Leftrightarrow (f_i \in \bigvee[a, b]\ (i = 1, 2, \ldots, n)),$$

где $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, *причем*

$$\bigvee_a^b f_i \le \bigvee_a^b \mathbf{f} \le \sum_{j=1}^{n} \bigvee_a^b f_j \ (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Доказательство. Для любого разбиения $T = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a, b]$ в силу неравенства

$$|a_j| \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} \le \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

имеем оценки $\forall i$

$$|f_i(x_k) - f_i(x_{k-1})| \le ||\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_{k-1})|| \le \sum_{j=1}^{n} |f_j(x_k) - f_j(x_{k-1})|,$$

откуда и вытекают утверждения теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$, $a < c < b$ *и* $\mathbf{f} \in \bigvee[a, c]$, $\mathbf{f} \in \bigvee[c, b]$. *Тогда* $\mathbf{f} \in \bigvee[a, b]$, *причем* $\bigvee_a^b \mathbf{f} = \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{f} \in \bigvee[a, c]$ и $\mathbf{f} \in \bigvee[c, b]$, то для любого разбиения $T' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = c < x_{p+1} < \ldots < x_m = b\}$ отрезка $[a, b]$, содержащего точку c, имеем

$$\sum_{k=1}^{m} ||\Delta \mathbf{f}_k|| = \sum_{k=1}^{p} ||\Delta \mathbf{f}_k|| + \sum_{k=p+1}^{m} ||\Delta \mathbf{f}_k|| \le \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}.$$

Но $\forall$ разбиения T отрезка $[a, b]$ при добавлении точки c в качестве точки деления получаем $T' \prec T$ и при $x_{p-1} = x'_{p-1} < c = x'_p < x'_{p+1} = x_p$ имеем оценку сверху

$$||\mathbf{f}(x_p) - \mathbf{f}(x_{p-1})|| \le ||\mathbf{f}(x'_{p+1}) - \mathbf{f}(x'_p)|| + ||\mathbf{f}(x'_p) - \mathbf{f}(x'_{p-1})||,$$

откуда

$$\sum_{T} ||\Delta \mathbf{f}_k|| \le \sum_{T'} \Delta \mathbf{f}_{k'}|| \le \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}, \text{ т. е. } \bigvee_a^b \mathbf{f} \le \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}.$$

Далее, $\forall \varepsilon > 0$ существуют разбиения $T'_1[a, c]$ и $T'_2[c, b]$ такие, что $\sum_{T'_1[a,c]} ||\Delta \mathbf{f}_k|| > \bigvee_a^c \mathbf{f} - \varepsilon/2$ и $\sum_{T'_2[c,b]} ||\Delta \mathbf{f}_l|| > \bigvee_c^b \mathbf{f} - \varepsilon/2$. Поэтому для составного разбиения $T'[a, b] = \{T'_1, T'_2\}$ имеем

$$\bigvee_a^b \mathbf{f} \ge \sum_{T'[a,b]} ||\Delta \mathbf{f}_k|| \ge (\bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}) - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем оценку снизу

$$\left(\bigvee_a^b \mathbf{f} \ge \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}\right) \Rightarrow \left(\bigvee_a^b \mathbf{f} = \bigvee_a^c \mathbf{f} + \bigvee_c^b \mathbf{f}\right).$$

Т е о р е м а 3. *Пусть (векторная) функция* $\mathbf{f} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ *является первообразной на отрезке* $[a,b]$ *для (векторной) функции* $\mathbf{g} \in R[a,b]$. *Тогда* $\bigvee\limits_a^b \mathbf{f} = \int\limits_a^b ||\mathbf{g}(x)||dx$, $\mathbf{f} \in \bigvee[a,b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. $(\mathbf{g} \in R[a,b]) \Rightarrow (||\mathbf{g}|| \in R[a,b])$. Далее, поскольку $\mathbf{f} \in C([a,b])$ есть первообразная для (векторной) функции $\mathbf{g} \in R[a,b]$, то для любого разбиения T отрезка $[a,b]$, применяя обобщенную формулу Ньютона–Лейбница к частичным отрезкам разбиения $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, имеем

$$\sum_{k=1}^m ||\Delta \mathbf{f}|| = \sum_{k=1}^m \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbf{g}(t)||dt \right|\right| \le \sum_{k=1}^m \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(t)||dt = \int\limits_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt,$$

откуда $\bigvee\limits_a^b \mathbf{f} \le \int\limits_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt$. Далее, $(\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in R[a,b]) \Rightarrow (g_i \in R[a,b]) \forall i$ и в силу критерия Дарбу интегрируемости по Риману $\forall \varepsilon > 0$ существуют разбиения $T^{(i)}$ отрезка $[a,b]$ такие, что $\Omega_{g_i}(T^{(i)}) < \varepsilon$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Очевидно, для составного разбиения $T_0 = \{T^{(1)}, \ldots, T^{(n)}\}$ имеем $T_0 \prec T^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и поэтому

$$\Omega_g(T_0) = \sum_{k=1}^m \omega_k(g_i)\Delta x_k < \varepsilon \, \forall i.$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница и неравенство Минковского, имеем $(||\mathbf{a} - \mathbf{b}|| \ge ||\mathbf{a}|| - ||\mathbf{b}||)$ оценку снизу

$$||\mathbf{f}(x_k) - \mathbf{f}(x_{k-1})|| = \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbf{g}(t)dt \right|\right| = \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (\mathbf{g}(x_k) - (\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t)))dt \right|\right| =$$

$$= \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbf{g}(x_k)dt - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t))dt \right|\right| \ge \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} \mathbf{g}(x_k)dt \right|\right| -$$

$$- \left|\left| \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} (\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t))dt \right|\right| \ge ||\mathbf{g}(x_k)||\Delta x_k - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t)||dt =$$

$$= \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(x_k)||dt - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t)||dt = \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(t) - (\mathbf{g}(t) -$$

$$-\mathbf{g}(x_k))||dt - \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(x_k) - \mathbf{g}(t)||dt \geq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(t)||dt -$$

$$-2\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(x_k)||dt.$$

Но

$$||\mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(x_k)|| \leq \sum_{i=1}^{n} |g_i(t) - g_i(x_k)| \leq \sum_{i=1}^{n} \omega_k(g_i)\, \forall t \in [x_{k-1}, x_k],$$

где $\omega_k(g_i) = \omega(g_i; [x_{k-1}, x_k])$, откуда

$$||\Delta \mathbf{f}_k|| \geq \int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} ||\mathbf{g}(t)||dt - 2\sum_{i=1}^{n} \omega_k(g_i) \cdot \Delta x_k.$$

Поэтому в силу выбора разбиения T_0 имеем оценку снизу

$$\bigvee_a^b \mathbf{f} \geq \sum_{k=1}^{m} ||\Delta \mathbf{f}_k|| \geq \int_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt -$$

$$-2\sum_{i=1}^{n} \Omega_{g_i}(T_0) \geq \int_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt - 2n\varepsilon,$$

откуда в силу произвольности $\varepsilon > 0$ имеем

$$\left(\bigvee_a^b \mathbf{f} \geq \int_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt\right) \Rightarrow \left(\bigvee_a^b \mathbf{f} = \int_a^b ||\mathbf{g}(t)||dt\right).$$

С л е д с т в и е. Если $\mathbf{f} : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ и $\mathbf{f} \in \mathcal{D}([a, b])$, причем $\mathbf{Df} \in R[a, b]$ (где $\mathbf{Df}(x) = (\mathbf{D}f_1(x), \ldots, \mathbf{D}f_n(x))$), то $\bigvee_a^b \mathbf{f} = \int_a^b ||\mathbf{Df}(x)||dx$ (в частности, это равенство имеет место, если функция $\mathbf{f} \in C([a, b])$ имеет ограниченную кусочно-непрерывную производную $\mathbf{Df}(x)$ на $[a, b]$.

§ 4. Пути и кривые в $\mathbf{R}^n$

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ с декартовой системой прямоугольных координат $\{x\} \equiv \{(x_1, \ldots, x_n)\}$. Пусть промежуток $I_t \subset \mathbf{R}^1$ является или интервалом $\overset{\circ}{I} = (a, b)$, или отрезком $I = [a, b]$.

О п р е д е л е н и е. *(Непрерывным) путем (1-путем) φ в $\mathbf{R}^n$ называется непрерывное отображение $\varphi : I_t \to \mathbf{R}^n$, где $t \in I_t$, $\varphi(t) =$*

$(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$; $x = \varphi(t) \in \mathbf{R}^n$, $x_i = \varphi_i(t) \subset \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *так что* $\varphi \in C(I_t)$. *Образ* $\Gamma = \varphi(I_t) \subset \mathbf{R}^n$ *называется носителем или следом этого пути. Если* $I_t = [a, b]$ *есть отрезок, то путь* φ *называется замкнутым, а точки* $\varphi(a)$ *и* $\varphi(b)$ *(из* $\mathbf{R}^n$*) называются соответственно началом и концом пути* φ.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $I_t = |a, b|$ *и* $I_\tau = |\alpha, \beta|$ *- два промежутка из* $\mathbf{R}^1$, *причем оба они или открыты, или оба замкнуты. Тогда функция* $t : I_\tau \to I_t$, $t = t(\tau)$, $\tau \in I_\tau$ *называется допустимым преобразованием параметра (от* I_τ *к* I_t*), если 1) отображение* $t : I_\tau \to I_t$ *есть гомеоморфизм, так что существует обратное отображение* $\tau \equiv t^{-1} : I_t \to I_\tau$, *причем* $t \in C(I_\tau)$, $\tau \equiv t^{-1} \in C(I_t)$; *2)* $I_t = t(I_\tau)$ *и* $I_\tau = \tau(I_t)$; *3)* $t(\tau) \uparrow\uparrow$ *на* I_τ, $\tau(t) \uparrow\uparrow$ *на* I_t, *причем* $t(\alpha) = a$ *и* $t(\beta) = b$, *если* I_τ *и* I_t *есть отрезки.*

З а м е ч а н и е. Если отображение $t : I_\tau \to I_t$ является допустимым преобразованием параметра (от I_τ к I_t), то обратное отображение $\tau \equiv t^{-1} : I_t \to I_\tau$ является допустимым преобразованием параметра от I_t к I_τ. Если отображения $t : I_\tau \to I_t$ и $\lambda : I_t \to I_\lambda$ - допустимые преобразования параметра, то композиция $\lambda \circ t : I_\tau \to I_t$ также является допустимым преобразованием параметра (от I_τ к I_λ).

С л е д с т в и е. Если $\varphi : I_t \to \mathbf{R}^n$ есть путь в $\mathbf{R}^n$ и функция $t : I_\tau \to I_t$ осуществляет допустимое преобразование параметра (от I_τ к I_t), то отображение $\psi : I_\tau \to \mathbf{R}^n$, где $\psi = \varphi \circ t$, $\varphi = \psi \circ \tau$ есть (непрерывный) путь в $\mathbf{R}^n$, причем $\psi(I_\tau) = \varphi(I_t) = \Gamma \subset \mathbf{R}^n$, так что носители обоих путей φ и ψ совпадают как множества в $\mathbf{R}^n$. (Если путь φ замкнут, то и путь ψ замкнут, причем для $I_t = [a, b]$, $I_\tau = [\alpha, \beta]$ имеем $\psi(\alpha) = \varphi \circ t(\alpha) = \varphi(a)$, $\psi(\beta) = \varphi \circ t(\beta) = \varphi(b)$, т. е. в этом случае пути φ и ψ имеют общее начало и общий конец).

$$\begin{array}{ccccc} & I_t & \overline{\varphi = \psi \circ \tau} & \downarrow & \\ \tau \equiv t^{-1} & \downarrow\uparrow t & & & \Gamma \\ & I_\tau & \underline{\psi = \varphi \circ t} & \uparrow & \end{array}$$

О п р е д е л е н и е. *Пути (в* $\mathbf{R}^n$*)* $\varphi : I_t \to \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ *и* $\psi : I_\tau \to \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ *называются эквивалентными (запись:* $\varphi \sim \psi$*), если существует допустимое преобразование параметра* $t : I_\tau \to I_t$, *такое, что* $\psi = \varphi \circ t$, $\varphi = \psi \circ t^{-1}$.

З а м е ч а н и е. Введенное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, поскольку оно обладает свойствами: 1) рефлексивности $\varphi \sim \varphi$; 2) симметричности $(\varphi \sim \psi) \Rightarrow (\psi \sim \varphi)$ и 3) транзитивности $(\varphi \sim \psi) \wedge (\psi \sim \vartheta) \Rightarrow (\varphi \sim \vartheta)$. (Проверить самостоятельно.)

Но тогда введенное отношение эквивалентности путей в $\mathbf{R}^n$ разбивает множество всех непрерывных путей в $\mathbf{R}^n$ на классы эквивалентности: классу эквивалентности произвольного пути φ принадлежат те пути, которые ему эквивалентны. Таким образом, каждый путь в $\mathbf{R}^n$

принадлежит одному из классов эквивалентности и пересечение двух различных классов эквивалентности пусто.

З а м е ч а н и е. Если отображения (пути) $\varphi : I_t \to \Gamma$ и $\psi : I_\tau \to \Gamma$ биективны и $\varphi \sim \psi$, то допустимое преобразование параметра $t : I_\tau \to I_t$, для которого $\psi = \varphi \circ t$, определяется однозначно. В самом деле, если $\lambda : I_\tau \to I_t$ – также допустимый гомеоморфизм, то, используя биективность отображения φ, имеем $\psi(\tau) = \varphi \circ t(\tau) = \varphi \circ \lambda(\tau)$, откуда

$$(\varphi \circ t = \varphi \circ \lambda) \Rightarrow (t(\tau) = \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \lambda(\tau)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t(\tau) = \lambda(\tau)\, \forall \tau \in I_\tau) \Rightarrow (t \equiv \lambda).$$

П р и м е р. Рассмотрим следующие пути в $\mathbf{R}^n$:
$\varphi_1 : [0,1] = I_1 \to [0,1], x = t_1$;
$\varphi_2 : [0,\pi/2] = I_2 \to [0,1], x = \sin t_2$;
$\varphi_3 : [0,\pi/2] = I_3 \to [0,1], x = \cos t_3$;
$\varphi_4 : [0,\pi] = I_4 \to [0,1], x = \sin t_4$.

Заметим, что $\varphi_i(I_i) = [0,1] = \Gamma$ $(i = 1,2,3,4)$, т. е. все пути имеют в $\mathbf{R}^1$ один и тот же носитель. Далее, при $t_2 : I_1 = [0,1] \to [0,\pi/2] = I_2$, $t_2 = \arcsin t_1$, имеем $t_2 \in C([0,1])$, $t_2(t_1) \uparrow\uparrow$ на $I_1 = [0,1]$ и $t_2(I_1) = I_2$, поэтому $t_2 : I_1 \to I_2$ дает допустимое преобразование параметра (от I_1 к I_2), кроме того, $\varphi_1 = \varphi_2 \circ t_2$, т. е. $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Далее, $t_3 : I_1 = [0,1] \to [0,\pi/2] = I_3$, $t_3 = \arccos t_1$, $t_3 \in C([0,1])$, $t_3(t_1) \downarrow\downarrow$ на $I_1 = [0,1]$, поэтому отображение $t_3 : I_1 \to I_3$ не является допустимым преобразованием параметра (от I_1 к I_3) и, хотя $\varphi_1 = \varphi_3 \circ t_3$, тем не менее в силу биективности отображений φ_1 и φ_3, пути φ_1 и φ_3 не эквивалентны (иначе в силу замечания гомеоморфизм t_3 был бы допустим преобразованием параметра). Аналогично показывается, что $\varphi_4 \not\sim \varphi_1$ и $\varphi_4 \not\sim \varphi_3$.

О п р е д е л е н и е. *Кривой (1-поверхностью) Φ в $\mathbf{R}^n$ называется класс эквивалентности 1-путей (с представителем 1-путем $\varphi : I_t \to \Gamma = \varphi(I_t) \subset \mathbf{R}^n$).*

З а м е ч а н и е. Понятие носителя (следа) данной кривой Φ в $\mathbf{R}^n$ определяется однозначно, так как все пути, входящие в класс эквивалентности Φ, имеют один и тот же носитель. Аналогичным образом понятия «замкнутая» кривая, начало и конец кривой Φ не зависят от выбора пути (т. е. не зависят от выбора «параметризации»).

О п р е д е л е н и е. *Пусть $\varphi : I_t \to \mathbf{R}^n$ и $\psi : I_\tau \to \mathbf{R}^n$ – два пути в $\mathbf{R}^n$. Будем писать $\varphi = -\psi$ или $\psi = -\varphi$, если существует такой гомеоморфизм $t : I_\tau \to I_t$, что: 1) $t \in C(I_\tau)$ $t = t(\tau) \in I_t$, $\tau \equiv t^{-1} \in C(I_t)$; 2) $t(I_\tau) = I_t$; 3) $t(\tau) \downarrow\downarrow$ на I_t и 4) $\psi = \varphi \circ t$, $\varphi = \psi \circ t^{-1}$.*

З а м е ч а н и е. Поскольку $\varphi(I_t) = \psi(t^{-1}(I_t)) = \psi(I_\tau) = \Gamma \subset \mathbf{R}^n$, то носители обоих путей φ и $\psi = -\varphi$ совпадают как множества в $\mathbf{R}^n$. Если путь φ замкнут (т. е. $I_\tau = [a,b]$), то путь $\psi = -\varphi$ также замкнут (т. е. $I = [\alpha,\beta]$), причем $\psi(\alpha) = \varphi \circ t(\alpha) = \varphi(b)$; $\psi(\beta) = \varphi \circ t(\beta) = \varphi(a)$

так, что начало $\varphi(a)$ пути φ является концом $\varphi(\beta)$ пути $\psi = -\varphi$ и, наоборот, конец $\varphi(b)$ пути φ совпадает с началом $\psi(\alpha)$ пути $\psi = -\varphi$.

Замечание. Если отображение $\varphi : I_t \to \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ не биективно, то возможно равенство $\varphi = -\psi$. Так будет для постоянного отображения (пути) $\varphi : I_t \to c \subset \mathbf{R}^n$ и для пути φ_4 из приведенного ранее примера. (В самом деле, если $\varphi_4 : [0, \pi] \to [0, 1]$, $\varphi_4(t) = \sin t$ и $\psi : [0, \pi] \to [0, 1]$, $\psi(\tau) = \sin(\pi - \tau)$, то при гомеоморфизме $t = \tau$ имеем $\varphi_4 = \psi$, а при гомеоморфизме $\tau = \pi - t$, $\tau : [0, \pi] \to [0, \pi]$ имеем $\varphi_4 = -\psi$.)

Следствие. Если для двух путей φ и ψ имеем $\varphi = -\psi$, то для любых путей φ^* и ψ^* таких, что $\varphi^* \sim \varphi$ и $\psi^* \sim \psi$, имеем $\varphi^* = -\psi^*$. (Докажите это самостоятельно.) Но тогда можно говорить о кривых Φ и Ψ таких, что $\Phi = -\Psi$.

Замечание. Если $\Phi = -\Psi$, то скажем, что кривые Φ и Ψ имеют противоположную ориентацию, отметим, что при этом носители в $\mathbf{R}^n$ кривых Φ и $\Psi = -\Phi$ совпадают как множества в $\mathbf{R}^n$.

Пример. Пути $\varphi_1 : [0, 1] \to [0, 1]$, $x = t_1$ и $\varphi_3 : [0, \pi/2] \to [0, 1]$, $x = \cos t_3$, рассмотренные ранее, имеют противоположную ориентацию, так как $t_3 : [0, 1] \to [0, \pi/2]$, $t_3 = \arccos t_1$, $t_3 \in C([0, 1])$, $t_3 \downarrow\downarrow$ на $[0, 1]$ и $\varphi_1 = \varphi_3 \circ t_3$, т. е. $\varphi_3 = -\varphi_1$.

Пусть замкнутые пути φ_1 и φ_2 таковы, что $\varphi_i : I_i = [\alpha_i, \beta_i] \to \mathbf{R}^n$, причем $\varphi_1(\beta_1) = \varphi_2(\alpha_2)$, т. е. конец пути φ_1 совпадает с началом пути φ_2. Для того чтобы определить «сумму» путей $\varphi_1 + \varphi_2$, введем отрезок $I_2' = [\beta_1, \beta_1 + (\beta_2 - \alpha_2)]$ и допустимое преобразование параметра $\tau \to t(\tau)$ (от I_2' к I_2) $t : I_2' \to I_2$, $t(\tau) = \tau - \beta_1 + \alpha_2$, $t(\beta_1) = \alpha_2$. Тогда $I = I_1 \cup I_2' = [\alpha_1, \beta_1 + \beta_2 - \alpha_2]$. Положим теперь

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \varphi_1(\tau), \ \tau \in I_1, \\ (\varphi_2 \circ t)(\tau), \ \tau \in I_2'. \end{cases}$$

Тогда $(\varphi_1 \in C(I_1)) \Rightarrow (\varphi \in C(I_1))$, $(\varphi_2 \circ t \in C(I_2')) \Rightarrow (\varphi \in C(I_2'))$, и поскольку $\varphi_1(\beta_1) = (\varphi_2 \circ t)(\beta_1) = \varphi_2(\alpha_2)$, то $\varphi \in C(\beta_1)$, откуда имеем $\varphi \in C(I)$. Но тогда $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$ есть путь в $\mathbf{R}^n$, причем начало пути φ совпадает с началом пути φ_1, а конец пути φ совпадает с концом пути φ_2, причем для носителя пути φ имеем

$$\Gamma = \varphi(I) = \varphi_1(I_1) \cup \varphi_2(I_2) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2.$$

Кривую Φ будем называть суммой кривых Φ_1 и Φ_2 и обозначать через $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. По индукции можно определить сумму конечного числа кривых $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ при условии, что для $k = 1, 2, \ldots, m - 1$ конец кривой Φ_k совпадает с началом кривой Φ_{k+1}.

Определение. *Замкнутая кривая Φ называется замкнутым контуром (в $\mathbf{R}^n$), если ее конец совпадает с ее началом.*

О п р е д е л е н и е. *Пусть отображение* $\varphi : I \to \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ *(где* $\varphi \in C(I)$*) биективно, тогда путь* φ *называется жордановым. Кривая* Φ *при этом также называется жордановой (или простой дугой).*

О п р е д е л е н и е. *Замкнутый контур* Φ *называется жордановым (или простым), если для кривой* Φ *существует замкнутый путь* $\varphi : [a, b] \to \mathbf{R}^n$ *(представитель кривой* Φ*) такой, что отображение* $\varphi : [a, b) \to \Gamma \setminus \varphi(b)$ *биективно, причем* $\varphi(a) = \varphi(b)$.

Положим $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in \mathbf{R}^n$, $t \in I$ и через $\mathbf{r}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i(t)\mathbf{e}_i$ обозначим вектор из линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

О п р е д е л е н и е. *Путь* $r : I \to \mathbf{R}^n$ *называется непрерывно дифференцируемым, если* $\mathbf{r} \in C^{(1)}(I)$.

О п р е д е л е н и е. *Непрерывно дифференцируемый путь* $r : I \to \mathbf{R}^n$ *называется гладким, если*

$$||\mathrm{D}\mathbf{r}(t)|| = \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}x_i(t))^2\right)^{1/2} > 0 \,\forall t \in I.$$

О п р е д е л е н и е. *Кривая* Φ *называется гладкой, если существует хоть один гладкий путь* φ*, входящий в класс эквивалентности, определяемый кривой* Φ.

О п р е д е л е н и е. *Кривая* Φ *называется кусочно-гладкой, если* $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{m} \Phi_k$*, где* Φ_k *– гладкие кривые* $\forall k$.

З а м е ч а н и е. При введенном ранее определении отношения эквивалентности $\sim$ гладкая кривая Φ может иметь своим представителем непрерывно дифференцируемый, но не гладкий путь $r : \mathcal{F} \to \mathbf{R}^n$.

П р и м е р. Рассмотрим путь $r : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$, $r(t) = (t, t)$, так что, полагая $x = t$, $y = t$, имеем $r : y = x$, $-1 \le x \le 1$. Поскольку $\mathrm{D}r(t) = (1, 1) \neq (0, 0)$, то путь r – гладкий, с другой стороны, допустима замена $t : [-1, 1] \to [-1, 1]$, $t(\tau) = \tau^3$, приводящая к пути $\rho : [-1, 1] \to \mathbf{R}^2$ $(r \sim \rho)$, где $\rho(\tau) = (r \circ t)(\tau) = (\tau^3, \tau^3)$, $\mathrm{D}\rho(\tau) = 3(\tau^2, \tau^2)$, причем $\mathrm{D}\rho(0) = (0, 0)$, т. е. путь ρ – непрерывно дифференцируемый, но не гладкий.

В дальнейшем при рассмотрении гладких кривых в $\mathbf{R}^n$ мы изменим данное ранее определение «допустимого» преобразования параметра (от I_τ к I_t), заменив в нем условие 3) $t(\tau) \uparrow\uparrow$ на I_τ на более жесткое условие 3') $\forall \tau \in I_\tau \; \exists \mathrm{D}t(\tau) > 0$.

§ 5. Длина кривой в $\mathbf{R}^n$

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ *есть замкнутый путь в* $\mathbf{R}^n$ $(r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)))$. *Для любого разбиения* $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ *отрезка* $[\alpha, \beta]$ *положим* $r_k = r(t_k) \in r([\alpha, \beta]) \subset \mathbf{R}^n$. *Тогда длиной «ломаной» в* $\mathbf{R}^n$ *с вершинами в точках* r_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ *называется величина*

$$l_T(r) = \sum_{k=1}^{m} ||\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}|| = \sum_{k=1}^{m} ||\mathbf{r}(t_k) - \mathbf{r}(t_{k-1})||$$

(где r_k *– точка в аффинном пространстве* $\mathbf{R}^n$, *а* $\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_{k-1}$ *– вектор в линейном пространстве* $\mathbf{R}^n$ *с началом в точке* r_{k-1} *и концом в точке* r_k*). Очевидно,* $\sup\limits_T l_T(r) = \bigvee\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}$ *(где вектор* $\mathbf{r}$ *из линейного пространства* $\mathbf{R}^n$ *соответствует точке* $r = O + \mathbf{r}$ *из аффинного пространства* $\mathbf{R}^n$*).*

О п р е д е л е н и е. *Длиной замкнутого пути* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ *называется величина* $l(r) = \bigvee\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{r}$. *Путь* r *называется спрямляемым, если* $l(r) < +\infty$.

Т е о р е м а (критерий спрямляемости замкнутого пути). *Пусть в* $\mathbf{R}^n$ *задан замкнутый путь* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$, *где* $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. *Тогда* $(l(r) < +\infty) \Leftrightarrow (x_i \in \bigvee[\alpha, \beta]\ (i = 1, 2, \ldots, n))$. (Утверждения теоремы следуют из теоремы 1 §3.)

Т е о р е м а. *Пусть* $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$ *есть непрерывно дифференцируемый путь в* $\mathbf{R}^n$, *т. е.* $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ *и* $\mathbf{r} \in C^{(1)}([\alpha, \beta])$. *Тогда путь* r *спрямляем и для его длины имеем формулу*

$$l(r) = \int_{\alpha}^{\beta} ||\mathrm{D}\mathbf{r}(t)||dt = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}x_i(t))^2 \right)^{1/2} dt.$$

(Утверждения теоремы следуют из теоремы 3 §3.)

П р и м е р. Пусть $f : [a, b] \to \mathbf{R}^1$, причем $f \in C^{(1)}([a, b])$. Тогда $r : [a, b] \to \mathbf{R}^2$, где $r(x) = (x, f(x))$ есть непрерывно дифференцируемый путь в $\mathbf{R}^2$ с длиной $l(r) = \int\limits_a^b (1 + (\mathrm{D}f(x))^2)^{1/2} dx$ (длина пути в декартовых координатах).

П р и м е р. Пусть $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^2$, где

$$\mathbf{r}(\varphi) = (\rho(\varphi) \cos \varphi, \rho(\varphi) \sin \varphi) \in C^{(1)}([\alpha, \beta]).$$

Тогда

$$(\mathrm{D}\mathbf{r}(\varphi) = (\rho'(\varphi) \cos \varphi - \rho(\varphi) \sin \varphi, \rho'(\varphi) \sin \varphi + \rho(\varphi) \cos \varphi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(||\mathrm{Dr}(\varphi)||^2 = \rho^2(\varphi) + \left(\frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right)$$

и поэтому

$$l(r) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left(\rho^2(\varphi) + \left(\frac{d\rho(\varphi)}{d\varphi} \right)^2 \right)^{1/2} d\varphi$$

– длина непрерывно дифференцируемого пути в полярных координатах.

Т е о р е м а (об инвариантности длины для эквивалентных путей). *Пусть* $\varphi : [\alpha, \beta] = I \to \mathbf{R}^n$ *и* $\varphi^* : [\alpha^*, \beta^*] = I^* \to \mathbf{R}^n$ *– эквивалентные пути в* $\mathbf{R}^n$. *Пусть путь* φ *спрямляем. Тогда путь* φ^* *также спрямляем, причем* $l(\varphi^*) = l(\varphi)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\varphi \sim \varphi^*$, то существует допустимое преобразование параметра $t : \tau \to t(\tau)$ (от I^* к I) такое, что $t \in C(I^*)$, $t(\tau) \uparrow\uparrow$ на I^*, $t(I^*) = I$, причем $\tau \equiv t^{-1} \in C(I)$, $\tau(t) \uparrow\uparrow$ на I, $\tau(I) = I^*$ и $\varphi(t) = (\varphi^* \circ t^{-1})(t)$, $\varphi^*(\tau) = (\varphi \circ t)(\tau)$. Пусть $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ – любое разбиение отрезка $[\alpha, \beta] = I$. Положим $\tau_k = t^{-1}(t_k)$, тогда в силу условия $t^{-1}(t) \uparrow\uparrow$ на $[\alpha, \beta]$ видим, что разбиение T отрезка $[\alpha, \beta] = I$ индуцирует разбиение $T^* = \{\alpha^* = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m = \beta^*\}$ отрезка $I^* = [\alpha^*, \beta^*]$, и поскольку $t_k = t(\tau_k)$, то имеем

$$l_T(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} ||\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})|| = \sum_{k=1}^{m} ||(\varphi \circ t)(\tau_k) - (\varphi \circ t)(\tau_{k-1})|| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} ||\varphi^*(\tau_k) - \varphi^*(\tau_{k-1})|| = l_{T^*}(\varphi^*).$$

С другой стороны, любое разбиение T^* отрезка I^* индуцирует разбиение T отрезка I с точками разбиения $t_k = t(\tau_k)$ и опять имеем равенство $l_{T^*}(\varphi^*) = l_T(\varphi)$, но тогда $\sup\limits_{T} l_T(\varphi) = \sup\limits_{T^*} l_{T^*}(\varphi^*)$, т. е. путь φ^* спрямляем и $l(\varphi^*) = l(\varphi)$.

З а м е ч а н и е. Пусть $\varphi = -\psi$ – замкнутые пути. Если φ спрямляем, то и ψ спрямляем, причем $l(\psi) = l(\varphi)$.

З а м е ч а н и е. Все пути, входящие в класс эквивалентности, определенный кривой Φ, имеют одну и ту же длину (если хотя бы один из путей, входящих в этот класс эквивалентности, спрямляем). Поэтому можно ввести понятие спрямляемой кривой и длины кривой.

С л е д с т в и е. Пусть дана кривая $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{m} \Phi_k$, где Φ_k – спрямляемые кривые в $\mathbf{R}^n$. Тогда кривая Φ спрямляема и $l(\Phi) = \sum\limits_{k=1}^{m} l(\Phi_k)$.

Доказательство. Поскольку $\Phi = \sum_{k=1}^{m} \Phi_k$, то можно выбрать пути $\varphi_k : [\alpha_k, \beta_k] \to \mathbf{R}^n$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ так, чтобы $\beta_k = \alpha_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$. Тогда имеем путь $\varphi : [\alpha_1, \beta_m] \to \mathbf{R}^n$, где $\varphi(t) = \varphi_k(t)$, $t \in [\alpha_k, \beta_k]$ $(k = 1, \ldots, m)$, причем

$$\varphi_k(\beta_k) = \varphi_{k+1}(\alpha_{k+1}) \, (k = 1, 2, \ldots, m-1).$$

Поскольку путь φ_k спрямляем $\forall k$, то $\varphi_k \in \bigvee[\alpha_k, \beta_k]$ и в силу теоремы 2 §3 об аддитивности полной вариации имеем

$$\left(\bigvee_{\alpha_1}^{\beta_m} \varphi = \sum_{k=1}^{m} \bigvee_{\alpha_k}^{\beta_k} \varphi_k \right) \Rightarrow \left(l(\varphi) = \sum_{k=1}^{m} l(\varphi_k) \right) \Rightarrow \left(l(\Phi) = \sum_{k=1}^{m} l(\Phi_k) \right).$$

Следствие. Если кривая $\Phi = \sum_{k=1}^{m} \Phi_k$, где Φ_k – непрерывно дифференцируемые кривые, то

$$l(\Phi) = \sum_{k=1}^{m} \int_{\alpha_k}^{\beta_k} ||\mathbf{D}r_k(t)|| dt = \int_{\alpha_1}^{\beta_m} ||\mathbf{D}r(t)|| dt,$$

где r_k – непрерывно дифференцируемые пути – представители кривой Φ_k, а r – кусочно-непрерывно дифференцируемый путь, являющийся представителем кривой Φ.

Пусть дан спрямляемый путь $r : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$, где $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$. Положим $(\forall \tau \in [\alpha, \beta])$ $\gamma_\tau : [\alpha, \tau] \xrightarrow{r} \mathbf{R}^n$, тогда длина «дуги» $l(\gamma_\tau) = s(\tau)$ есть функция параметра τ на отрезке $[\alpha, \beta]$. Если путь r – гладкий, т. е. $r \in C^{(1)}([\alpha, \beta])$ и $||\mathbf{D}r(\tau)|| > 0$ $\forall \tau \in [\alpha, \beta]$, то

$$(s(\tau) = l(\gamma_\tau)) \Rightarrow \left(s(\tau) = \int_{\alpha}^{\tau} \left(\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{D}x_i(t))^2 \right)^{1/2} dt = \int_{\alpha}^{\tau} ||\mathbf{D}r(t)|| dt \right),$$

откуда для функции $s : \tau \to s(\tau)$ имеем $s(\tau) \in C^{(1)}([\alpha, \beta])$,

$$\frac{ds(\tau)}{d\tau} = ||\mathbf{D}r(\tau)|| > 0 \, \forall \tau \in [\alpha, \beta], \; ds = ||\mathbf{D}r(\tau)|| d\tau.$$

Итак, $s \in C^{(1)}([\alpha, \beta])$, $s(\tau) \uparrow\uparrow$ на $[\alpha, \beta]$ и $s([\alpha, \beta]) = [0, s_0]$, где $s_0 = l(r)$. Но тогда функция $s : [\alpha, \beta] \to [0, s_0]$ определяет допустимое преобразование параметра (от $[\alpha, \beta]$ к $[0, s_0]$), причем обратная функция $\tau \equiv s^{-1} : [0, s_0] \to [\alpha, \beta]$ также является допустимой заменой параметра (от $[0, s_0]$ к $[\alpha, \beta]$). Более того, в силу теоремы о производной обратной функции имеем

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = 1 \Big/ \frac{ds(\tau)}{d\tau} = 1/||\mathbf{D}r(\tau)|| > 0 \, \forall s \in [0, s_0].$$

Положим теперь $\rho(s) = (r \circ \tau)(s)$, тогда $r(\tau) = (\rho \circ s)(\tau)$ и путь $\rho : [0, s_0] \to \mathbf{R}^n$ таков, что $\rho \sim r$, причем, очевидно, ρ – гладкий путь. Используя теоремы о производной для сложной функции и для обратной функции, имеем

$$\frac{d\rho(s)}{ds} = \mathrm{D}((\mathbf{r} \circ \tau)(s)) = \mathrm{Dr}(\tau) \cdot \mathrm{D}\tau(s) =$$

$$= \mathrm{Dr}(\tau)/\mathrm{Ds}(\tau) = \mathrm{Dr}(\tau)/||\mathrm{Dr}(\tau)||,$$

откуда для пути ρ получаем $||\mathrm{D}\rho(s)|| = 1$. Параметризация $\rho : [0, s_0] \to \mathbf{R}^n$ (кривой R с представителем r) называется натуральной параметризацией (при натуральной параметризации параметр s с точностью до постоянного слагаемого совпадает с длиной дуги на пути r), причем

$$l(\rho) = \int_0^{s_0} ||\mathrm{D}\rho(s)||ds = \int_0^{s_0} 1 \cdot ds = s_0 = l(r).$$

§ 6. Касательная к кривой в $\mathbf{R}^n$

Пусть Φ есть кривая в $\mathbf{R}^n$, тогда для пути $\varphi : I \to \mathbf{R}^n$, принадлежащему классу эквивалентности, определенному кривой Φ, отображение $\varphi : I \to \Gamma = \varphi(I) \subset \mathbf{R}^n$ отрезка I на носитель Γ (кривой Φ) может и не быть взаимно однозначным (если кривая Φ не жорданова), поэтому кривую Φ нельзя определять как множество $\Gamma = \varphi(I)$ в $\mathbf{R}^n$, а следует определять как отображение $\varphi : I \to \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ отрезка I на Γ с последующим установлением условий, при которых два отображения (два пути) $\varphi_1 : I_1 \overset{\text{на}}{\to} \Gamma$ и $\varphi_2 : I_2 \overset{\text{на}}{\to} \Gamma$ считаются эквивалентными (принадлежащими одной кривой).

О п р е д е л е н и е. *Путь $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ называется параметризованной прямой в $\mathbf{R}^n$, если отображение λ аффинно и невырождено, т. е. имеет вид $\lambda(t) = x_0 + t \cdot \mathbf{r}$, где x_0 – точка, а $\mathbf{r}$ – постоянный вектор из $\mathbf{R}^n$, для которого $||\mathbf{r}|| > 0$.*

О п р е д е л е н и е. *Пусть $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ и $\lambda^* : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ – две параметризованные прямые в $\mathbf{R}^n$. Скажем, что $\lambda \sim \lambda^*$, если существует аффинное преобразование параметра $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ вида $g(\tau) = a\tau + b$, $\tau \in \mathbf{R}$, где $a, b \in \mathbf{R}$ и $a > 0$, такое, что $\lambda^*(\tau) = (\lambda \circ g)(\tau)$.*

З а м е ч а н и е. Если $\lambda \sim \lambda^*$ и $\lambda(t) = x_0 + t \cdot \mathbf{r}$, $\lambda^*(\tau) = x_0^* + \tau \cdot \mathbf{r}^*$, то, поскольку $(\lambda^* = \lambda \circ g) \Rightarrow (x_0^* + \tau \cdot \mathbf{r}^* = x_0 + (a\tau + b) \cdot \mathbf{r})$, $x_0^* = x_0 + b \cdot \mathbf{r}$, $\mathbf{r}^* = a \cdot \mathbf{r}$ $(a > 0)$, поэтому векторы r и r^* «одинаково» направлены в $\mathbf{R}^n$ (рис. 50).

З а м е ч а н и е. Введенное отношение $\sim$ является отношением эквивалентности, которое разбивает множество всех параметризованных прямых в $\mathbf{R}^n$ на классы эквивалентности.

О п р е д е л е н и е. *Ориентированной прямой* Λ *в* $\mathbf{R}^n$ *называется класс эквивалентности параметризованных прямых (с представителем* $\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$*).*

Т е о р е м а. *Пусть* $r : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ *(где* $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$*) есть гладкий путь в* $\mathbf{R}^n$*. Тогда отображение* $r : (\alpha, \beta) \to \Gamma = r(\alpha, \beta))$ *локально взаимно однозначно, т. е.* $\forall t_0 \in (\alpha, \beta)$ *существует окрестность* $U_\delta(t_0) \subset (\alpha, \beta)$ *такая, что отображение* $r : U_\delta(t_0) \to r(U_\delta(t_0)) \subset \Gamma \subset \mathbf{R}^n$ *взаимно однозначно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t_0 \in (\alpha, \beta)$ – любая точка. Поскольку r – гладкий путь, то $||\mathrm{D}\mathbf{r}(t_0)|| > 0$, но

$$||\mathrm{D}\mathbf{r}(t_0)||^2 = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{D}x_k(t_0))^2 > 0, \quad \int_0^{s_0} 1 \cdot dz = s_0 = l(r),$$

поэтому существует номер i такой, что $\mathrm{D}x_i(t_0) \neq 0$. Пусть, для определенности, $\mathrm{D}x_i(t_0) > 0$. В силу гладкости пути r $\mathrm{D}x_i \in C(t_0)$ и тогда теоремы о локальных свойствах непрерывной функции позволяют утверждать, что существует окрестность $U_\delta(t_0) \subset (\alpha, \beta)$ такая, что $\mathrm{D}x_i(t) > 0 \; \forall t \in U_\delta(t_0)$. Из теоремы о существовании обратной функции у строго монотонной функции отображение $x_i : U_\delta(t_0) \to \mathbf{R}^1$ инъективно (и даже осуществляет гомеоморфизм $U_\delta(t_0)$ на $x_i(U_\delta(t_0)) \subset \mathbf{R}$, т. е. $(x_i(t_1) = x_i(t_2)) \Leftrightarrow (t_1 = t_2$ в $U_\delta(t_0))$. Но тогда, поскольку $(r(t_1) = r(t_2)) \Leftrightarrow (||\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_2)|| = 0)$, то в силу оценки $||\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_2)|| \geq |x_i(t_1) - x_i(t_2)|$ имеем $(\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)) \Rightarrow (x_i(t_1) = x_i(t_2) \; \forall i) \Rightarrow (t_1 = t_2)$. Обратное включение $(t_1 = t_2) \Rightarrow (\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2))$ очевидно. Итак, видим, что отображение $r : U_\delta(t_0) \to r(U_\delta(t_0)) \subset \Gamma$ также взаимнооднозначно.

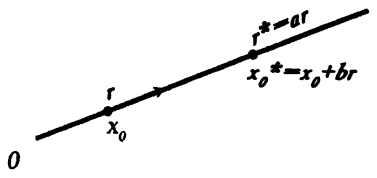


Рис. 50

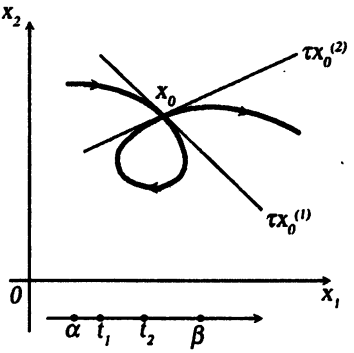


Рис. 51

Пусть теперь R – некоторая гладкая кривая в $\mathbf{R}^n$ и $x_0 \in \Gamma$ – точка носителя Γ. Пусть $r : I = (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}^n$ (где $r(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$) есть гладкий путь – представитель кривой R так, что $\mathbf{r} \in C^{(1)}(I)$

и $\|\mathrm{D}\mathbf{r}(t)\| > 0\ \forall t \in I$. Пусть $x_0 = r(t_0)$, $t_0 \in I$, тогда по предыдущей теореме существует окрестность $U_\delta(t_0) \in I$ такая, что отображение $r : U_\delta(t_0) \to r(U_\delta(t_0)) \subset \Gamma$ взаимно однозначно. Пусть $r_1 = r(t_1) \in r(U_\delta(t_0)) \subset \Gamma$ и $r_1 \neq r_0 = r(t_0)$, так что $t_1 \neq t_0$. Формула $\lambda(t) = x_0 + \dfrac{t - t_0}{t_1 - t_0}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$ определяет некоторую параметризованную прямую (секущую) λ, проходящую через точки $r_0 = \lambda(t_0)$ и $r_1 = \lambda(t_1)$. Поскольку путь r – гладкий, то $(\mathbf{r} \in C^{(1)}(t_0)) \Rightarrow (x_i \in C^{(1)}(t_0)\ \forall i)$, т. е.

$$\exists \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x_i(t_1) - x_i(t_0)}{t_1 - t_0} = \mathrm{D}x_i(t_0).$$

Полагая по определению

$$\lim_{t_1 \to t_0} \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0} = \left(\lim_{t_1 \to t_0} \frac{x_1(t_1) - x_1(t_0)}{t_1 - t_0}, \dots \right.$$

$$\left. \dots, \lim_{t_1 \to t_0} \frac{x_n(t_1) - x_n(t_0)}{t_1 - t_0} \right),$$

видим, что

$$\exists \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0}{t_1 - t_0} = \lim_{t_1 \to t_0} \frac{\mathbf{r}(t_1) - \mathbf{r}(t_0)}{t_1 - t_0} = \mathrm{D}\mathbf{r}(t_0).$$

Введем параметризованную прямую $\lambda_0 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$, полагая $\lambda_0(t) = x_0 + (t - t_0) \cdot \mathrm{D}\mathbf{r}(t_0)$, $t \in \mathbf{R}$. Эту прямую можно рассматривать как предел положения секущей λ (к пути r), проходящей через точки $r_0 = x_0 \in \Gamma$ и $r_1 \in \Gamma$ при $r_1 \to r_0 = x_0$.

О п р е д е л е н и е. *Прямая λ_0 называется касательной к пути r в точке $x_0 \in \Gamma$.*

Докажем, что касательная не зависит от выбора гладкого пути r (т. е. не зависит от параметризации кривой R). Для этого достаточно рассмотреть натуральную параметризацию кривой R $\rho : I_0 \to \mathbf{R}^n$, так что $\rho \sim r$ и $r(t) = (\rho \circ s)(t)$, где $s = s(t)$ – натуральный параметр, т. е. дифференцируемая и строго возрастающая длина дуги. Положим $s_0 = s(t_0)$, $x_0 = \rho(s_0)$. Тогда касательная к пути ρ определяется параметризацией μ_0, где $\mu_0(s) = x_0 + (s - s_0) \cdot \mathrm{D}\rho(s_0)$, но $r = \rho \circ s$, откуда $\mathrm{D}\mathbf{r}(t_0) = \mathrm{D}\rho(s_0) \cdot \dfrac{ds(t_0)}{dt}$, причем $\dfrac{ds(t_0)}{dt} > 0$, так что $\lambda_0(t) = x_0 + (t - t_0)\dfrac{ds(t_0)}{dt} \cdot \mathrm{D}\rho(s_0)$ и при $t = g(s) \equiv t_0 + (s - s_0)/\mathrm{D}s(t_0)$, где $\mathrm{D}s(t_0) > 0$, имеем $\mu_0 = \lambda_0 \circ g$. Заметим, что $g : s \to t$ – допустимое аффинное преобразование параметра, так что $\mu_0 \sim \lambda_0$, чем показано, что касательная в точке $x_0 \in \Gamma$ к кривой R не зависит от выбора представителя r. Итак, гладкая кривая R в любой точке x_0 своего носителя имеет касательную, которую будем обозначать через τ_{x_0}. Если

существует единственное значение $t_0 \overline{\in} I$ такое, что $r(t_0) = x_0 \in \Gamma$, то касательная определена единственным образом. Если же существует несколько значений $t_k \in I$ таких, что $r(t_k) = x_0 \in \Gamma$, то в точке $x_0 \in \Gamma$ может быть (рис. 51) несколько касательных.

Если ориентированная прямая (в $\mathbf{R}^n$) λ определена аффинным отображением $\lambda(t) = x_0 + t \cdot \mathbf{r}$, то отображение $(-\lambda) : t \to x_0 + t \cdot (-\mathbf{r})$ определяет противоположно ориентированную прямую $(-\lambda)$. Касательной к гладкой кривой $(-R)$ в точке $x_0 \in \Gamma$ является прямая, ориентированная противоположно касательной τ_{x_0} к кривой R в точке $x_0 \in \Gamma$.

Пример. Пусть $r : x \to (x, f(x))$, где $f \in C^{(1)}((a,b))$. Тогда r есть гладкий путь в $\mathbf{R}^2_{x,y}$ $\mathrm{D}r(t) = (1, \mathrm{D}f(x))$ и касательная к кривой R в точке $M_0 = (x_0, f(x_0)) \in \Gamma = r((a,b))$ имеет параметризацию $x \to \lambda_0(x)$, где $\lambda_0(x) = (x, y_0 + (x - x_0)\mathrm{D}f(x_0))$, т. е. уравнение касательной имеет вид $y = y_0 + (x - x_0)\mathrm{D}f(x_0)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $y_0 = f(x_0)$.

Пример. Пусть $\varphi : t \to (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ – гладкий путь в $\mathbf{R}^n_k$, так что $\varphi_i \in C^{(1)}((\alpha,\beta))$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$,

$$||\mathrm{D}\varphi(t)||^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{d\varphi_i(t)}{dt}\right)^2 \geq 0 \ \forall t \in (\alpha,\beta),$$

тогда, полагая $x_0 = \varphi(t_0) \in \Gamma = \varphi((\alpha,\beta))$, имеем для параметризованной касательной λ_0

$$\lambda_0(t) = \varphi(t_0) + (t - t_0)\mathrm{D}\varphi(t_0) \equiv (\varphi_1(t_0) + (t - t_0)\mathrm{D}\varphi_1(t_0), \ldots$$

$$\ldots, \varphi_n(t_0) + (t - t_0)\mathrm{D}\varphi_n(t_0)),$$

или

$$x_i - x_i^0 = (t - t_0)\mathrm{D}\varphi_i(t_0),\ x_i^0 = \varphi_i(t_0)\ (i = 1, 2, \ldots, n),$$

или, исключая параметр t, получаем уравнения касательной в точке $x_0 = \varphi(t_0) \in \Gamma = \varphi((\alpha,\beta)) \subset \mathbf{R}^n$ к кривой Φ в виде

$$\frac{x_1 - x_1^0}{\mathrm{D}\varphi_1(t_0)} = \ldots = \frac{x_n - x_n^0}{\mathrm{D}\varphi_n(t_0)}.$$

Замечание (о вычислении площади поверхности вращения). Пусть кривая Φ – жорданова и задана (в $\mathbf{R}^2_{x,y}$) уравнением $y = y(x)$, $a \leq x \leq b$, причем $y \in C^{(1)}([a,b])$ и $y(x) > 0$, $\forall x \in [a,b]$. Для любого разбиения T отрезка $[a,b]$ заменим часть поверхности, полученной вращением носителя $\Gamma_i = \{(x,y) | y = y(x), x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ вокруг оси Ox, усеченным конусом. Тогда площадь полученной фигуры равна

$$S(T) = \pi \sum_{i=1}^{n} (y(x_{i-1}) + y(x_i))((\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2)^{1/2}.$$

Но $((\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2)^{1/2} = (1 + (\mathrm{D}\, y(\xi_i))^2)^{1/2}\Delta x_i$, поэтому, переходя к пределу по базе $d(T) \to 0$, получаем величину

$$S = 2\pi \int_a^b y(x)(1 + (\mathrm{D}y(x))^2)^{1/2} dx,$$

которую естественно назвать площадью поверхности вращения Γ вокруг оси Ox. (Теория измерения площадей будет развита в т. 2.)

§ 7. Топология метрического пространства

Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство. Если $X_1 \subset X$ есть подмножество X, то $R_1 = \{X_1, \rho\}$ есть метрическое пространство с тем же расстоянием ρ. R_1 называется подпространством метрического пространства R.

Определение. *Пусть $a \in X$ и $0 < r < +\infty$. Открытым шаром с центром в точке a и радиусом $r > 0$ называется множество $\mathrm{Ш}_r(a)$ всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, a) < r$, т. е. $\mathrm{Ш}_r(a) = \{x \in X | \rho(x, a) < r\}$. Множество $\overline{\mathrm{Ш}}_r(a) = \{x \in X | \rho(x, a) \leq r\}$ называется замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом $r > 0$. Сферой с центром в точке a и радиусом $r > 0$ называется множество*

$$S_r(a) = \{x \in X | \rho(x, a) = r\}.$$

Определение. *Окрестностью $U(a)$ (или $V(a)$, $W(a)$ и т. д.) точки $a \in X$ будем называть любой открытый шар $\mathrm{Ш}_\delta(x_0)$ (где $x_0 \in X$), содержащий точку a. Окрестность вида $\mathrm{Ш}_\delta(a)$ с центром в точке $a \in X$ называется центрированной окрестностью точки a.*

Определение. *Если $U(a)$ – окрестность точки a, то проколотой окрестностью точки a называется множество вида*

$$\dot{U}(a) = U(a) \setminus \{a\}.$$

Пример. Пусть $R \equiv \mathbf{R}^n$ и $\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}$, тогда

$$\dot{U}_\delta(a) \equiv \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(a) = \{x \in \mathbf{R}^n | 0 < \rho(x, a) < \delta\} \neq \varnothing \; \forall \delta > 0.$$

Проколотая окрестность $\dot{U}(a)$ точки $a \in X$ метрического пространства $\{X, \rho\}$ может оказаться пустым множеством. Если $R_1 = \{X_1, \rho\}$, где $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$, $X_1 = (0, 1) \cup \{2\}$, то $\dot{U}_{1/2}(2) \equiv \dot{\mathrm{Ш}}_{1/2}(2) = \varnothing$ в R_1.

Отметим следующие свойства окрестностей в метрических пространствах. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, тогда:

1) Если $a \in X$, то любая окрестность $U(a)$ точки a непуста, в частности $Ш_\delta(a) \neq \varnothing \ \forall \delta > 0$.

В самом деле, $a \in U(a) \ \forall$ окрестности $U(a)$ точки $a \in X$, поэтому $U(a) \neq \varnothing$.

2) Для любой окрестности $U(a)$ точки $a \in X$ существует центрированная окрестность $Ш_\delta(a)$ такая, что $Ш_\delta(a) \subset U(a)$, при этом радиус $\delta > 0$ можно выбрать рациональным.

В самом деле, поскольку $U(a)$ есть окрестность точки $a \in X$, то $\exists x_0 \in X$ и $\exists \delta_0 > 0$ такие, что $U(a) = Ш_{\delta_0}(x_0)$ и $a \in Ш_{\delta_0}(x_0)$, т. е. $0 \leq \rho(a, x_0) < \delta_0$. Если $x_0 = a$, то все доказано. Пусть $x_0 \neq a$, тогда $0 < \rho(x_0, a) = \delta_1 < \delta_0$. Положим $\delta = \delta_0 - \delta_1 > 0$ и рассмотрим $Ш_\delta(a)$. Тогда $\rho(x, a) < \delta \ \forall x \in Ш_\delta(a)$ и в силу выбора δ и неравенства треугольника имеем

$$\rho(x, x_0) \leq \rho(x, a) + \rho(a, x_0) < \delta + \delta_1 = \delta_0 - \delta_1 + \delta_1 = \delta_0.$$

Итак,

$$(\forall x \in Ш_\delta(a)) \Rightarrow (\rho(x, x_0) < \delta_0) \Rightarrow$$

$$(x \in Ш_{\delta_0}(x_0) = U(a)) \Rightarrow (Ш_\delta(a) \subset U(a)).$$

3) Для любых двух окрестностей $U(a)$ и $V(a)$ точки $a \in X$ существует окрестность $W(a)$ такая, что $W(a) \subset U(a) \wedge V(a)$. В самом деле, в силу свойства 2) существуют центрированные окрестности $Ш_{\delta_1}(a) \subset U(a)$ и $Ш_{\delta_2}(a) \subset V(a)$, но тогда при $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ имеем

$$W(a) = Ш_\delta(a) \subset Ш_{\delta_1}(a) \cap Ш_{\delta_2}(a) \subset U(a) \cap V(a).$$

3′) О б о б щ е н и е. Пересечение конечного числа окрестностей точки $a \in X$ содержит окрестность точки a:

$$\forall U^{(k)}(a)(k = 1, 2, \ldots, m) \exists V(a) \subset \bigcap_{k=1}^{m} U^{(k)}(a).$$

4) А к с и о м а (отделимости Хаусдорфа). *Если $a, b \in X$ и $a \neq b$, то существуют окрестности $U(a)$ и $V(b)$ такие, что $U(a) \cap V(b) = \varnothing$.*

В самом деле, если $a \neq b$, то $\rho(a, b) = \delta > 0$. Рассмотрим окрестности $Ш_\delta(a)$ и $Ш_\delta(b)$ точек a и b соответственно и покажем, что $Ш_{\delta/3}(a) \cap Ш_{\delta/3}(b) = \varnothing$. Допустим от противного, что $\exists x_0 \in Ш_{\delta/3}(a) \cap Ш_{\delta/3}(b)$, тогда в силу неравенства треугольника имеем

$$0 < \delta = \rho(a, b) \leq \rho(a, x_0) + \rho(x_0, b) < \delta/3 + \delta/3 = 2\delta/3.$$

Противоречие.

5) $(\forall b \in U(a) \subset X) \Rightarrow (U(a) = V(b))$, т. е. для любой точки $b \in U(a)$ множество $U(a)$ является окрестностью точки $b \in X$. Кроме того, если $b \in U(a)$ и $b \neq a$, то существует центрированная окрестность $Ш_h(b) \subset U(a)$ такая, что $a \overline{\in} Ш_h(b)$. В самом деле, 1-е утверждение свойства 5) следует из определения окрестностей точек $a, b \in X$. Для доказательства 2-го утверждения свойства 5) заметим, что $a, b \in X$ и $(a \neq b) \Rightarrow (\rho(a, b) = \delta > 0)$.

Пусть $U(a)$ – окрестность точки $a \in X$, являющаяся при $b \in U(a)$ окрестностью и точки $b \in X$ $(U(a) = V(b))$. Тогда в силу свойства 2) окрестностей $\exists Ш_{h_0}(b) \subset V(b)$, где $h_0 > 0$. Выберем $h = \min(h_0, \delta) > 0$, тогда, очевидно, $Ш_h(b) \subset Ш_{h_0}(b) \subset V(b) = U(a)$, но $(\rho(a, b) = \delta \geq h > 0) \Rightarrow (a \overline{\in} Ш_h(b))$.

Теперь все определения и теоремы, использующие понятия окрестностей (см. ч. 1, гл. 3, §1), для числовой прямой, полностью переносятся без каких-либо изменений (с очевидной заменой $\mathbf{R}$ на X) на метрическое пространство $R = \{X, \rho\}$. (Проверьте это самостоятельно.) Ниже для полноты изложения приведены (без доказательства) все основные факты, касающиеся топологии метрического пространства $R = \{X, \rho\}$.)

О п р е д е л е н и е. *Пусть $A \subset X$, тогда точка $a \in X$ называется внутренней точкой множества A, если существует окрестность $U(a)$ точки a такая, что $U(a) \subset A$.*

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех внутренних точек множества $A \subset X$ называется внутренностью A и обозначается $\overset{\circ}{A}$ или A_i.*

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in X$ называется внешней точкой для множества A, если существует окрестность $U(a)$ такая, что $U(a) \cap A = \varnothing$. В частности, если a – внешняя точка для множества A, то $a \overline{\in} A$, т. е. $a \in \complement A$. Обратное, вообще говоря, неверно.*

С л е д с т в и е. Внешняя точка для множества A является внутренней точкой его дополнения $\complement A = X \setminus A$.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех внешних точек для множества A называется внешностью множества A и обозначается A_e.*

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in X$ называется граничной точкой множества $A \subset X$, если $(\forall U(a)) \Rightarrow (U(a) \cap A \neq \varnothing$ и $U(a) \cap \complement A \neq \varnothing)$.*

О п р е д е л е н и е. *Границей ∂A множества A называется множество всех граничных точек A. Очевидно, $\partial A = \partial(\complement A)$.*

О п р е д е л е н и е. *Точка $a \in X$ называется точкой прикосновения множества $A \subset X$, если $U(a) \cap A \neq \varnothing$ $\forall U(a)$.* В частности, любая внутренняя точка $x_1 \in \overset{\circ}{A}$ и любая граничная точка $x_2 \in \partial A$ множества A являются точками прикосновения множества A.

О п р е д е л е н и е. *Совокупность всех точек прикосновения*

множества $A \subset X$ называется замыканием множества A и обозначается через $\overline{A}$, при этом $A \subset \overline{A}$.

Замечание. $(A \subset B) \Rightarrow (\overline{A} \subset \overline{B})$.

Определение. *Точка $a \in X$ называется предельной точкой множества $A \subset X$, если $\dot{U}(a) \cap A \neq \varnothing \ \forall U(a)$.*

Определение. *Совокупность всех предельных точек множества $A \subset X$ называется производным множеством и обозначается A', при этом $A' \subset \overline{A}$.*

Замечание. $A \cup A' \subset \overline{A}$.

Определение. *Точка $a \in X$ называется изолированной точкой множества $A \subset X$, если $\exists U(a)$ такая, что $U(a) \cap A = \{a\}$.*

Теорема. $\overline{A} = A \cup A'$, $C\overline{A} = A_e$. (Доказать самим.)

Замечание. Из определений вытекает, что $\partial A \subset \overline{A}$ и $(a \in \partial A) \wedge (a \overline{\in} A) \Rightarrow (a \in A')$.

Замечание. Изолированная точка a множества $A \subset X$ может не быть граничной точкой для A.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство, $X = [-1, 1] \cup \{2\}$ и множество $A = (-1, 1) \cup \{2\} \subset X$. Тогда $a = 2$ – изолированная точка множества A, но $a \overline{\in} \partial A = \{-1\} \cup \{1\}$.

Определение. *Множество $A \subset X$ называется открытым, если все его точки внутренние, т. е. если $A = \overset{\circ}{A}$.*

Теорема. *Любая окрестность $U(a)$ точки $a \in X$ есть открытое множество.* (Доказательство провести самостоятельно, используя свойство 5) окрестностей в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$.)

Замечание. (Для любого множества $A \subset X$) $\Rightarrow$ (множества A_i и A_e открыты). Доказать самостоятельно по схеме, указанной в ч. 1, гл. 3, § 1.

Определение. *Множество $A \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т. е. если $A' \subset A$.*

Теорема. *(Множество $A \subset X$ замкнуто)* $\Leftrightarrow$ $(A = \overline{A})$. (Доказать самостоятельно.)

Замечание. Пустое множество $\varnothing$ и все множество X являются одновременно замкнутыми и открытыми.

Теорема. *(Множество $A \subset X$ замкнуто)* $\Leftrightarrow$ *(множество $\mathrm{C}A$ открыто).* (Доказать самим, пользуясь свойствами 1)–5) окрестностей в метрическом пространстве по схеме, указанной в ч. 1, гл. 3, §1.)

Пример. Покажем, что множество $\{x \in X | \rho(x, a) > \delta\} = \mathrm{C}\,\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)$ есть открытое множество в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. В самом деле, $(\forall x_0 \in \mathrm{C}\,\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)) \Rightarrow (\rho(x_0, a) = \delta_0 > \delta)$, но тогда, выбирая $h \in (0, \delta_0 - \delta)$, видим, что $\forall x \in \mathrm{Ш}_h(x_0)$, в силу неравенства треугольника имеем $\rho(x, a) \geq \rho(a, x_0) - \rho(x, x_0) > \delta - h > \delta_0 - (\delta_0 - \delta) =$

$\delta > 0$, т. е. $x \in \mathrm{C}\,\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)$, а потому $\mathrm{Ш}_h(x_0) \subset \mathrm{C}\,\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)$, т. е. $\mathrm{C}\,\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)$ – открытое множество. Но тогда в силу теоремы видим, что замкнутый шар $\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(a)$ есть замкнутое множество в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$.

Т е о р е м а. *Пересечение конечного числа открытых множеств есть множество открытое. Объединение конечного числа замкнутых множеств есть множество замкнутое.* (Доказать самостоятельно.)

З а м е ч а н и е. Теорема перестает быть верной для бесконечного числа множеств.

Т е о р е м а. *Пересечение* $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ *любого семейства замкнутых множеств* $F_\alpha \subset X$ *есть множество замкнутое. Объединение* $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha$ *любого семейства открытых множеств* $G_\alpha \subset X$ *есть множество открытое.* (Доказать самостоятельно.)

Т е о р е м а. *Граница* ∂A *любого множества* $A \subset X$ *есть замкнутое множество.* (Доказать самостоятельно.)

Т е о р е м а. $(\forall A \subset X) \Rightarrow$ *(множество* $\overline{A}$ *замкнуто).* (Доказать самостоятельно.)

Т е о р е м а (критерий принадлежности точки производному множеству). $(a \in A' \neq \varnothing) \Leftrightarrow$ *(в любой окрестности* $U(a)$ *точки* $a \in X$ *существует бесконечное множество точек из* A*).* (Доказать самим.)

С л е д с т в и е. Конечное множество $A \subset X$ не имеет предельных точек.

Т е о р е м а. *Для любого множества* $A \subset X$ *производное множество* A' *замкнуто, т. е.* $\overline{A'} = A'$. (Доказать самим.)

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $R = \{X, \rho\}$ *– метрическое пространство и* (p_n) $(n \to p_n, n \in \mathbb{N})$ *– последовательность точек (элементов)* $p_n \in X$. *Точка* $p \in X$ *называется пределом последовательности* (p_n), *если для любой окрестности* $U(p)$ *точки* p $\exists N \in \mathbb{N}$ *такое, что* $p_n \in U(p)$ $\forall n \geq N$. *Если последовательность* (p_n) *имеет пределом точку* $p \in X$, *то говорят, что последовательность* (p_n) *сходится к точке* p.

Итак, последовательность (p_n) из X сходится к $p \in X$, если, какова бы ни была окрестность $U(p)$ точки $p \in X$, все элементы последовательности (p_n), за исключением (быть может) конечного их числа, принадлежат окрестности $U(p)$.

Если использовать свойство 2) окрестностей в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$, то имеем

О п р е д е л е н и е. *Точечная последовательность* (p_n) *из* X *сходится к точке* $p \in X$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *такое, что* $p_n \in \mathrm{Ш}_\varepsilon(p)$ $\forall n \geq N(\varepsilon)$.

Т е о р е м а (единственности предела точечной последовательности). *Если последовательность* (p_n) $(p_n \in X$ $\forall n \in \mathbb{N})$ *имеет предел* p

(в $R = \{X, \rho\}$), то этот предел единствен. (Доказать самостоятельно, используя аксиому отделимости Хаусдорфа.)

Т е о р е м а (критерий принадлежности точки замыканию множества). $(p \in \overline{A}) \Leftrightarrow$ *(существует последовательность* (p_n), $p_n \in A \subset X$ *такая, что* (p_n) *сходится к точке* p*).* (Доказать самим.)

З а м е ч а н и е. Из доказанного критерия следует, что замыкание $\overline{A}$ есть множество пределов сходящихся последовательностей из $A \subset X$.

С л е д с т в и е. Для того чтобы множество $A \subset X$ было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы A содержало пределы всех своих сходящихся последовательностей.

Т е о р е м а (критерий принадлежности точки производному множеству). $(p \in A' \neq \varnothing) \Leftrightarrow$ *(существует последовательность* (p_n)*, сходящаяся к точке* $p \in X$*, такая, что* $p_n \in A \setminus \{p\}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ *и* $p_n \neq p_m$ $\forall n \neq m$). (Доказать самостоятельно.)

О п р е д е л е н и е. *Точка* $p \in X$ *называется точкой сгущения (или частичным пределом) последовательности* (p_n) *точек из* X*, если любая окрестность* $U(p)$ *точки* p *содержит бесконечное множество элементов из последовательности* (p_n).

З а м е ч а н и е. Если последовательность (p_n) точек из X сходится к точке $p \in X$, то ее предел p является точкой сгущения последовательности (p_n). Обратное утверждение, вообще говоря, неверно.

З а м е ч а н и е. Точка сгущения последовательности (p_n) может и не быть предельной точкой множества $A = \{p_n \in X | n \in \mathbf{N}\}$, хотя всегда будет точкой прикосновения множества A.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* (p_n) *– последовательность точек из* X*. Рассмотрим строго возрастающую последовательность натуральных чисел* (n_k) *такую, что* $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ $(n_k < n_l$ *при* $k < l)$ *и* $n_k \geq k$ $\forall k \in \mathbf{N}$*. Тогда последовательность* (p_{n_k}) *называется подпоследовательностью последовательности* (p_n).

З а м е ч а н и е. Полагая для (p_n) $n_k = k$, видим, что последовательность (p_k) является подпоследовательностью самой себя.

Т е о р е м а (критерий того, что точка является точкой сгущения точечной последовательности). *(Точка* $p \in X$ *является точкой сгущения последовательности* (p_n)*)* $\Leftrightarrow$ *(из последовательности* (p_n) *можно выделить подпоследовательность* (p_{n_k})*, сходящуюся к* p*).* (Доказать самим.)

Т е о р е м а. *Множество точек сгущения последовательности* (p_n) *(пространства* $\{X, \rho\}$*) есть замкнутое множество.* (Доказать самим.)

Рассмотрим теперь линейное нормированное пространство E с нормой $x \to ||x||$. Как было доказано в §1 этой главы, пространство E при введении метрики (расстояния) $\rho(x, y) = ||x - y||$ становится метрическим пространством.

О п р е д е л е н и е. *Пусть E – линейное пространство, в котором заданы две нормы:* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_1$ *и* $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_2$. *Нормы* $||\,||_1$ *и* $||\,||_2$ *называются эквивалентными, если существуют положительные постоянные* $c_1 > 0$ *и* $c_2 > 0$ *такие, что* $c_1||\mathbf{x}||_1 \le ||\mathbf{x}||_2 \le c_2||\mathbf{x}||_1\ \forall \mathbf{x} \in E$ *(откуда* $\frac{1}{c_1} \cdot ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_1 \le \frac{1}{c_2} \cdot ||\mathbf{x}||_2\ \forall \mathbf{x} \in E$*).*

Т е о р е м а. *Пусть E – линейное пространство, в котором заданы две нормы:* $||\,||_1$ *и* $||\,||_2$. *Пусть* $R_i = \{E, \rho_i\}$ *– метрические пространства с расстояниями* $\rho_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_i$ $(i = 1, 2)$. *Если нормы* $||\,||_1$ *и* $||\,||_2$ *эквивалентны и* $\mathbf{a} \in E$ *– любая точка, то для любой окрестности* $Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in E | \rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_1\}$ *из* R_1 *существует окрестность* $Ш^{(2)}_{\delta_2}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{x} \in E | \rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}) < \delta_2\}$ *из* R_2 *такая, что* $Ш^{(2)}_{\delta_2}(\mathbf{a}) \subset Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a})$, *и, обратно,* $\forall Ш^{(2)}_{\delta_2}(\mathbf{a})$ *из* R_2 *существует* $Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a})$ *из* R_1 *такая, что* $Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a}) \subset Ш^{(2)}_{\delta_2}(\mathbf{a})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку нормы $||\,||_1$ и $||\,||_2$, эквивалентны, то существуют $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что $\forall \mathbf{x} \in E$ имеем оценки $c_1||\mathbf{x}||_1 \le ||\mathbf{x}||_2 \le c_2||\mathbf{x}||_1$, $c_2^{-1} \cdot ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_1 \le c_1^{-1} \cdot ||\mathbf{x}||_2$. Пусть $\mathbf{a} \in E$ и $Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a})$ – любая окрестность точки $\mathbf{a}$ из R_1. Тогда

$$\rho_1(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{a}||_1 \le c_1^{-1}||\mathbf{x} - \mathbf{a}||_2 = c_1^{-1}\rho_2(\mathbf{x}, \mathbf{a}),$$

поэтому при $\delta_2 = c_1 \cdot \delta_1$, имеем $Ш^{(2)}_{\delta_2}(\mathbf{a}) \subset Ш^{(1)}_{\delta_1}(\mathbf{a})$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

С л е д с т в и е. Пусть метрические пространства $\{E, \rho_1\}$ и $\{E, \rho_2\}$ (где E – линейное пространство) построены с помощью эквивалентных норм $||\,||_1$ и $||\,||_2$. Тогда:

1) (точка $\mathbf{a} \in E$ – внутренняя, внешняя, граничная, предельная, точка прикосновения множества $A \subset E$ в R_1) $\Leftrightarrow$ (точка $\mathbf{a} \in E$ – (соответственно) внутренняя, внешняя, граничная, предельная, точка прикосновения множества $A \subset E$ в R_2);

2) (множество $A \subset E$ открыто, замкнуто в R_1) $\Leftrightarrow$ (множество $A \subset E$ (соответственно) открыто, замкнуто в R_2).

Введем в линейном пространстве $E = \mathbf{R}^n$ «нормы» $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_p$, где $\forall \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \left(\mathbf{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e_i} \in \mathbf{R}^n\right)$

$$||\mathbf{x}||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} (p = 1, 2, \ldots),\ ||\mathbf{x}||_\infty = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|\ (p = \infty),$$

причем, полагая $|x_k| = \sup\limits_{i=1,2,\ldots,n} |x_i|$ (так что $|x_i|/|x_k| \le 1$, $i \ne k$), имеем

$$||\mathbf{x}||_\infty = \lim_{p \to +\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \lim_{p\to+\infty}\left(|x_k|\cdot\left(1+\sum_{i\neq 1}(|x_i|/|x_k|)^p\right)\right)^{1/p} = |x_k| = \sup_{i=1,2,\dots,n}|x_i|.$$

(так как $1+\sum_{i\neq k}(|x_i|/|x_k|)^p \le n$ и $\lim_{p\to+\infty} n^{1/p}=1$).

Замечание. Можно доказать, что «норма» $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|_p$ удовлетворяет всем аксиомам определения нормы из §1 и любые две нормы $\|\mathbf{x}\|_{p_1}$ и $\|\mathbf{x}\|_{p_2}$ эквивалентны.

Норма $\|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ называется евклидовой нормой в $\mathbf{R}^n$.

Теорема. *Нормы* $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ *и* $\|\ \|_\infty$ *в евклидовом пространстве* $E=\mathbf{R}^n$ *эквивалентны.*

Доказательство. В §1 этой главы было доказано, что функция $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|_2$ является нормой в $\mathbf{R}^n$. Проверим аксиомы нормы для функций $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|_1$ и $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|_\infty$.

1) $\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \ge 0\ \forall \mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$ и $\left(\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| = 0\right) \Leftrightarrow (|x_i|=0$ $\forall i$, т. е. $\mathbf{x}=0)$.

2) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i+y_i| \le \sum_{i=1}^n |x_i| + \sum_{i=1}^n |y_i| = \|\mathbf{x}\|_1+\|\mathbf{y}\|_1\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$.

3) $\|\alpha\cdot\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |\alpha\cdot x_i| = |\alpha|\cdot\|\mathbf{x}\|_1\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n\ \forall\alpha\in\mathbf{R}$.

Далее, для функции $\mathbf{x}\to\|\mathbf{x}\|_\infty$ имеем

1) $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |x_k| \ge 0\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $(\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |x_k| = 0) \Leftrightarrow (x_i = 0$ $\forall i)$;

2) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|_\infty = \sup_k |x_k+y_k| \le \sup_k(|x_k|+|y_k|) \le \sup_k |x_k| + \sup_l |y_l| =$ $\|\mathbf{x}\|_\infty + \|\mathbf{y}\|_\infty\ \forall\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$;

3) $\|\alpha\cdot\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |\alpha\cdot x_k| = \sup_k(|\alpha|\cdot|x_k|) = |\alpha|\cdot\sup_k|x_k| = |\alpha|\cdot\|\mathbf{x}\|_\infty$ $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, $\forall\alpha\in\mathbf{R}$.

Теперь рассмотрим вопрос об эквивалентности норм $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ и $\|\ \|_\infty$. Очевидно, $\forall\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$, имеем

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \le n\sup_k |x_k| = n\|\mathbf{x}\|_\infty,$$

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |x_k| \le \sum_{i=1}^n |x_i| = \|\mathbf{x}\|_1,$$

т. е. $\|\mathbf{x}\|_\infty\| \le \mathbf{x}\|_1 \le n\|\mathbf{x}\|_\infty$; $n^{-1}\cdot\|\mathbf{x}\|_1 \le \|\mathbf{x}\|_\infty \le \|\mathbf{x}\|_1$, откуда вытекает эквивалентность норм $\|\ \|_1$ и $\|\ \|_\infty$. Далее,

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup_k |x_k| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2} = \|\mathbf{x}\|_2,$$

так как если максимальное из чисел $|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ есть $|x_i|$, то $|x_i|^2 \le \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^2$. С другой стороны,

$$||\mathbf{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \le \sqrt{n} \cdot \sup |x_k| = \sqrt{n} \cdot ||\mathbf{x}||_\infty.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2 \le n(\sup\limits_k |x_k|)^2$, и поэтому имеем $||\mathbf{x}||_\infty \le ||\mathbf{x}||_2 \le n^{1/2} \cdot ||\mathbf{x}||_\infty$, $n^{-1/2} \cdot ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_\infty \le ||\mathbf{x}||_2$, т. е. нормы $||\,||_2$ и $||\,||_\infty$ также эквивалентны. Наконец, из полученных оценок $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ имеем $n^{-1} \cdot ||\mathbf{x}||_1 \le ||\mathbf{x}||_2 \le n^{1/2} \cdot ||\mathbf{x}||_1$, $n^{-1/2} \cdot ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_1 \le n \cdot ||\mathbf{x}||_2$, т. е. и нормы $||\,||_1$ и $||\,||_2$ эквивалентны.

З а м е ч а н и е. Можно доказать (см. [2], с. 17, теорема 1.6.2), что в $\mathbf{R}^n$ любая норма эквивалентна евклидовой норме

$$\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2}.$$

З а м е ч а н и е. Рассмотрим в $\mathbf{R}^n$ нормы $||\mathbf{x}||_1$, $||\mathbf{x}||_2$ и $||\mathbf{x}||_\infty$.

Тогда для окрестностей в этих нормах имеем: $Ш_\delta^{(2)}(a) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||_2 < \delta\}$ – есть открытый шар с центром в точке a и с радиусом $\delta > 0$. «Шар» $Ш_\delta^{(1)}(a) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||_1 < \delta\}$ при $n = 2$ есть открытый квадрат с центром в точке a и диагоналями, параллельными осям Ox_1 и Ox_2. Наконец, «шар» $Ш_\delta^{(\infty)}(a) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||_\infty < \delta\}$ есть n-мерный открытый куб с центром в точке a и со сторонами, имеющими длину 2δ и параллельными осям координат.

§ 8. Пределы в метрическом пространстве

Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и $n \to p_n$, $n \in \mathbf{N}$, – последовательность в X. В §7 было дано окрестностное определение предела (сходящейся) точечной последовательности, из которого вытекает

О п р е д е л е н и е. *Точка $p \in X$ называется пределом точечной последовательности (p_n), если* $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \rho(p, p_n) = 0$. Таким образом, $p = \lim\limits_{n \to +\infty} p_n$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p, p_n) < \varepsilon\ \forall n \ge N(\varepsilon)$.

О п р е д е л е н и е. *Множество $A \subset X$ называется ограниченным в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$, если существуют $K > 0$ и $a \in X$ такие, что $\rho(x, a) \le K\ \forall x \in A$, т. е. $A \subset \overline{Ш}_K(a)$.*

Т е о р е м а (об ограниченности сходящейся последовательности в метрическом пространстве). *Если точечная последовательность*

(p_n) сходится в метрическом пространстве, то она ограничена в нем. (Доказать самостоятельно.)

О п р е д е л е н и е. *Точечная последовательность (p_n) из метрического пространства $R = \{X, p\}$ называется последовательностью Коши (или фундаментальной последовательностью), если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p_n, p_m) < \varepsilon\ \forall n, m \geq N(\varepsilon)$.*

Из ч. 1 (гл. 3, §7) известно, что если (a_n) есть последовательность Коши в $\mathbf{R}^1$, то она сходится. Таким образом, это свойство последовательности является основным, поскольку оно позволяет ответить на вопрос о том, является ли последовательность сходящейся, даже если мы не знаем предела, к которому последовательность (a_n) может сходиться. Однако имеет место

З а м е ч а н и е. Последовательность Коши (p_n) не обязана быть сходящейся в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$.

П р и м е р. Пусть $R = \{X, \rho\}$, где $X = \{1/n \in \mathbf{R}^1 | n \in \mathbf{N}\}$ и $\rho(x, y) = |x - y|$. Тогда $(p_n) = (1/n)$ есть последовательность Коши в $R = \{X, \rho\}$, но она не сходится в X, поскольку $0 \overline{\in} X$.

Рассмотрим некоторые общие свойства последовательностей Коши в метрическом пространстве.

З а м е ч а н и е. Если последовательность (p_n) сходится в метрическом пространстве к p, то (p_n) фундаментальна.

Т е о р е м а. *Пусть (p_n) – последовательность Коши в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Тогда последовательность (p_n) ограничена и любая ее подпоследовательность (p_{n_k}) также является последовательностью Коши.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку (p_n) – последовательность Коши, то $\exists n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p_n, p_m) < 1\ \forall m, n \geq n_0$. Но тогда $(p_n) \in \text{Ш}_1(p_{n_0})\ \forall n \geq n_0$, откуда при $r = \max(\rho(p_{n_0}, p_1), \ldots, \rho(p_{n_0}, p_{n_0 - 1}), 1) > 0$ видим, что $p_n \in \text{Ш}_r(p_{n_0}) \subset X\ \forall n \in \mathbf{N}$ (т. е. (p_n) ограничена в X). Далее, p_n – последовательность Коши, поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p_n, p_m) < \varepsilon\ \forall m, n \geq N(\varepsilon)$. Рассмотрим любую подпоследовательность (p_{n_k}) (где $n_k \uparrow\uparrow$ и $n_k \geq k$), тогда $(\forall l, k \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (n_k, n_l \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow (\rho(p_{n_k}, p_{n_l}) < \varepsilon)$, т. е. последовательность (p_{n_k}) также фундаментальна.

Т е о р е м а. *Пусть (p_n) – последовательность Коши и $p \in X$ – точка сгущения для (p_n). Тогда последовательность (p_n) сходится к p.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку (p_n) фундаментальна, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p_n, p_m) < \varepsilon/2\ \forall m, n \geq N_0$. Но p – точка сгущения для (p_n), поэтому существует хотя бы одно $m_0 \geq N_0(\varepsilon)$ такое, что $\rho(p, p_{m_0}) < \varepsilon/2$. Откуда в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(p_n, p) \leq \rho(p_n, p_{m_0}) + \rho(p_{m_0}, p) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon\ \forall n \geq N_0(\varepsilon),$$

т. е. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p$.

Следствие 1. Любая последовательность Коши (из метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ либо не имеет (в X) точек сгущения, либо имеет только одну точку сгущения, к которой она и сходится.

Следствие 2. Если для последовательности Коши (p_n) существует хотя бы одна сходящаяся ее подпоследовательность (p_{n_k}), то и сама последовательность (p_n) сходится.

В самом деле, если $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} p_{n_k} = p$, то точка $p \in X$ является точкой сгущения для (p_n), а тогда в силу фундаментальности последовательности (p_n) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} p_n = p$.

Определение. *Метрическое пространство $R = \{X, \rho\}$ называется полным, если в нем сходится любая последовательность Коши.*

Определение. *Нормированное векторное пространство E, полное относительно метрики $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$, определяемой нормой $||\,||$, называется банаховым пространством.*

Пример. $\mathbf{R}^1$ есть полное метрическое пространство, оно также и банахово пространство.

Теорема. *Пусть $R_i = \{E, \rho_i\}$, где E – линейное пространство, в котором введены две $||\,||_i$ и метрика $\rho_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||_i$ определена нормой $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда если нормы $||\,||_1$ и $||\,||_2$ эквивалентны, то любая сходящаяся последовательность (любая последовательность Коши) $(\mathbf{p}_n)$ в R_1 является сходящейся последовательностью (последовательностью Коши) в R_2 и наоборот. (Таким образом, если нормы $||\,||_1$ и $||\,||_2$ эквивалентны, то понятия предела последовательности в метрических пространствах R_1 и R_2 совпадают.)*

Доказательство. Поскольку нормы $||\,||_1$ и $||\,||_2$ эквивалентны, то существуют постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 > 0$ такие, что $\forall \mathbf{x} \in E$

$$c_1 \cdot ||\mathbf{x}||_1 \le ||\mathbf{x}||_2 \le c_2 \cdot ||\mathbf{x}||_1,$$

$$c_2^{-1} \cdot ||\mathbf{x}||_2 \le ||\mathbf{x}||_1 \le c_1^{-1} \cdot ||\mathbf{x}||_2.$$

Пусть $n \to \mathbf{p}_n \in E$ – последовательность Коши в $R_1 = \{E, \rho_1\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такое, что

$$(\forall m, n \ge N(\varepsilon)) \Rightarrow (\rho_1(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m) = ||\mathbf{p}_n - \mathbf{q}_m||_1 < \varepsilon/c_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\rho_2(\mathbf{p}_n, \mathbf{p}_m) = ||\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m||_2 \le c_2 \cdot ||\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_m||_1 < c_2 \cdot (\varepsilon/c_2) = \varepsilon),$$

т. е. $(\mathbf{p}_n)$ есть последовательность Коши в $R_2 = \{E, \rho_2\}$.

Т е о р е м а. *Пусть* $R = \{\mathbf{R}^n, \rho\}$, *где* ρ *есть метрика, определяемая любой из трех эквивалентных норм* $||\,||_1$, $||\,||_2$, $||\,||_\infty$. *Тогда для*

$$p_k(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}) \in \mathbf{R}^n,\ p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in$$

$$\in \mathbf{R}^n(\lim_{k\to+\infty} p_k = p) \Leftrightarrow (\lim_{k\to+\infty} a_i^{(k)} = a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\exists \lim_{k\to+\infty} p_k = p$, тогда $\lim_{k\to+\infty} \rho(p_k, p) = 0) \Rightarrow (\lim_{k\to+\infty} ||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}|| = 0)$, т. е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}||_\infty < \varepsilon\ \forall k \geq N$, но тогда

$$(||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}||_\infty = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|a_i^{(k)} - a_i| \leq ||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}||_\infty < \varepsilon\ \forall i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \lim_{k\to+\infty} a_i^{(k)} = a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n).$$

Достаточность. Пусть $\exists \lim_{k\to+\infty} a_i^{(k)} = a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_i \in \mathbf{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ такие, что $|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon\ \forall k \geq N_i$. Но тогда

$$(\forall k \geq \max_i N_i) \Rightarrow (|a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon;\ i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}||_\infty = \sup_{i=1,2,\ldots,n} |a_i^{(k)} - a_i| < \varepsilon) \Rightarrow (\lim_{k\to+\infty} \rho(p_k, p) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\exists \lim_{k\to+\infty} p_k = p).$$

Т е о р е м а (о полноте $\mathbf{R}^n$). *Пусть* $\mathbf{R}^n$ *– n-мерное евклидово пространство и* $k \to p_n \in \mathbf{R}^n$ *– последовательность в* $\mathbf{R}^n$. *Тогда* $(\exists \lim_{k\to+\infty} p_k) \Leftrightarrow ((p_k)$ *есть последовательность Коши (в* $\mathbf{R}^n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $\exists \lim_{k\to+\infty} p_k = p$, где $p_k \in \mathbf{R}^n\ \forall k \in \mathbf{N}$ и $p \in \mathbf{R}^n$. Тогда поскольку $\lim_{k\to+\infty} \rho(p_k, p) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho(p_k, p) < \varepsilon/2$, $\rho(p_m, p) < \varepsilon/2\ \forall k, m \geq N$. В силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(p_k, p_m) \leq \rho(p_k, p) + \rho(p, p_m) < \varepsilon\ \forall k, m \geq N,$$

т. е. (p_k) есть последовательность Коши в $\mathbf{R}^n$.

Достаточность. Пусть $k \to p_k \in \mathbf{R}^n$ – последовательность Коши в $\mathbf{R}^n$, причем $p_k = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)})$. Тогда из неравенств $|a_i^{(k)} - a_i^{(m)}| \leq ||\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_m||_\infty = \rho(p_k, p_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ следует, что числовая последовательность $k \to a_i^{(k)} \in \mathbf{R}\ \forall i$ есть последовательность Коши в $\mathbf{R}$.

В силу полноты $\mathbf{R}$ имеем $\exists \lim\limits_{k\to+\infty} a_i^{(k)} = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $a_i \in \mathbf{R}$. Пусть $p = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, тогда из предыдущей теоремы имеем $(a_i = \lim\limits_{k\to+\infty} a_i^{(k)}\ \forall i) \Rightarrow (p = \lim\limits_{k\to+\infty} p_k$ (в $\mathbf{R}^n$)).

Следствие. Евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ полно в любой из эквивалентных норм $\|\|_1$, $\|\|_2$, $\|\|_\infty$.

Замечание. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и $A \subset X$, $p \in A' \subset X$, тогда система множеств $\{\dot{U}(p) \cap A\}$ есть база во множестве A (которую будем обозначать $x \to p$).

В самом деле, поскольку p – предельная точка множества A, то: 1) $\dot{U}(p) \cap A \neq \varnothing$ для любой окрестности $U(p)$; 2) в силу свойства 3) окрестностей в метрическом пространстве R для любых двух окрестностей $U(p)$ и $V(p)$ существует окрестность $W(p) \subset U(p) \cap V(p)$, и тогда в силу 1) имеем $\dot{W}(p) \cap A \subset (\dot{U}(p) \cap A) \cap (\dot{V}(p) \cap A)$, т. е. система множеств $\{\dot{U}(p) \cap A\}$ есть база во множестве A.

Определение (предела отображения по Коши). *Пусть $R = \{X, \rho\}$ и $R_1 = \{X_1, \rho_1\}$ – метрические пространства. Пусть $A \subset X$ и $f : A \subset X \to X_1$ есть отображение множества A в X_1. Пусть $a \in A' \subset X$. Тогда точка $a_1 \in X_1$ называется пределом (по Коши) отображения f по базе $x \to a$, если для любой окрестности $V(a_1) \subset X_1$ существует окрестность $U(a) \subset X$ такая, что $f(x) \in V(a_1)$ $\forall x \in a \cap \dot{U}(a)$; или $a_1 = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$, удовлетворяющего неравенствам $0 < \rho(x, a) < \delta$, имеем $\rho_1(f(x), a_1) < \varepsilon$.*

Определение (предела отображения по Гейне). *Точка $a_1 \in X_1$ называется пределом (по Гейне) отображения $f : A \subset X \to X_1$ $(x \to f(x))$ при $x \to a$, $a \in A' \subset X$, если для любой последовательности Гейне (x_n), связанной с точкой $a \in A'$ (т. е. такой, что $x_n \in A$, $x_n \neq a$ $\forall n \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$) $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = a_1$.*

Теорема (об эквивалентности определений предела отображения по Коши и по Гейне). *Определения пределов отображения (в точке) по Коши и по Гейне эквивалентны, т. е. если $x \to f(x)$ есть отображение множества $A \subset X$ в X_1 и $a \in A' \subset X$, то $(\exists \lim\limits_{x\to a} f(x) = a_1) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = a_1$ для любой последовательности Гейне (x_n), связанной с точкой $a \in A')$.* Доказательство проведите самостоятельно по примеру доказательства об эквивалентности определений предела числовой функции в точке по Коши и по Гейне из ч. I; см. также [2] (с. 94, теорема 4.2).

Теорема (единственности предела). *Если отображение $x \to f(x)$ $(f : A \subset X \to X_1$, где $R = \{X, \rho\}$ и $R_1 = \{X_1, \rho_1\}$ – метрические пространства) имеет предел в точке $a \in A' \subset X$ по базе $x \to a$, то этот предел единствен.*

Доказать самостоятельно, используя свойство 4) (аксиому отдели-

мости Хаусдорфа) окрестностей в метрическом пространстве $\mathbf{R}_1$.

Важный частный случай. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, а $R_1 = \{\mathbf{R}^m, \rho_1\}$ – m–мерное евклидово пространство с метрикой ρ_1, построенной с помощью любой из эквивалентных норм $\|\ \|_1$, $\|\ \|_2$ или $\|\ \|_\infty$.

Пусть $M \subset X$ и $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ есть отображение M в $\mathbf{R}^m$. При $m = 1$ отображение $x \to f(x)$ будем называть (числовой) функцией, а при $m \geq 2$ отображение $x \to f(x)$ будем называть (векторной) функцией, определенной на множестве $M \subset X$ метрического пространства R. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ – канонический базис в $\mathbf{R}^m$, т. е. $\mathbf{e}_i = \underbrace{(0, \ldots, 0, \overset{i}{1}, 0, \ldots, 0)}_{m}$, тогда $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} F_i(x) \cdot \mathbf{e}_i$, где отображения $f_i : M \subset X \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ называются координатными функциями (векторной) функции $f(x)$. Полагаем по определению $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, считая $f(x)$ точкой в аффинном пространстве R^m.

Рассмотрим любой $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, тогда $\mathbf{y} = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i e_i$, $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Введем в $\mathbf{R}^m$ отображение $p_i : \mathbf{y} \to y_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, называемое i–й проекцией (в $\mathbf{R}^m$), так что $p_i(\mathbf{y}) = y_i$. Очевидно, отображение $p_i : \mathbf{y} \to y_i$ линейно на $\mathbf{R}^m$, т. е. $\forall \mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)} \in \mathbf{R}^m$ и $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ $p_i(\alpha_1 \mathbf{y}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{y}^{(2)}) = \alpha_1 p_i(\mathbf{y}^{(1)}) + \alpha_2 p_i(\mathbf{y}^{(2)})$.

Заметим, что если $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ и $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, то $f_i = p_i \circ \mathbf{f}$ $\forall i$ $\left(\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}_i\right)$. Из полученных результатов о пределах в метрических пространствах имеем:

Т е о р е м а. *Пусть* $a \in M' \subset X$ *и* $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$, *причем* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, $A = (A_1, \ldots, A_m)$. *Тогда* $(\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x \to a} f)i(x) = A_i$ $\forall i$, $\exists \lim\limits_{x \to a} p_i \circ f(x) = p_i(\mathbf{A})$ $\forall i)$.

З а м е ч а н и е. Пусть $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ и $g : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ – два отображения, тогда поскольку $\mathbf{R}^m$ – линейное пространство, то можно определить отображения $\mathbf{f} \pm \mathbf{g} : M \subset X \to R^m$ и $\lambda \cdot \mathbf{f} : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ $(\forall \lambda \in \mathbf{R})$, положив $\forall x \in M \subset X$ $(\mathbf{f} \pm \mathbf{g})(x) = \mathbf{f}(x) \pm \mathbf{g}(x)$, $(\lambda \cdot \mathbf{f})(x) = \lambda \cdot \mathbf{f}(x)$.

Т е о р е м а. *Пусть* $R = \{X, \rho\}$ – *метрическое пространство,* $M \subset X$ *и* $a \in M'$. *Пусть* $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$, $g : M \to \mathbf{R}^m$ *и* $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\exists \lim\limits_{x \to a} g(x) = B$. *Тогда при* $m \geq 1$:

1) $\exists \lim\limits_{x \to a} (\alpha_1 \cdot \mathbf{f}(x) + \alpha_2 \cdot \mathbf{g}(x)) = \alpha_1 \cdot \mathbf{A} + \alpha_2 \cdot \mathbf{B}$ $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$;

2) $\exists \lim\limits_{x \to a} (\mathbf{f}(x), \mathbf{g}(x)) = (A, B)$;

3) при $m = 1$ *и* $B \neq 0$ $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = A/B$. (Доказать самим.)

З а м е ч а н и е. Важным случаем метрического пространства

$R = \{X, \rho\}$ являются евклидовы пространства $R = \mathbf{R}^1$ и $R = \mathbf{R}^n$ $(n \geq 2)$. Тогда отображение $\mathbf{f} : M \subset \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^m$ есть (векторная) функция одного действительного переменного, а отображение $\mathbf{f} : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ есть (векторная) функция n–переменных, при этом если $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}_i$, $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, то для координатных функций $f_i(x)$ принята запись $f_i(x) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Пусть $M \subset \mathbf{R}^n$ и $f : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$. При $n = 2$ $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных. Пусть $p_0 = (x_0, y_0) \in M'$ и существует проколотая окрестность $\dot{U}(p_0) \subset M \subset \mathbf{R}^2$. Тогда если $\exists \lim\limits_{p \to p_0} f(p) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$, то этот предел называется двойным пределом функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) (или пределом функции по совокупности переменных x и y).

Пусть при фиксированном $y \neq y_0$ $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) = \varphi(y)$ и при фиксированном $x \neq x_0$ $\exists \lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) = \psi(x)$. Тогда пределы (если они существуют)

$$\lim_{y \to y_0} \varphi(y) = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right) = \lim_{y \to y_0} \lim_{x \to x_0} f(x, y), \lim_{x \to x_0} \psi(x) =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right) = \lim_{x \to x_0} \lim_{y \to y_0} f(x, y)$$

называются повторными пределами функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Пример 1. Двойной предел существует, а повторные пределы могут и не существовать:

$$f(x, y) = \begin{cases} x \cdot \sin(1/y) + y \cdot \sin(1/x) \text{ при } x \cdot y \neq 0, \\ 0 \text{ при } x \cdot y = 0. \end{cases}$$

Из неравенства $|f(x, y)| \leq |x| + |y| \Rightarrow \left(\exists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0\right)$. Но при $x \neq 0$ не существует $\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)$, а при $y \neq 0$ не существует $\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$.

Пример 2. Двойной предел не существует, а повторные пределы существуют и различны.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2) \text{ при } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 \text{ при } x = y = 0. \end{cases}$$

Тогда в любой $\dot{U}((0, 0))$ существуют точки $p_1 = (a, 0)$, $p_2 = (0, a)$ такие, что $f(p_1) = 1$, $f(p_2) = -1$.

Таким образом, двойной предел $f(x, y)$ при $(x, y) \to (0, 0)$ не существует. Но при $x \neq 0$ $(\psi(x) = \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 1) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{x \to 0} \psi(x) = 1)$, а при $y \neq 0$ $(\varphi(y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, y) = -1) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{y \to 0} \varphi(y) = -1)$, т. е. $\lim\limits_{x \to 0} \lim\limits_{y \to 0} f(x, y) = 1 \neq -1 = \lim\limits_{y \to 0} \lim\limits_{x \to 0} f(x, y)$.

Пример 3. Двойной предел не существует, а повторные пределы существуют и одинаковы.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}\text{ при } x^2+y^2>0,\\ 0\text{ при } x=y=0.\end{cases}$$

Тогда в любой $\dot U(0,0)$ существуют точки $p_1=(a,a)$, $p_2=(0,a)$ такие, что $f(p_1)=1/2$, $f(p_2)=0$. Таким образом, двойной предел $f(x,y)$ при $(x,y)\to(0,0)$ не существует. Но при $y\neq 0$ $(\exists\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\varphi(y)=0)\Rightarrow$ $(\exists\lim\limits_{y\to 0}\varphi(y)=0)$, а при $x\neq 0$ $(\exists\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=\psi(x)=0)\Rightarrow(\exists\lim\psi(x)=0)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=0.$$

Теорема (достаточное условие существования повторного предела). *Пусть функция* $f:(x,y)\to f(x,y)\in\mathbf{R}$ *определена* $\forall p=(x,y)\in\dot U(p_0)$, *где* $p_0=(x_0,y_0)$. *Пусть существует двойной предел* $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$ *и* $\forall y\neq y_0\ \exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$. *Тогда существует повторный предел*

$$\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A.$$

Доказательство. Поскольку $\exists\lim\limits_{p\to p_0} f(p)=A$, то $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ такое, что $\forall p\in\dot U_\delta(p_0)$ (т. е. при $0<\rho(p,p_0)<\delta$)$|f(x,y)-A|<\varepsilon$. Заметим, что в силу свойства 5) окрестностей в метрическом пространстве $\forall y\neq y_0$ такого, что $0<|y-y_0|<\delta/2$, существует окрестность $V(x_0,y)\subset\dot U_\delta(p_0)$ и поэтому функция $f(p)$ определена в $V(x_0,y)$. Поскольку по условию $\forall y\neq y_0\ \exists\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$, то в неравенстве $|f(x,y)-A|<\varepsilon$ $(x,y)\in\dot U_\delta(p_0)$ можно перейти к пределу при $x\to x_0$, где y – любое такое, что $0<|y-y_o|<\delta/2$. Но тогда для любого y, удовлетворяющего неравенству $0<|y-y_0|<\delta/2$, имеем оценку $|\varphi(y)-A|\le\varepsilon$, т. е. $\exists\lim\limits_{y\to y_0}\varphi(y)=A$.

Следствие. Пусть функция $f(x,y)$ определена в $\dot U((x_0,y_0))$ в 1) существует двойной предел $\lim\limits_{p\to p_0} f(p)$; 2) существуют оба повторных предела $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ и $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$. Тогда повторные пределы равны двойному пределу.

§ 9. Непрерывные отображения в метрических пространствах

Несколько обобщим понятие окрестности точки $a \in X$ в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Напомним (см. §7 о топологии метрического пространства), что множество $G \subset X$ называется открытым в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$, если $\forall a \in G$ существует центрированная окрестность (шар) $Ш_\delta(a) = \{x \in X | \rho(x, a) < \delta\}$ такая, что $Ш_\delta(a) \subset G$.

О п р е д е л е н и е. *Открытой окрестностью точки $\in X$ называется любое открытое множество $G \subset X$, содержащее точку a. Обозначение $U(a)$, $V(a)$, $W(a)$ и т. д. – открытая окрестность точки $a \in X$.*

З а м е ч а н и е. Открытые окрестности обладают следующими свойствами:

1) если $a \in X$, то любая окрестность $U(a)$ точки a непуста;

2) для любой окрестности $U(a)$ точки $a \in X$ существует центрированная окрестность $Ш_\delta(a) \subset U(a)$;

3) пересечение любых двух окрестностей $U(a)$ и $V(a)$ точки $a \in X$ является открытой окрестностью точки a (доказать самостоятельно);

3′) о б о б щ е н и е. Пересечение конечного числа открытых окрестностей точки $a \in X$ является открытой окрестностью точки a;

4) а к с и о м а (отделимости Хаусдорфа). *Для любых точек $a, b \in X$ таких, что $a \neq b$, существуют окрестности $U(a)$ и $V(b)$, для которых $U(a) \cap V(b) = \varnothing$;*

5) $(\forall b \in U(a)) \Rightarrow (U(A) = V(b))$.

Очевидно, в силу свойств 1)–5) окрестностей вида $U(a)$ во всех результатах §7 о топологии метрического пространства под $U(a)$ можно понимать открытые окрестности в новом определении.

Пусть даны два метрических пространства $R = \{X, \rho_x\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$. Пусть $f : M \subset X \to Y$ $(x \to f(x) = y \in Y)$ есть отображение множества M в Y.

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : M \subset X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$ (запись: $f \in C(x_0)$), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in M$, для которого $\rho_X(x, x_0) < \delta$ имеем*

$$\rho_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : M \subset X \to Y$, непрерывное в каждой точке $x \in M$, называется непрерывным на множестве M. Запись: $f \in C(M)$.*

З а м е ч а н и е. Если x_0 – изолированная точка $M \subset X$, то для любого отображения $f : M \subset X \to Y$ имеем $f \in C(x_0)$.

Замечание. Если $x_0 \in M' \subset X$ и $f : M \subset X \to Y$, то можно говорить о пределе (по базе $x \to x_0$) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Теорема (предельный критерий непрерывности отображения в точке). *Пусть $f : M \subset X \to Y$ и $x_0 \in M$. Для того чтобы $f \in C(x_0)$, необходимо и достаточно выполнения одного из следующих двух условий: 1) x_0 – изолированная точка множества M; либо 2) если $x_0 \in M \cap M'$, то*

$$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Доказать самим, используя соответствующую теорему из ч. I.

Теорема (о непрерывности композиции двух непрерывных отображений). *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$ и $f : M \subset X \to Y$. Пусть $T = \{Z, \rho_Z\}$ и существует множество $N \subset Y$ такое, что $N \supset f(M)$ и $\varphi : N \subset Y \to Y$. Пусть $f \in C(x_0)$ и $\varphi \in C(y_0)$, где $x_0 \in M$ и $y_0 = f(x_0) \in N$. Тогда композиция $F = \varphi \circ f : M \subset X \to Z$ такова, что $F \in C(x_0)$.* Доказать самим, используя схему доказательства теоремы о непрерывности сложной функции (см. ч. I, гл. 4, §2).

Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ и $S = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства и $f : M \subset X \to Y$ – отображение множества M в Y. Пусть $Y_1 \subset Y$, тогда множество $f^{-1}(Y_1) = \{x \in M | f(x) \in Y_1\}$ называется полным прообразом множества Y_1 при отображении f. Ниже нам понадобятся свойства образов и полных прообразов, отображения f (см. § 2 гл. 1 ч. I).

Перефразируя (ε, δ)-определение непрерывности отображения $f : M \subset X \to Y$, получаем

Определение. *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ и $S = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства. Отображение $f : M \subset X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если для любой центрированной окрестности $V_\varepsilon^Y(f(x_0)) \subset Y$ точки $f(x_0)$ существует центрированная окрестность $U_\delta^X(x_0) \subset X$ точки x_0 такая, что*

$$f(U_\delta^X(x_0) \cap M) \subset V_\varepsilon^Y(f(x_0)).$$

В силу свойств 1)–5) окрестностей из (ε, δ)-определения вытекает следующее эквивалентное ему (проверить самим)

Определение (окрестностное). *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства. Отображение $f : M \subset X \to Y$ называется непрерывным в точке $x_0 \in M$, если для любой окрестности $V^Y(f(x_0)) \subset Y$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $U^X(x_0) \subset X$ точки x_0 такая, что $f(U^X(x_0) \cap M) \subset V^Y(f(x_0))$.*

Т е о р е м а (критерий непрерывности отображения, определенного на открытом множестве). *Пусть* $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_y\}$ - *метрические пространства и* $G \subset X$ - *открытое (в* R*) множество. Пусть* $f : G \subset X \to Y$ - *отображение* G *в* Y. *Тогда* $(f \in C(G)) \Leftrightarrow$ *(для любого открытого (в* S*) множества* $V \subset Y$ *полный прообраз* $f^{-1}(V) \subset G$ *открыт в* R*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть $f \in C(G)$, где $G \subset X$ - открытое в R множество. Пусть $V \subset Y$ - открытое в S множество. Докажем, что множество $f^{-1}(V)$ открыто в R. Если $f^{-1}(V) = \varnothing$, то множество $f^{-1}(V)$, очевидно, открыто в R. Пусть $f^{-1}(V) \neq \varnothing$. Рассмотрим любую точку $x_0 \in f^{-1}(V) \subset G$, тогда $f(x_0) \in V \subset Y$. Но множество V открыто в S, и поэтому $V = O^Y(f(x_0))$ есть (открытая) окрестность точки $f(x_0)$ (в S). В силу окрестностного определения непрерывности отображения в точке из $f \in C(x_0)$ вытекает, что для окрестности $O^Y(f(x_0))$ существует окрестность $U^X(x_0) \subset X$ точки x_0 такая, что $f(U^X(x_0) \cap G) \subset O^Y(f(x_0))$. Поскольку множества G и $U^X(x_0)$ открыты и содержат точку x_0, то оба они являются (открытыми) окрестностями точки x_0 и в силу свойства 3) (для окрестностей) их пересечение $G \cap U^X(x_0) = W^X(x_0)$ есть окрестность точки x_0, но тогда $f(W^X(x_0)) \subset O^Y(f(x_0)) = V$, откуда $W^X(x_0) \subset f^{-1}(V)$. Таким образом, $\forall x_0 \in f^{-1}(V)$ существует окрестность $W^X(x_0) \subset f^{-1}(V)$, т. е. множество $f^{-1}(V)$ открыто в R.

Достаточность. Пусть для любого открытого (в S) множества $V \subset Y$ его полный прообраз $f^{-1}(V) \subset G$ открыт в R. Рассмотрим любую точку $x_0 \in G$, тогда $f(x_0) \in Y$. Рассмотрим любую (открытую) окрестность $O^Y(f(x_0)) = V \subset Y$ точки $f(x_0)$. Тогда множество $f^{-1}(V) \subset G$ открыто в R, причем $(f(x_0) \in V) \Rightarrow (x_0 \in f^{-1}(V))$, т. е. $f^{-1}(V) = U^X(x_0) \subset G$ есть (открытая) окрестность точки x_0. Заметим, что $f(f^{-1}(V)) \subset V$. Итак, для любой окрестности $O^Y(f(x_0)) = V \subset Y$ существует окрестность $U^X(x_0) = f^{-1}(V) \subset G$ точки x_0 такая, что $(f(U^x(x_0)) \subset O^Y(f(x_0))) \Rightarrow (f \in C(x_0)\ \forall x_0 \in G) \Rightarrow (f \in C(G))$.

Т е о р е м а (критерий непрерывности отображения). *Пусть* $R = \{X, \rho_X\}$ *и* $S = \{Y, \rho_Y\}$ - *метрические пространства. Пусть* $f : X \to Y$. *Тогда* $(f \in C(X)) \Leftrightarrow$ *(для любого замкнутого (в* S*) множества* $F \subset Y$ *его полный прообраз* $f^{-1}(F) \subset X$ *замкнут в* R*).* Доказать самим, переходя к дополнениям и используя соотношение $f^{-1}(CF) = Cf^{-1}(F)$.

З а м е ч а н и е. В предыдущих критериях непрерывности отображения нельзя в формулировках заменить полные прообразы на прямые образы. Например, при постоянном отображении $f : G \to Y$, $f(x) = y_0\ \forall x \in G$, очевидно, имеем $f \in C(G)$, однако для любого открытого множества $U \subset G$ его образ $f(U) = \{y_0\} \in Y$ есть точка, но точка, вообще говоря, не является открытым множеством в метричес-

ком пространстве $S = \{Y, \rho_Y\}$.

Определение. *Пусть* $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$ – *метрические пространства и множество* $G \subset X$ *открыто в* R. *Отображение* $f : G \subset X \to Y$ *называется открытым, если для любого открытого множества* $U \subset G$ *его образ* $f(U) \subset Y$ *открыт в* S.

Следствие. Пусть $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$ и $G \subset X$, $\mathfrak{G} \subset Y$, где G открыто в R, а $\mathfrak{G}$ открыто в S. Пусть отображение $f : G \overset{\text{на}}{\to} \mathfrak{G}$ есть биекция. Тогда существует обратная биекция $f^{-1} : \mathfrak{G} \overset{\text{на}}{\to} G$, причем: 1) $(f \in C(G)) \Leftrightarrow$ (отображение f^{-1} открыто); 2) (отображение f открыто) $\Leftrightarrow (f^{-1} \in C(\mathfrak{G}))$.

Замечание. (Биекция $f : G \overset{\text{на}}{\to} \mathfrak{G} = f(G)$ является гомеоморфизмом открытого множества G на открытое множество $\mathfrak{G}$) $\Leftrightarrow$ (отображения f и f^{-1} – открыты).

Следствие. Норма $\mathbf{x} \to ||\mathbf{x}||$ в нормированном линейном пространстве E, рассматриваемая как отображение E в прямую $\mathbf{R}$ с естественной метрикой, является непрерывной функцией.

В самом деле, из неравенства $|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||\,| \leq ||\mathbf{x} - \mathbf{a}||$ $\forall \mathbf{x}, \mathbf{a} \in E$ вытекает, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \varepsilon > 0$ такое, что из неравенства $||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| < \delta$ имеем $|\,||\mathbf{x}|| - ||\mathbf{a}||\,| < \varepsilon$.

Теорема. *Пусть* $R = \{X, \rho\}$ – *метрическое пространство, а* $S = \{\mathbf{R}^m, \rho_1\}$ – m-*мерное евклидово пространство. Пусть* $f : M \subset X \to \mathbf{R}^m$ $(x \to f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. *Тогда* $(f \in C(M)) \Leftrightarrow (f_i \in C(M);\ i = 1, 2, \ldots, m)$.

Доказательство вытекает из предельного критерия непрерывности отображения и теоремы о пределе (векторной) функции.

Теорема. *Пусть* $\mathbf{f}$ *и* $\mathbf{g}$ – *(векторные) функции, отображающие множество* $M \subset X$ *в* $\mathbf{R}^m$. *Пусть* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in C(M)$ *и* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Тогда* $\mathbf{f} \pm \mathbf{g}$, $(\mathbf{f}, \mathbf{g})$, $\alpha \cdot \mathbf{f} \in C(M)$. *Если при этом* $m = 1$ *и* $g(x_0) \neq 0$, *то* $f/g \in C(x_0)$. (См. теорему о пределах (векторных) функций.)

§ 10. Компактность в метрических пространствах

Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и $K \subset X$. Напомним, что система открытых множеств $\{G_\alpha\}$ из X называется открытым покрытием множества $K \subset X$, если $\bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha \supset K$.

Определение. *Множество* $K \subset X$ *метрического пространства* $R = \{X, \rho\}$ *называется компактным, если из любого его открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие.*

Определение. *Множество* $A \subset X$ *называется предкомпактным или относительно компактным в* $R = \{X, \rho\}$, *если замыкание* $\overline{A}$ *компактно в* R.

Теорема. *Пусть* $K_i \subset X$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *и множества* K_i

компактны в $R\ \forall i$. *Тогда множество* $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ *компактно в* R.

Доказательство. Пусть система $\{G_\alpha\}$ есть открытое покрытие множества $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$. Тогда, очевидно, $\bigcup_{\alpha} G_\alpha \supset K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и в силу компактности K_i $\forall i$ из системы $\{G_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{G_{j,i}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, l_i; i = 1, 2, \ldots, m)$, так что $\bigcup_{j=1}^{l_i} G_{j,i} \supset K_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Но тогда система открытых множеств $\{G_{j,i}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, l_i; i = 1, 2, \ldots, m)$ конечна и образует (конечное) покрытие множества K : $\bigcup_{i=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{l_i} G_{j,i} \supset K$, т. е. K компактно в R.

Следствие. Объединение конечного числа предкомпактных множеств из R предкомпактно в R.

Пример. Если множество K состоит из конечного числа точек, то оно компактно.

Замечание. Любое неограниченное множество $A \subset X$ метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ не компактно. В самом деле, пусть точка $a \in A \subset X$. Рассмотрим систему открытых шаров $\{Ш_n(a)\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Очевидно, $\bigcup_{n=1}^{+\infty} Ш_n(a) \supset A$. Если бы множество A было компактно в R, то из открытого покрытия $\{Ш_n(a); n = 1, 2, \ldots\}$ можно было бы выделить конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^{m} Ш_{n_i}(a) \supset A$, но тогда $A \subset Ш_{m_0}(a)$ (при $m_0 = \max_{i=1,2,\ldots,m} n_i$), т. е. множество A ограничено вопреки предположению.

Теорема. *Пусть* $K \subset X$ *компактно и* $K \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i$, *где* $\{G_i\}$ – *возрастающая последовательность* $(G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset G_{n+1} \subset \ldots)$ *открытых множеств. Тогда* $\exists n_0$ *такое, что* $K \subset G_{n_0}$.

Доказательство. Очевидно, система $\{G_i\}$ есть открытое покрытие множества K. В силу компактности K из системы $\{G_i\}$ можно выделить конечное подпокрытие $\{G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_m}\}$, но тогда при $n_0 = \max(i_1, \ldots, i_m)$ имеем $K \subset G_{n_0}$.

Замечание. Если при выполнении условий теоремы $K = \bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i$, то $\exists n_0$ такое, что $K = G_{n_0}$.

Теорема. *Пусть* $K \subset X$ *компактно и* $\{F_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ – *убывающая последовательность* $(F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset F_{n+1} \supset \ldots)$ *замкнутых множеств таких, что* $F_i \subset K\ \forall i$ *и* $\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i = \varnothing$. *Тогда* $\exists n_0$ *такое, что* $F_{n_0} = \varnothing$.

Доказательство. Введем открытые множества $G_i = CF_i$. Тогда $(F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots) \Rightarrow (G_1 \subset G_2 \subset \ldots \subset G_n \subset \ldots)$. Кроме того, $(\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i = \varnothing) \Rightarrow (\bigcap_{i=1}^{+\infty} CG_i = C\bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i = \varnothing)$, т. е. $X = \bigcup_{i=1}^{+\infty} G_i \supset K$. Но тогда из предыдущей теоремы следует, что $\exists n_0$ такое, что $K \subset G_{n_0} = CF_{n_0}$, но по условию $F_{n_0} \subset K$, поэтому $F_{n_0} = \varnothing$.

Теорема Кантора. *Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и множество $K \subset X$ компактно. Тогда любая вложенная система непустых замкнутых множеств из K имеет непустое пересечение (т. е. если $K \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, где $F_i \neq \varnothing$, $\overline{F_i} = F_i$ $\forall i$, то $\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i \neq \varnothing$).*

Следствие. Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и множество $K \subset X$ компактно. Тогда любая стягивающаяся система замкнутых непустых множеств из K имеет единственную общую точку (т. е. если $K \supset F_1 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots$, $F_i \neq \varnothing$, $\overline{F_i} = F_i$ $\forall i$ и $\lim\limits_{i \to +\infty} d_i = 0$, где $d_i = \sup\limits_{x,y \in F_i} \rho(x, y)$, то существует точка $a \in K$ такая, что $\bigcap_{i=1}^{+\infty} F_i = \{a\}$).

Определение. *Множество $K \subset X$ метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ называется секвенциально компактным, если каждое его бесконечное подмножество $M \subset K$ имеет хотя бы одну предельную точку, принадлежащую K (т. е. множество $K \subset X$ секвенциально компактно, если (для любого бесконечного подмножества $M \subset K$) $\Rightarrow$ $(M' \subset K \neq \varnothing)$).*

Теорема. *Пусть множество $K \subset X$ компактно в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Тогда K секвенциально компактно.*

Доказательство. Если множество $K \subset X$ состоит из конечного числа точек, то теорема верна. Пусть множество $K \subset X$ компактно и бесконечно. Допустим, что K не является секвенциально компактным в R. Тогда существует бесконечное множество $M \subset K$ такое, что $M' \cap K = \varnothing$. Но тогда для любой точки $x \in K$ существует окрестность $U(x) \subset X$ такая, что $U(x) \cap K$ содержит лишь конечное число точек из M. Очевидно, $K \subset \bigcup_{x \in K} U(x)$, поэтому система $\{U(x), x \in K\}$ есть открытое покрытие множества K. В силу компактности K из этого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие $\bigcup_{i=1}^{m} U(x_i) \supset K \supset M$. Но в окрестности $U(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $\forall i$ содержится лишь конечное число точек из множества M, т. е. множество M конечно, вопреки предположению. Итак, компактное множество K секвенциально компактно.

Определение. *Пусть $M \subset X$ есть множество метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ и $\varepsilon > 0$. Множество $A \subset X$ называется ε-сетью для множества M, если $\forall x \in M$ $\exists a \in A$ такое, что* $\rho(x, a) < \varepsilon$.

Определение. *Множество $M \subset X$ метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ называется вполне ограниченным, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.*

Замечание. Если множество $M \subset X$ вполне ограничено, то M – ограниченное множество.

В самом деле, поскольку $M \subset X$ вполне ограничено в R, то при $\varepsilon = 1$ для множества M существует конечная 1–сеть $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset X$, причем если $d = \max\limits_{i,j=1,\ldots,m} \rho(a_i, a_j)$, то $0 \leq d < +\infty$.

Пусть $y \in M$ фиксировано, тогда $\forall x \in M$ $\exists a_i, a_j \in M$ такие, что $\rho(x, a_i) < 1$ и $\rho(y, a_j) < 1$, откуда в силу неравенства треугольника $\forall x \in M$ имеем

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, a_i) + \rho(a_i, a_j) + \rho(a_j, y) < 2 + d \,(\text{т.е. } M \subset \text{Ш}_{2+d}(y)).$$

Замечание. Если множество $M \subset X$ вполне ограничено в метрическом пространстве $R = \{x, \rho\}$, то для множества M $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ такая, что $b_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

В самом деле, если множество $M \subset X$ вполне ограничено, то $\forall \varepsilon > 0$ существует конечная $\varepsilon/2$–сеть $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \subset X$, но тогда $\forall a_i \in A$ $\exists b_i \in M$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ такое, что $\rho(a_i, b_i) < \varepsilon/2$, и поэтому множество $B = \{b_1, \ldots, b_m\} \subset M$ есть конечная ε-сеть для множества M, поскольку $\forall x \in M$ $\exists a_j \in A$ и $\exists b_j \in M$ такие, что $\rho(x, a_j) < \varepsilon/2$, $\rho(a_j, b_j) < \varepsilon/2$, откуда, применяя неравенство треугольника, имеем

$$\rho(x, b_j) \leq \rho(x, a_j) + \rho(a_j, b_j) < \varepsilon.$$

Замечание. В произвольном метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$ из ограниченности множества $M \subset X$, вообще говоря, не следует его вполне ограниченность в R.

Пример. Рассмотрим метрическое пространство $m = \{E, \rho\}$, где $\mathbf{x} \in E$, если $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, $x_i \in \mathbf{R}$ и $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup\limits_i |x_i| < +\infty$, с метрикой $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty$. Тогда множество $F = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \ldots\}$, где $\mathbf{e}_n = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{n}, \ldots)$, ограничено, так как $\rho(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 1$ $\forall i \neq j$, но при $0 < \varepsilon < 1/2$ для F не существует конечной ε-сети, т. е. множество F не является вполне ограниченным в пространстве m. Допустим от противного, что F вполне ограничено, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть

$B = \{\mathbf{e}_{i_1}, \mathbf{e}_{i_2}, \ldots, \mathbf{e}_{i_m}\} \subset F$. В силу бесконечности множества F и конечности множества $B \subset F$ существуют $\mathbf{e}_j \in F$ и $\mathbf{e}_{i_k} \in B \subset F$ такие, что $\rho(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i_k}) < \varepsilon$ и $\mathbf{e}_j \neq \mathbf{e}_{i_k}$, но в силу построения F $\rho(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{i_k}) = 1$ и при $0 < \varepsilon < 1/2$ получаем противоречие. Итак, F не может быть вполне ограниченным в метрическом пространстве m, будучи ограниченным в нем. Попутно заметим, что $F' = \varnothing$, т. е. множество $F = \overline{F}$ замкнуто в m.

З а м е ч а н и е. Если множество $M \subset \mathbf{R}^n$ ограничено, то оно вполне ограничено в $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, для ограниченного множества $M \subset \mathbf{R}^n$ существует куб I^n такой, что $M \subset I^n$. Но $\forall \varepsilon > 0$ можно разбить куб I^n на малые кубики с ребром $2\varepsilon/\sqrt{n}$. Тогда вершины этих кубиков образуют конечную ε–сеть как для куба I^n, так и для множества $M \subset I^n$.

Т е о р е м а. *Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство и множество $K \subset X$ секвенциально компактно. Тогда множество K вполне ограничено (а стало быть, и ограничено) в R.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $K \subset X$ секвенциально компактно. Допустим, что K не является вполне ограниченным в R. Тогда существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что для множества K в X нет конечной ε_0-сети. Пусть точка $a_1 \in K$ – любая, но фиксирована. Множество $\{a_i\} \subset X$ не есть ε_0-сеть, поэтому $\exists a_2 \in K$ такая, что $\rho(a_1, a_2) \geq \varepsilon_0 > 0$. Множество $\{a_1, a_2\}$ не может быть ε_0-сетью для K, поэтому $\exists a_3 \in K$ такое, что $\rho(a_i, a_3) \geq \varepsilon_0 > 0$ $(i = 1, 2)$. Конечное множество $\{a_1, a_2, a_3\}$ также не может быть ε_0-сетью для K, тогда $\exists a_4 \in K$ такая, что $\rho(a_i, a_4) \geq \varepsilon_0 > 0$ $(i = 1, 2, 3)$ и т. д. Построением по индукции получаем множество $M = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \subset K$ такое, что $\rho(a_i, a_j) \geq \varepsilon_0 > 0$ $\forall i \neq j$. Но для бесконечного множества M имеем тогда $M' = \varnothing$ (в самом деле, если $M' \neq \varnothing$ и $a \in M'$ – предельная точка, то в окрестности $U_{\varepsilon_0/2}(a)$ существуют, по меньшей мере, две различные точки $a_i, a_j \in M$ $(i \neq j)$ и тогда по неравенству треугольника $\varepsilon_0 \leq \rho(a_i, a_j) \leq \rho(a_i, a) + \rho(a, a_j) < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0$, противоречие), что противоречит секвенциальной компактности K. Итак, K вполне ограничено в R.

Т е о р е м а. *Пусть множество $K \subset X$ секвенциально компактно в $R = \{X, \rho\}$ и $F \subset K$ – замкнутое множество. Тогда множество F секвенциально компактно в F.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $M \subset F$ – любое бесконечное множество. Поскольку $M \subset K$, то в силу секвенциальной компактности K имеем $M' \cap K \neq \varnothing$. В силу замкнутости F из $M \subset F$ получаем $\overline{M} \subset \overline{F} = F$. Тогда $(M' \subset \overline{M} \subset F \subset K) \Rightarrow (M' \cap \overline{F} = M' \cap K \neq \varnothing)$. Итак, (для любого бесконечного множества $M \subset F$) $\Rightarrow (M' \cap F \neq \varnothing)$, т. е. множество F секвенциально компактно в R.

Т е о р е м а. *Пусть множество $K \subset X$ секвенциально компактно в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Тогда K замкнуто в R.*

Доказательство. Пусть множество $K \subset X$ секвенциально компактно в R и $x_0 \in K'$. Тогда существует последовательность попарно различных точек (x_i) $(x \in K\, \forall i)$ такая, что $\lim\limits_{i \to +\infty} x_i = x_0$. Но тогда бесконечное множество $M = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\} \subset K$ и $M' = \{x_0\}$. В силу секвенциальной компактности K имеем $(M' \cap K \neq \varnothing) \Rightarrow x_0 \in K) \Rightarrow (K' \subset K)$, т. е. K замкнуто в R.

Следствие. Пусть множество $K \subset X$ компактно в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$, тогда множество K вполне ограничено и замкнуто в R.

Теорема. *Пусть множество $F \subset X$ замкнуто и вполне ограничено в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ имеет место представление $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} F_i$, где $F_i = \overline{F}_i \subset F$ $(i = 1, 2, \ldots, m(\varepsilon))$ - непустые замкнутые множества диаметра $d(F_i) < \varepsilon$.*

Доказательство. Поскольку $F \subset X$ вполне ограничено в R, то $\forall \varepsilon > 0$ для множества F существует конечная $\varepsilon/3$-сеть $\{a_1, \ldots, a_{m(\varepsilon)}\} \subset F$. Но тогда $\bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} Ш_{\varepsilon/3}(a_i) \supset F$. Положим $F_i = \overline{Ш}_{\varepsilon/3}(a_i) \cap F \neq \varnothing$. Очевидно, F_i являются непустыми замкнутыми подмножествами F диаметра $\leq 2\varepsilon/3$. Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $F = \bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} F_i$, где $F_i \neq \varnothing$, $\overline{F}_i = F_i$, $d(F_i) < \varepsilon\ \forall i$.

Следствие. Пусть $K \subset X$ секвенциально компактно в $R = \{X, \rho\}$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ имеет место представление $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} K_i$, где K_i - непустые замкнутые секвенциально компактные множества диаметра $d(K_i) < \varepsilon$.

Теорема. *Пусть $R = \{X, \rho\}$ - метрическое пространство и множество секвенциально компактно в R. Тогда K компактно в R.*

Доказательство. Пусть множество $K \subset X$ секвенциально компактно в R. Допустим от противного, что K не является компактным в R, т. е. существует бесконечное открытое покрытие $\{G_\alpha\}$: $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, из которого нельзя выделить конечного подпокрытия для K. Поскольку K секвенциально компактно, то оно замкнуто и вполне ограничено, т. е. $\forall \varepsilon > 0$ существует представление $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} K_i(\varepsilon)$, где $K_i(\varepsilon) \neq \varnothing\ \forall i$, замкнуто и имеет диаметр $< \varepsilon$, причем $K_i(\varepsilon) \subset K$. Но тогда хотя бы одно из множеств $K_{i_0}(\varepsilon)$ не допускает выделения конечного подпокрытия из открытого покрытия $\{G_\alpha\}$ и, в частности, множество $K_{i_0}(\varepsilon)$ бесконечно. По индукции показывается, что существует система непустых бесконечных замкнутых множеств $\{K_n\}$ такая, что

$K \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$, $d(K_n) < 1/n$, причем множество K_n $\forall n$ не допускает выделения конечного подпокрытия из открытого покрытия $\{G_\alpha\}$. Но тогда система $\{K_n\}$ есть стягивающаяся система непустых, замкнутых, бесконечных множеств из секвенциально компактного множества K.Поскольку множество K_n бесконечно для любого n, то во множестве K существует последовательность (x_n), состоящая из попарно различных точек ($x_n \neq x_m$ при $n \neq m$) и таких, что $x_n \in K_n$ $\forall n \in \mathbf{N}$. Но $d(K_n) < 1/n$, поэтому $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 > 1/\varepsilon$ такой, что $(\forall m, n \geq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow (x_n, x_m \in K_{n_0}) \Rightarrow (\rho(x_n, x_m) < \varepsilon)$, т. е. (x_n) есть последовательность Коши. В силу секвенциальной компактности K для бесконечного множества $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\} \subset K$ имеем $M' \cap K \neq \varnothing$, поэтому последовательность Коши (x_n) имеет (и притом единственную) точку сгущения $a \in K$. В силу замкнутости K_n $\forall n$ из $x_m \in K_n$ $\forall m \geq n$ имеем $a \in K_n$ $\forall n$, т. е. $a \in \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} K_n$, но система $\{K_n\}$ – стягивающаяся, поэтому $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} K_n = \{a\}$. Поскольку $a \in K$, то существует открытое множество G_{α_0} из системы $\{G_\alpha\}$ такое, что $a \in G_{\alpha_0}$, но a – внутренняя точка G_{α_0}, поэтому существует открытый шар $\mathrm{Ш}_\delta(a) \subset X$ такой, что $\mathrm{Ш}_\delta(a) \subset G_{\alpha_0}$. Поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} d(K_n) = 0$ (и $a \in K_n$ $\forall n$), то $\exists n_0$ такой, что $K_{n_0} \subset \mathrm{Ш}_\delta(a) \subset G_{\alpha_0}$, т. е. множество K_{n_0} оказалось покрытым одним элементом G_{α_0} из системы $\{G\alpha\}$. Противоречие с построением множества K_{n_0}. Итак, секвенциально компактное множество K компактно в R.

Следствие. В метрическом пространстве понятия компактности и секвенциальной компактности совпадают.

Теорема Больцано – Вейерштрасса. *Пусть множество $K \subset X$ компактно в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$. Тогда из любой последовательности (p_n) точек из K можно выделить сходящуюся подпоследовательность (p_{n_K}), причем* $\lim\limits_{k \to +\infty} p_{n_k} = p_0 \in K$.

Доказательство. Пусть $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \subset K$. Множество K компактно, а потому и секвенциально компактно в R. Если $M \subset K$ – бесконечное множество, то $M' \cap K \neq \varnothing$ и $\exists p_0 \in M' \cap K$. Но тогда $p_0 \in K$ есть точка сгущения последовательности (p_n), и поэтому существует сходящаяся к точке $p_0 \in K$ подпоследовательность (p_{n_k}). Если множество $M = \{p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots\} \equiv \{a_1, \ldots, a_m\} \subset K$ конечно, то существует точка $a_l = p_0 \in K$ такая, что равенство $p_n = p_0$ имеет место для бесконечного множества индексов $n = n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ ($n_k \uparrow\uparrow n_k \geq k$), но тогда $\lim\limits_{k \to +\infty} p_{n_k} = p_0 \in K$, т. е. опять из последовательности (p_n) можно выделить сходящуюся подпоследовательность (p_{n_k}).

Теорема (критерий компактности в полном метрическом пространстве). *Пусть $R = \{X, \rho\}$ – полное метрическое пространство и $K \subset X$. Тогда (множество K компактно в R) $\Leftrightarrow$ (K замкнуто и вполне ограничено в R).*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество $K \subset X$ компактно в R. Тогда K секвенциально компактно в R, а потому замкнуто и вполне ограничено.

Достаточность. Пусть множество $K \subset X$ замкнуто и вполне ограничено в полном метрическом пространстве R. Докажем, что множество K секвенциально компактно в R, для чего достаточно доказать, что из любой последовательности (p_k), состоящей из попарно различных точек множества K, можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Заметим, что ранее было доказано, что если замкнутое множество $K \subset X$ вполне ограничено, то $\forall \varepsilon > 0$ существует представление $K = \bigcup_{i=1}^{m(\varepsilon)} K^{(i)}$, где $K^{(i)} \subset K$ – непустые замкнутые множества с диаметрами $d(K^{(i)}) < \varepsilon \ \forall i$, причем существует $K^{(i_0)}$, содержащее бесконечное множество членов из последовательности (p_k). Рассмотрим последовательность $\varepsilon_n = 1/n \ \forall n \in \mathbf{N}$ и, пользуясь сделанным замечанием, построим по индукции стягивающуюся систему непустых замкнутых множеств $\{K_n\}$ такую, что $K \supset K_1 \supset \ldots \supset K_n \supset K_{n+1} \supset \ldots$; $d(K_n) < \varepsilon_n = 1/n$, причем множество $K_n \subset K \ \forall n$ содержит бесконечное множество точек из последовательности (p_k). Пусть

$$p_{k_1} \in K_1, p_{k_2} \in K_2 (k_2 > k_1), p_{k_1} \neq p_{k_2},$$

и, вообще, $p_{k_n} \in K_n \ \forall n \ (k_n \uparrow\uparrow, k_n \geq n)$, $p_{k_n} \neq p_{k_m} \ \forall n \neq m$. Тогда подпоследовательность (p_{k_n}) является последовательностью Коши. В самом деле, поскольку $\lim\limits_{n \to +\infty} d(K_n) = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbf{N}$ такой, что $d(K_{n_0}) < \varepsilon$ и $(\forall m, l \geq n_0) \Rightarrow (p_{k_m}, p_{k_l} \in K_{n_0}) \Rightarrow (\rho(p_{k_m}, p_{k_l}) < \varepsilon)$.

В силу полноты метрического пространства $R \ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} p_{k_n} = p_0 \in X$. Но множество $K \subset X$ замкнуто, поэтому $(p_{k_n} \in K) \Rightarrow (p_0 \in K)$. Итак, множество K секвенциально, компактно, а поэтому и компактно.

Теорема (критерий компактности в $\mathbf{R}^n$). *(Множество $K \subset \mathbf{R}^n$ компактно) $\Leftrightarrow$ (K замкнуто и ограничено).*

В самом деле, применим общий критерий компактности множества в полном метрическом пространстве, поскольку $\mathbf{R}^n$ – полное, а ограниченное в $\mathbf{R}^n$ множество вполне ограничено.

Задача. (Множество $K \subset X$ компактно в полном метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$) $\Leftrightarrow$ (множество K замкнуто и $\forall \varepsilon > 0$ для K существует компактная ε-сеть).

Пусть $R_1 = \{X, \rho_X\}$ и $R_2 = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства. Введем метрическое пространство $R = R_1 \times R_2 = \{Z, \rho\}$, где $Z = X \times Y$

(так что $(z = (x, y) \in Z) \Leftrightarrow (x \in X, y \in Y)$), а метрика $\rho(z_1, z_2)$ определена одним из следующих расстояний:

$$\rho_1(z_1, z_2) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2);$$

$$\rho_\infty(z_1, z_2) = \max(\rho_X(x_1, x_2), \rho_Y(y_1, y_2));$$

$$\rho_2(z_1, z_2) = (\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2))^{1/2}.$$

Проверим свойства метрики для $\rho_2(z_1, z_2)$:

1) $\rho_2(z_1, z_2) = (\rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2))^{1/2} \geq 0$ и $(\rho_2(z_1, z_2) = 0) \Leftrightarrow (\rho_X(x_1, x_2) = 0, \rho_Y(y_1, y_2) = 0) \Leftrightarrow (x_1 = x_2, y_1 = y_2) \Leftrightarrow (z_1 = z_2)$;

2) (симметрия) $\rho_2(z_2, z_1) = \rho_2(z_1, z_2)$. Очевидно,

3) (неравенство треугольника) $\rho_2(z_1, z_2) \leq \rho_2(z_1, z) + \rho_2(z, z_2)$ $\forall z_1, z_2, z \in Z = X \times Y$.

В самом деле, используя неравенство треугольника для метрик ρ_X и ρ_Y, имеем $\rho_2^2(z_1, z_2) = \rho_X^2(x_1, x_2) + \rho_Y^2(y_1, y_2) \leq (\rho_X(x_1, x_2) + \rho_X(x, x_2))^2 + (\rho_Y(y_1, y) + \rho_Y(y, y_2))^2 = (\rho_X^2(x_1, x) + \rho_Y^2(y_1, y)) + (\rho_X^2(x, x_2) + \rho_Y^2(y, y_2)) + 2(\rho_X(x_1, x) \cdot \rho_X(x, x_2) + \rho_Y(y_1, y) \cdot \rho_Y(y, y_2)) \leq$ (но в силу неравенства Коши–Буняковского $2(a_1 b_1 + a_2 b_2) \leq 2(a_1^2 + a_2^2)^{1/2} \cdot (b_1^2 + b_2^2)^{1/2}$ $\forall a_i \geq 0$, $b_i \geq 0$; $i = 1, 2) \leq (\rho_X^2(x_1, x) + \rho_Y^2(y_1, y)) + (\rho_X^2(x, x_2)) + \cdot \rho_Y^2(y, y_2)) + 2(\rho_X^2(x_1, x) + \rho_Y^2(y_1, y))^{1/2} (\rho_X^2(x, x_2) + \rho_Y^2(y, y_2))^{1/2} = \rho_2^2(z_1, z) + \rho_2^2(z, z_2) + 2\rho_2(z_1, z)\rho_2(z, z_2) = (\rho_2(z_1, z) + \rho_2(z, z_2))^2$, т. е. $\rho_2(z_1, z_2) \leq \rho_2(z_1, z) + \rho_2(z, z_2)$.

Замечание. Свойства метрики для ρ_1 и ρ_∞ проверьте самостоятельно по схеме § 8 (для норм $||\,||_1$ и $||\,||_\infty$).

Замечание. Поскольку имеют место оценки $\frac{1}{2}\rho_1(z_1, z_2) \leq \rho_\infty(z_1, z_2) \leq \rho_1(z_1, z_2)$; $\frac{1}{\sqrt{2}}\rho_2(z_1, z_2) \leq \rho_\infty(z_1, z_2) \leq \rho_2(z_1, z_2)$ $\forall z_1, z_2 \in$ Z, то «топологии» метрического пространства $R = R_1 \times R_2$, определяемые этими тремя метриками ρ_1, ρ_2 и ρ_∞, эквивалентны. В дальнейшем под метрикой ρ метрическом пространстве $R = \{X \times Y; \rho\}$ будем понимать любую из метрик ρ_1, ρ_2, ρ_∞.

Теорема. *Пусть $R_1 = \{X, \rho_X\}$, $R_2 = \{Y, \rho_Y\}$ и $R = \{Z, \rho\}$ - метрические пространства, где $Z = X \times Y$, а метрика ρ определяется любой из трех эквивалентных метрик ρ_1, ρ_2 и ρ_∞. Тогда для $z_k = (x_k, y_k) \in Z$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $z_0 = (x_0, y_0) \in Z$:* $(\exists \lim\limits_{k \to +\infty} z_k = z_0) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{k \to +\infty} x_k \in x_0, \exists \lim\limits_{k \to +\infty} y_k = y_0)$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} z_k = z_0$ в $R = R_1 \times R_2$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbf{N}$ такое, что $\rho_1(z_k, z_0) < \varepsilon$ $\forall k \geq k_0$.

Но тогда имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_X(x_k, x_0) \\ \rho_Y(y_k, y_0) \end{array} \right\} \leq \rho_1(z_k, z_0) < \varepsilon \, \forall k \geq k_0, \text{ т.е. } \exists \lim_{k \to +\infty} x_k = x_0,$$

$$\exists \lim_{k \to +\infty} y_k = y_0.$$

Достаточность. Пусть $\lim\limits_{k \to +\infty} x_k = x_0$ (в R_1), $\lim\limits_{k \to +\infty} y_k = y_0$ (в R_2), тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_i \in \mathbf{N}$ такие, что $\rho_X(x_k, x_0) < \varepsilon/2 \; \forall k \geq k_1$ и $\rho_Y(y_k, y_0) < \varepsilon/2 \; \forall k \geq k_2$, но тогда $\forall k \geq \max(k_1, k_2) \; \rho_1(z_k, z_0) = \rho_X(x_k, y_k) + \rho_Y(y_k, y_0) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} z_k = z_0$ (в $R = R_1 \times R_2$).

Следствие. Пусть R_1 и R_2 – полные метрические пространства, тогда метрическое пространство $R = R_1 \times R_2$ также полное.

Следствие. Поскольку $\mathbf{R}$ – полное пространство, то вновь получаем полноту пространства $\mathbf{R}^n = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$.

Теорема. *Пусть $R_1 = \{X, \rho_X\}$, $R_2 = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства и $K_1 \subset X$, $K_2 \subset Y$ – секвенциально компактные множества. Тогда множество $K = K_1 \times K_2 \subset Z = X \times Y$ также секвенциально компактно в метрическом пространстве $R = R_1 \times R_2 = \{Z, \rho\}$.*

Доказательство. Для доказательства секвенциальной компактности множества $K = K_1 \times K_2$ в $R = R_1 \times R_2$ покажем, что из любой последовательности (z_n) точек множества K ($z_n = (x_n, y_n) \in K_1 \times K_2$) можно выбрать сходящуюся (в R) подпоследовательность. Итак, пусть $(z_n) = ((x_n, y_n))$, где $x_n \in K_1$, $y_n \in K_2 \; \forall n \in \mathbf{N}$. Поскольку множество K_1 секвенциально компактно в R_1, то из последовательности (x_n) ($x_n \in K_1 \; \forall n$) можно выбрать сходящуюся (в R_1) последовательность $(\xi_k) \equiv (x_{n_k})$ такую, что $\exists \lim\limits_{k \to +\infty} \xi_k = x_0 \in K_1$. Рассмотрим последовательность $(\eta_k) = (y_{n_k})$, где $\eta_k \in K_2 \; \forall k \in \mathbf{N}$. Поскольку множество K_2 секвенциально компактно в R_2, то из последовательности (η_k) можно выбрать сходящуюся подпоследовательность (η_{k_l}) такую, что $\lim\limits_{l \to +\infty} \eta_{k_l} = y_0 \in K_2$. Но рассматривая последовательность (ζ_l), где $\zeta_l = (\xi_{kl}, \eta_{k_l}) = z_{n_{k_l}}$, видим, что $\zeta_l \in K \; \forall l$ и в силу доказанной выше теоремы $\exists \lim\limits_{l \to +\infty} \zeta_l = (x_0, y_0) = z_0 \in K$, т. е. $(\zeta_l) \equiv (z_{n_{k_l}})$ есть сходящаяся (в R) подпоследовательность последовательности (z_n) из множества K. Таким образом, множество $K = K_1 \times K_2$ секвенциально компактно в $R = R_1 \times R_2$.

Определение. *При $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ и $a_k < b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$) множество $I^n[a, b] = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ называется замкнутым n-мерным брусом в $\mathbf{R}^n$, а множество $I^n(a, b) = (a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$ называется открытым n-мерным брусом в $\mathbf{R}^n$.*

При $b_i - a_i = \delta > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *брус называется n-мерным кубом. Заметим, что открытый куб* $I^n(a, b)$ *является открытым шаром* $\text{Ш}_{\delta/2}(c) \subset \mathbf{R}^n$ *(по норме* $||\,||_\infty$*) в* $\mathbf{R}^n$ *с* $c_i = (a_i + b_i)/2$ *и* $b_i - a_i = \delta > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема Больцано – Вейерштрасса в $\mathbf{R}^n$. *(Ограниченный) замкнутый брус* $I^n[a, b]$ *секвенциально компактен в* $\mathbf{R}^n$ *(с метрикой, индуцированной любой из эквивалентных норм* $||\,||_1$, $||\,||_2$ *и* $||\,||_\infty$).

Доказательство. По определению $I^n[a, b] = [a_1, b_1] \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$. Но отрезок $[a_k, b_k] \subset \mathbf{R}$ секвенциально компактен в $\mathbf{R}$ для любого k в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса из [1] (ч. I, гл. 3, §6). Поэтому в силу доказанной выше теоремы замкнутый брус $I^n[a, b]$ секвенциально компактен в $\mathbf{R}^n$.

Следствие. Пусть множество $K \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено, тогда множество K секвенциально компактно в $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Поскольку множество $K \subset \mathbf{R}^n$ ограничено, то в $\mathbf{R}^n$ существует замкнутый брус $I^n[a, b] \supset K$. Но по теореме Больцано – Вейерштрасса брус $I^n[a, b]$ секвенциально компактен в $\mathbf{R}^n$ и тогда множество K, будучи замкнутым подмножеством секвенциально компактного множества $I^n[a, b]$, само секвенциально компактно.

Теорема Бореля – Лебега в $\mathbf{R}^n$. *Если множество* $K \subset \mathbf{R}^n$ *замкнуто и ограничено, то оно компактно в* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство (не основанное на общей теореме об эквивалентности компактности и секвенциальной компактности в полных метрических пространствах). Поскольку замкнутое множество K ограничено в $\mathbf{R}^n$, то существует замкнутый куб $I^n[a, b]$ с диаметром $\delta_0 > 0$ такой, что $K \subset I^n[a, b]$. Докажем, что множество K компактно в $\mathbf{R}^n$. Допустим, что K не компактно в $\mathbf{R}^n$, тогда для него существует открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ $(K \subset \bigcup\limits_\alpha G_\alpha)$, из которого нельзя выбрать конечного подпокрытия.

Заметим, что $\forall \varepsilon > 0$ можно получить (например, последовательным делением пополам каждого ребра $[a_i, b_i]$ куба $I^n[a, b]$) разбиение куба $I^n[a, b]$ на частичные кубы $I_l^n(\varepsilon)$ $(d(I_l^n(\varepsilon)) < \varepsilon)$. Тогда, полагая $K_l(\varepsilon) = K \cap I_l^n(\varepsilon)$, получаем представление $K = \bigcup\limits_{i=1}^{m(\varepsilon)} K_i(\varepsilon)$, где $K_i(\varepsilon)$ – непустые замкнутые множества с диаметром $d(K_i(\varepsilon)) < \varepsilon$. Поскольку $K_i(\varepsilon) \subset K$, то хотя бы одно из $K_{i_0}(\varepsilon)$ не допускает выделения конечного подпокрытия из открытого покрытия $\{G_\alpha\}$. Но тогда по индукции получаем, что существует стягивающаяся система замкнутых непустых множеств $\{K_m\}$ такая, что

$$K \supset K_1 \supset \ldots \supset K_m \supset K_{m+1} \supset \ldots, \; d(K_m) < 1/m,$$

причем каждое из K_m не допускает выделения конечного подпокрытия

из открытого покрытия $\{G_\alpha\}$. Поскольку ограниченное, замкнутое (в $\mathbf{R}^n$) множество K секвенциально компактно (по теореме Больцано – Вейерштрасса для $\mathbf{R}^n$), то дальнейшее доказательство совпадает с приведенным в теореме о компактности секвенциально компактного множества в общем метрическом пространстве R, в силу которого существует последовательность Коши (x_m) такая, что $x_m \in K_m \subset K$ $\forall m \in \mathbf{N}$. В силу полноты $\mathbf{R}^n$ последовательность Коши (x_m) сходится к точке $x_0 \in \mathbf{R}^n$. Но $x_l \in K_m$ $\forall l \geq m$, поэтому в силу замкнутости K_m $x_0 \in K_m$ $\forall m \in \mathbf{N}$, так что $x_0 \in \bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} K_m$. Но $\lim\limits_{m \to +\infty} d(K_m) = 0$, поэтому $\bigcap\limits_{m=1}^{+\infty} K_m = \{x_0\} \subset \overline{K} = K \subset \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$ и тогда $\exists G_{\alpha_0} \ni x_0$. Поскольку множество G_{α_0} открыто, то x_0 – внутренняя точка G_{α_0} и поэтому $\exists \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G_{\alpha_0}$. Поскольку $x_0 \in K_m$ $\forall m \in \mathbf{N}$ и $\lim\limits_{m \to +\infty} d(K_m) = 0$, то $\exists m_0 \in \mathbf{N}$ $(m_0 > 1/\delta)$ такое, что $K_{m_0} \subset \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G_{\alpha_0}$, т. е. множество K_{m_0} покрыто одним элементом G_{α_0} из системы $\{G_\alpha\}$. Противоречие с построением множества K_{m_0}. Итак, множество K (замкнутое и ограниченное в $\mathbf{R}^n$) компактно в $\mathbf{R}^n$.

Следствие (критерий компактности в $\mathbf{R}^n$). Пусть множество $K \subset \mathbf{R}^n$. Тогда (K компактно в $\mathbf{R}^n$) $\Leftrightarrow$ (K замкнуто и ограничено).

Доказательство (не опирающееся на общий критерий компактности в полном метрическом пространстве). Необходимость. Пусть K компактно в $\mathbf{R}^n$, тогда оно секвенциально компактно, а потому замкнуто и вполне ограничено (т. е. ограничено).

Достаточность. Пусть множество $K \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и ограничено в $\mathbf{R}^n$, тогда в силу теоремы Бореля–Лебега оно компактно в $\mathbf{R}^n$.

Замечание. Обратите внимание на отличие критерия компактности в $\mathbf{R}^n$ (замкнутость и ограниченность) от общего критерия компактности в полном метрическом пространстве R (замкнутость и вполне ограниченность).

Пример. Ранее было показано, что в метрическом бесконечномерном пространстве m (элементами которого являются последовательности $\mathbf{x} = (x_n)$ с $\|\mathbf{x}\|_\infty < +\infty$) множество (всех "ортов") $F = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots\}$ (где $\mathbf{e}_i = (\delta_{in})$) замкнуто и ограничено, но не является вполне ограниченным. Поэтому множество F не может быть секвенциально компактным, а потому и компактным в пространстве m.

§ 11. Связность в метрических пространствах

Определение. *Метрическое пространство $R = \{X, \rho\}$ называется несвязным, если существуют два открытых непустых множества G_1 и G_2 из X, таких, что $G_1 \cup G_2 = X$ и $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.*

О п р е д е л е н и е. *Метрическое пространство* $R = \{X, \rho\}$ *называется связным, если не существует двух непустых открытых множеств* G_1 *и* G_2 *из* X *таких, что* $G_1 \cup G_2 = X$ *и* $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

З а м е ч а н и е. Пространство $R = \{X, \rho\}$, состоящее из одной точки, связно.

О п р е д е л е н и е. *Множество* $M \subset X$ *метрического пространства* $R = \{X, \rho\}$ *называется связным, если не существует двух непустых открытых (в* R*) множеств* G_1 *и* G_2 *таких, что* $G_i \cap M \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \cup G_2 \supset M$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

З а м е ч а н и е. Можно дать эквивалентное определение несвязного метрического пространства с помощью замкнутых множеств: метрическое пространство $R = \{X, \rho\}$ называется не связным, если существуют два непустых замкнутых множества F_1 и F_2 таких, что $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ и $F_1 \cup F_2 = X$.

Т е о р е м а (о сохранении связности при непрерывном отображении). *Пусть* $R = \{X, \rho_X\}$, $S = \{Y, \rho_Y\}$ *- метрические пространства и* $G \subset X$ *- открытое в* R *множество. Пусть* $f : G \subset X \to Y$ *- отображение* G *в* Y. *Если* $f \in C(G)$ *и множество* $M \subset G$ *связно в* R, *то образ* $f(M) \subset Y$ *связен в* S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим от противного, что множество $M \subset G \subset X$ связно (в R), $f \in C(G)$, но множество $f(M) \subset Y$ не связно (в S). Тогда существуют открытые множества $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ из Y такие, что $\mathfrak{G}_i \cap f(M) \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \supset f(M)$, $\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \varnothing$.

Рассмотрим полные прообразы $G_i = f^{-1}(\mathfrak{G}_i) \subset G$. Поскольку $f \in C(G)$ и множества $\mathfrak{G}_i$ открыты в Y, то в силу критерия непрерывности отображения видим, что множества G_i открыты в X. Но в силу свойств прообразов имеем

$$(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2 = \varnothing) \Rightarrow (\varnothing = f^{-1}(\mathfrak{G}_1 \cap \mathfrak{G}_2) = f^{-1}(\mathfrak{G}_1) \cap f^{-1}(\mathfrak{G}_2) =$$

$$= G_1 \cap G_2) \Rightarrow (G_1 \cap G_2 = \varnothing), (\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2 \supset f(M)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\mathfrak{G}_1 \cup \mathfrak{G}_2) = f^{-1}(\mathfrak{G}_1) \cup f^{-1}(\mathfrak{G}_2) \supset f^{-1}(f(M)) \supset M) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (G_1 \cup G_2 \supset M).$$

Наконец, $\mathfrak{G}_i \cap f(M) \neq \varnothing$, поэтому $\exists x_i \in M$ такое, что $f(x_i) \in \mathfrak{G}_i$, откуда $(x_i \in G_i = f^{-1}(\mathfrak{G}_i)) \Rightarrow (G_i \cap M \neq \varnothing; i = 1, 2)$. Таким образом, для множества $M \subset G \subset X$ существуют открытые множества G_1 и G_2 из X такие, что $G_i \cap M \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \cup G_2 \supset M$. Но тогда множество $M \subset X$ не связно в X вопреки условию теоремы.

В ч. I, гл. 4, § 3 для множеств числовой прямой было введено понятие линейной связности.

О п р е д е л е н и е. *Множество* $M \subset \mathrm{R}$ *называется линейно связным, если* $\forall x, y \in M$ $(x < y)$ *имеем* $[x, y] \subset M$.

Т е о р е м а. *Пусть* $M \subset \mathbf{R}$. *Тогда: (множество* M *не связно в* $\mathbf{R}$*)* $\Leftrightarrow$ *(множество* M *не связно линейно в* $\mathbf{R}$*).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}$ не связно. Тогда существуют открытые не пустые множества G_1 и G_2 из $\mathbf{R}$ такие, что $G_i \cap M = M_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$; $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, $G_1 \cup G_2 \supset M$. Поэтому $\exists x \in M_1$ и $\exists y \in M_2$. Пусть для определенности $x < y$. Рассмотрим множество $G_0 = G_1 \cap (-\infty, y) = G_1 \cap (-\infty, y]$ (поскольку $y \overline{\in} G_1$), и пусть $z = \sup\limits_{\xi \in G_0} \xi$. Тогда $x \leq z \leq y$, причем $(z \in \overline{G_0}) \Rightarrow (z \in \overline{G_1})$. Докажем, что $z \overline{\in} G_2$. В самом деле, если бы $z \in G_2$, то поскольку G_2 открыто, то существует (открытая) окрестность $U(z) \subset G_2$. Но $(G_1 \cap G_2 = \varnothing) \Rightarrow (U(z) \cap G_1 = \varnothing)$, т. е. $z \overline{\in} \overline{G_1}$. Противоречие. Таким образом, $z \overline{\in} G_2$, но

$$(y \in M_2 \subset G_2) \Rightarrow (z < y), ((z \overline{\in} G_2) \Rightarrow (z \overline{\in} M_2)).$$

Докажем, что $z \overline{\in} G_1$. В самом деле, если бы $z \in G_1$, то поскольку G_1 – открытое множество, то существует окрестность $V(z) \subset G_1$ и в силу неравенства $z < y$ $\exists z_1 \in G_1$ такое, что $z < z_1 < y$, но тогда z не может быть верхней гранью множества $G_0 = G_1 \cap (-\infty, y)$. Итак, $z \overline{\in} G_1$. Но $x \in M_1 \subset G_1$, поэтому $(x \leq z) \Rightarrow (x < z, z \overline{\in} M_1)$. Окончательно имеем $\exists x \in M$, $\exists y \in M$ и $\exists z \overline{\in} M_i$ $(i = 1, 2)$, т. е. $z \overline{\in} M$, откуда имеем $x < z < y$. Но тогда множество M не связно линейно в $\mathbf{R}$.

Достаточность. Пусть множество $M \subset R$ не связно линейно в R. Тогда $\exists x, y, z \in \mathbf{R}$ такие, что $x, y \in M$, $z \overline{\in} M$ и $x < z < y$. Положим $M_1 = M \cap (-\infty, z) \neq \varnothing$, $M_2 = M \cap (z, +\infty) \neq \varnothing$. Тогда множества $G_1 = (-\infty, z)$, $G_2 = (z, +\infty)$ непусты и открыты в $\mathbf{R}$, причем $G_i \cap M = M_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \cup G_2 \supset M$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, т. е. множество M не связно в $\mathbf{R}$.

С л е д с т в и е. Множество $M \subset \mathbf{R}$ связно в $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда M является одним из следующих множеств $(a \leq b; a, b \in \mathbf{R})$; $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$. (Доказательство было проведено для линейно связного множества в ч. I, гл. 4, § 2).

Т е о р е м а Б о л ь ц а н о (о промежуточных значениях непрерывной числовой функции). *Пусть* $R = \{X, \rho\}$ *– метрическое пространство и* $G \subset X$ *– открытое множество. Пусть* $f : G \subset X \to \mathbf{R}$ *и* $f \in C(G)$. *Тогда, если множество* $M \subset G$ *связное, то функция* $f(x)$ *принимает на множестве* M *все промежуточные значения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C(G)$ и множество $M \subset G$ связно в X, то образ $f(M) \subset \mathbf{R}$ есть связное числовое множество. Но тогда множество $f(M)$ линейно связно в $\mathbf{R}$ и потому $\forall y_1, y_2 \in f(M)$ таких, что $y_1 < y_2$ и $(\forall y \in [y_1, y_2]) \Rightarrow (y \in f(M))$, т. е. $\exists x \in M$ такое, что $f(x) = y$.

О п р е д е л е н и е. *Множество* $M \subset \mathbf{R}^n$ *называется линейно связным в* $\mathbf{R}^n$, *если любые две точки из* M *можно соединить непрерывным путем* $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma = \varphi([\alpha, \beta]) \subset \mathbf{R}^n$ *с носителем* $\Gamma = \varphi([\alpha, \beta])$, *целиком лежащим в* M $(\Gamma \subset M)$.

О п р е д е л е н и е. *Множество* $M \subset \mathbf{R}^n$ *называется выпуклым, если* $(\forall x, y \in M) \Rightarrow ([x, y] \subset M)$, *где* $[x, y] = \{z \in \mathbf{R}^n \,|\, \mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}, t \in [0, 1]\}$ *есть отрезок, соединяющий точки* x *и* y.

З а м е ч а н и е. Любое выпуклое в $\mathbf{R}^n$ множество линейно связно.

З а м е ч а н и е. Открытый шар $\text{Ш}_\delta(a) \subset \mathbf{R}^n$ является выпуклым множеством при любой из трех эквивалентных норм $||\,||_1$, $||\,||_2$, $||\,||_\infty$ в $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, пусть $x, y \in \text{Ш}_\delta(a)$ и $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$, $t \in [0, 1]$, тогда $\mathbf{z} - \mathbf{a} = (1-t)(\mathbf{x} - \mathbf{a}) + t(\mathbf{y} - \mathbf{a})$, откуда $\forall t \in [0, 1]$ имеем

$$(||\mathbf{z} - \mathbf{a}|| \leq (1-t)||\mathbf{x} - \mathbf{a}|| + t||\mathbf{y} - \mathbf{a}|| < (1-t)\delta + t\delta = \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (||\mathbf{z} - \mathbf{a}|| < \delta) \Rightarrow (z \in \text{Ш}_\delta(a)) \Rightarrow ([x, y]) \subset \text{Ш}_\delta(a)).$$

З а м е ч а н и е. Любой открытый (замкнутый) брус $I^n(a, b) \times (I^n[a, b])$ является выпуклым множеством в $\mathbf{R}^n$.

В самом деле, пусть $x, y \in I^n[a, b]$, тогда $a_i \leq x_i \leq b_i$, $a_i \leq y_i \leq b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, и поэтому для $\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y}$ при $0 \leq t \leq 1$ имеем $(a_i = (1-t)a_i + ta_i \leq z_i = (1-t)x_i + ty_i \leq (1-t)b_i + tb_i = b_i;$ $i = 1, 2, \ldots, n) \Rightarrow (z \in I^n[a, b])$, т. е. $[x, y] \subset I^n[a, b]$.

Т е о р е м а. *Пусть* $M \subset \mathbf{R}^n$ *– линейно связное множество. Тогда* M *связно в* $\mathbf{R}^n$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $M \subset \mathbf{R}^q$ линейно связно. Допустим от противного, что множество M не связно в $\mathbf{R}^n$. Тогда существуют открытые множества G_1 и G_2 такие, что $G_i \cap M \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ и $G_1 \cup G_2 \supset M$. Пусть $x^1 \in G_1 \cap M$ и $x^2 \in G_2 \cap M$. Тогда $x^1, x^2 \in M$, и поскольку множество M линейно связно, то существует путь $\varphi : [\alpha, \beta] \to G_1 \cup G_2$, соединяющий точки x^1 и x^2 с носителем, целиком лежащим в M, т. е. таким, что $x^1 = \varphi(\alpha)$, $x^2 = \varphi(\beta)$, $\varphi \in C([\alpha, \beta])$ и $\Gamma = \varphi[(\alpha, \beta)] \subset M$. Заметим, что путь $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$, где $\varphi \in C([\alpha, \beta])$, можно продолжить на путь $\Phi : (\alpha - \delta, \beta + \delta) \to \mathbf{R}^n$, где $\Phi \in C((\alpha - \delta, \beta + \delta))$, положив

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(\alpha) = x^1, \, t \in (\alpha - \delta, \alpha), \\ \varphi(t), \, t \in [\alpha, \beta], \\ \varphi(\beta) = x^2, \, t \in (\beta, \beta + \delta). \end{cases}$$

Тогда отображение $\Phi : (\alpha - \delta, \beta + \delta) \to \mathbf{R}^n$ определено на открытом в $\mathbf{R}$ множестве $G = (\alpha - \delta, \beta + \delta)$, $\Phi \in C(G)$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset G$ связен, поэтому применима теорема о том, что «непрерывный образ связного множества – связен», в силу которой множество $\Phi([\alpha, \beta]) = \varphi(\alpha, \beta]) =$

$\Gamma \subset M$ связно в $\mathbf{R}^n$. Однако $x^i \in \Gamma \cap G_i$ $(i = 1, 2)$, так что $\Gamma \cap G_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, причем $\Gamma \subset M \subset G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, т. е. множество Γ не связно. Противоречие.

О п р е д е л е н и е. *Ломаной в* $\mathbf{R}^n$ *называется непрерывный путь* φ *в* $\mathbf{R}^n$ $(\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbf{R}^n$, $t \to \varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$, $\varphi \in C([\alpha, \beta])$, *для которого существует разбиение* $T = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = \beta\}$ *отрезка* $[\alpha, \beta]$ *такое, что на любом частичном отрезке* $[t_{k-1}, t_k]$ $(1 \leq k \leq m)$ *сужение отображения* φ *имеет вид* $\varphi(t) = \varphi(t_{k-1})(t_k - t)/(t_k - t_{k-1}) + \varphi(t_k)(t - t_{k-1})/(t_k - t_{k-1})$, $t \in [t_{k-1}, t_k]$, *т. е. является аффинным, так что носитель* $\Gamma_k = \varphi([t_{k-1}, t_k])$ *есть отрезок в* $\mathbf{R}^n$.

Т е о р е м а (критерий связности открытого множества в $\mathbf{R}^n$). *Пусть* $G \subset R^n$ *– открытое множество. Тогда следующие условия эквивалентны: а) множество* G *связно в* $\mathbf{R}^n$; *б) множество* G *линейно, связно в* $\mathbf{R}^n$; *в) любые две точки из* G *можно соединить ломаной, целиком лежащей в* G.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, в) $\Rightarrow$ б). Из доказанной выше теоремы вытекает, что б) $\Rightarrow$ а). Осталось доказать, что а) $\Rightarrow$ в). Пусть непустое открытое множество G связно в $\mathbf{R}^n$ и $x^0 \in G$. Обозначим через $U \subset G$ множество всех точек $x \in G$ таких, что точки x^0 и x могут быть соединены ломаной l, целиком лежащей в G. Поскольку G – открытое множество, то $x^0 \in G$ – внутренняя точка, для которой существует шар $\text{Ш}_\delta(x^0) \in G$, но в силу выпуклости шара $(\forall x \in \text{Ш}_\delta(x^0)) \Rightarrow ([x^0, x] \in \text{Ш}_\delta(x^0) \subset G)$, т. е. $U \neq \varnothing$. Будет доказано, что $U = \overset{\circ}{U}$ (т. е. что множество U открыто). Будет также доказано, что $U \supset U' \cap G$ (т. е. что множество U замкнуто в G). Докажем, что тогда в силу связности G имеем $G \equiv U$. В самом деле, допустим от противного, что $G \setminus U \neq \varnothing$, т. е. $G = U \cup (G \setminus U)$, и положим $G_1 = U$, $G_2 = G \setminus U$. Тогда $G_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$. Далее, множество $G_1 = U$ открыто, поскольку открыто U. Но из условия $U \supset U' \cap G$ имеем $G \setminus U \equiv G \setminus \overline{U} = G \cap C\overline{U}$ (в самом деле, поскольку $(U \subset \overline{U}) \Rightarrow (G \setminus U \supset G \setminus \overline{U})$, то условие $U \supset U' \cap G$ дает $U \supset \overline{U} \cap G$, откуда получаем $G \setminus U \subset G \setminus (\overline{U} \cap G) = G \cap C(\overline{U} \cap G) = G \cap (C\overline{U} \cup CG) = (G \cap C\overline{U}) \cup (G \cap CG) = G \cap C\overline{U} = G \setminus \overline{U}$, т. е. $G \setminus U \subset G \setminus \overline{U}$, но тем самым доказано $G \setminus U = G \setminus \overline{U}$). Поскольку множества G и $C\overline{U}$ открыты, то и множество $G_2 = G \cap C\overline{U}$ открыто. Но тогда имеем $G = G_1 \cup G_2$, $G_i \neq \varnothing$ $(i = 1, 2)$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$, т. е. множество G не связно в $\mathbf{R}^n$, вопреки условию а) теоремы. Итак, $G = U$, где множество U построено с помощью точки $x^0 \in G$. Покажем, что тогда для множества G выполнено условие в). В самом деле, пусть $x^1, x^2 \in G = U$. Тогда существует ломаная l_1, соединяющая точки x^1 и x^0 и лежащая в G. Существует также ломаная l_2, соединяющая точки x^0 и x^2 и лежащая в G. Очевидно, ломаная $l_1 \cup l_2$ соединяет точки x^1 и x^2 и лежит в G,

т. е. для G выполнено условие в). Докажем теперь, что $U = \overset{\circ}{U}$. Пусть $a \in U$ – любая, но фиксированная точка, тогда существует ломаная $l[x^0, a] \subset G$, соединяющая точки x^0 и a. Но $a \in U \subset G$ есть внутренняя точка (открытого) множества G, так что существует шар $Ш_\delta(a) \subset G$. В силу выпуклости шара $\forall x \in Ш_\delta(a)$ имеем $[a, x] \subset Ш\delta(a) \subset G$, но тогда ломаная $l[x^0, a] \cup [a, x] = l[x^0, x] \subset G$ соединяет точки x^0 и x, т. е. $x \in U$. Итак, $Ш_\delta(a) \subset U$, т. е. любая точка $a \in U$ является внутренней точкой множества U, что и означает, что $U = \overset{\circ}{U}$.

Докажем, наконец, что $U \supset U' \cap G$. Пусть $a \in U' \cap G$ – любая, но фиксированная. Тогда существует шар $Ш_\delta(a) \subset G$, для которого, поскольку $a \in U'$, имеем $Ш_\delta(a) \cap U \neq \varnothing$, т. е. $\exists b \in U \cap Ш_\delta(a)$. Но тогда существует ломаная $l[x^0, b] \subset G$. В силу выпуклости шара $Ш_\delta(a)$ имеем $[b, a] \subset Ш_\delta(a) \subset G$, так что ломаная $l[x^0, b] \cup [b, a] = l[x^0, a] \subset G$, но тогда $a \in U$. Тем самым показано, что $U \supset U' \cap G$, чем и завершается доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е. Открытое связное множество называется областью.

З а м е ч а н и е. Для произвольного (не открытого) множества из а), вообще говоря, не следует б), т. е. существуют связные, но не линейно связные множества.

П р и м е р. Пусть множество $M \subset R^2_{x,y}$ есть объединение графика функции $y = \sin(\pi/x)$, $x \neq 0$ и вертикального отрезка $x = 0$, $|y| \leq 1$. Тогда множество M не является линейно связным, поскольку точки $(0, 0)$ и $(a, \sin(\pi/a))$ при $a \neq 0$ нельзя соединить непрерывным путем (из M). Докажем, что множество M связано (в $\mathbf{R}^2$). Введем множества

$$M_0 = \{(x, y) | \, x = 0, |y| \leq 1\},$$

$$M_- = \{(x, y) | \, y = \sin(\pi/x), -\infty < x < 0\},$$

$$M_+ = \{(x, y) | \, y = \sin(\pi/x), 0 < x < +\infty\}.$$

Очевидно, множества M_-, M_0 и M_+ линейно связны, т. е. связны. Пусть существуют непустые открытые множества $G_1, G_2 \subset \mathbf{R}^2$ такие, что $M = M_- \cup M_0 \cup M_+ \subset G_1 \cup G_2$, причем $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. В силу связности M_-, если $M_- \cap G_1 \neq \varnothing$, то $M_- \subset G_1$. Но $M_0 \subset \overline{M}_-$, поэтому $M_0 \cap G_2 = \varnothing$ и в силу связности M_0 имеем $M_0 \subset G_1$. Но $M_0 \subset \overline{M}_+$, поэтому $M_+ \cap G_1 \neq \varnothing$ и тогда в силу связности M_+ имеем $M_+ \subset G_1$. Итак, доказано, что в случае $M_- \cap G_1 \neq \varnothing$ имеем $M \subset G_1$. Но это и означает связность M (почему?).

З а м е ч а н и е. Для произвольного множества $M \subset \mathbf{R}^n$ из б), вообще говоря, не следует в). (Например, для окружности на плоскости условие б) выполнено, а условие в) не выполнено.)

§ 12. Непрерывные отображения на компактных множествах

З а м е ч а н и е. Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ – метрическое пространство. Если множество $K \subset X$ компактно в R, то в силу секвенциальной компактности множества K любая последовательность Коши (x_n) из K $(x_n \in K \forall n)$ будет сходящаяся (причем $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x_0 \in K$), т. е. подпространство $R_1 = \{K, \rho_X\}$ – полное.

Т е о р е м а (о сохранении компактности при непрерывном отображении). *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ и $S = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства. Пусть множество $K \subset X$ компактно в R и отображение $f : K \subset X \to Y$ непрерывно $(f \in C(K))$. Тогда образ $f(K) \subset Y$ компактен в S.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f : K \subset X \to Y$, $f \in C(K)$ и множество $K \subset X$ компактно в R. Рассмотрим любое открытое (в S) покрытие $\{G_\alpha\}$ множества $f(K) \subset Y$, так что $\bigcup\limits_\alpha G_\alpha \supset f(K)$, где G_α открыты в S $\forall \alpha$. Компактность множества $f(K)$ будет доказана, если показать, что из системы $\{G_\alpha\}$ можно выделить конечное подпокрытие для $f(K)$. Поскольку $f(x) \in f(K)$ $\forall x \in K$, то существует индекс $\alpha(x)$ такой, что $f(x) \in G_{\alpha(x)}$. Поскольку множество $G_{\alpha(x)}$ открыто (в S), то $G_{\alpha(x)} = V(f(x))$ есть открытая окрестность точки $f(x)$. По условию $(f \in C(K)) \Leftrightarrow (f \in C(x))$ и в силу окрестностного определения непрерывности отображения в точке существует (открытая) окрестность $U(x) \subset X$ точки $x \in K$ такая, что $G_{\alpha(x)} \supset f(U(x) \cap K)$. Система открытых окрестностей $\{U(x), x \in K\}$ образует открытое покрытие множества K, т. е. $K \subset \bigcup\limits_{x \in K} U(x)$. Но в силу компактности K (в R) существует конечное подпокрытие $\{U(x_i); i = 1, 2, \ldots, m\}$ такое, что

$$(K \subset \bigcup_{i=1}^{m} U(x_i)) \Rightarrow (f(K) = f\left(\bigcup_{i=1}^{m} (U(x_i) \cap K)\right) =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{m} f(U(x_i) \cap K) \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{\alpha_i}),$$

т. е. система $\{G_{\alpha_i}, i = 1, 2, \ldots, m\}$ есть конечное открытое покрытие множества $f(K)$. Таким образом, множество $f(K)$ компактно в S.

С л е д с т в и е. Если множество $K \subset X$ компактно в $R = \{X, \rho_X\}$ и отображение $f : K \subset X \to Y$ непрерывно на K $(f \in C(K))$, то образ $f(K) \subset Y$ замкнут, вполне ограничен и ограничен в метрическом пространстве $R = \{Y, \rho_Y\}$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ – метрическое пространство, $M \subset X$. Тогда (векторная) функция* $\mathbf{f} : M \subset X \to \mathbf{R}^m$

называется ограниченной на множестве M, если существует постоянная $A > 0$ такая, что $||\mathbf{f}(x)|| \leq A \ \forall x \in M$, т. е. если образ $\mathbf{f}(M) \subset \mathbf{R}^m$ ограничен в $\mathbf{R}^m$.

Следствие (теорема Вейерштрасса). Если $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, множество $K \subset X$ компактно в R и $\mathbf{f} : K \subset X \to \mathbf{R}^m$ – непрерывная на K (векторная) функция ($\mathbf{f} \in C(K)$), то образ $\mathbf{f}(K) \subset \mathbf{R}^m$ замкнут и ограничен в $\mathbf{R}^m$ и, в частности, (векторная) функция $\mathbf{f}(x)$ ограничена на K.

Следствие (теорема Вейерштрасса). Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, множество $K \subset X$ компактно в R и $f : K \subset X \to \mathbf{R}$ – числовая функция, непрерывная на K ($f \in C(K)$), причем $M = \sup\limits_K f(x)$, $m = \inf\limits_K f(x)$. Тогда существуют точки $x_1, x_2 \in K$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

В самом деле, поскольку $f \in C(K)$ и множество $K \subset X$ компактно в $R = \{X, \rho\}$, то множество $f(K) \subset \mathbf{R}$ также компактно, т. е. $f(K)$ есть замкнутое и ограниченное множество числовой прямой. Тогда $-\infty < m \leq M < +\infty$. По определению точных граней числа m и M есть точки прикосновения замкнутого множества $f(K)$, но тогда $m, M \in \overline{f(K)} = f(K)$. Далее, из $m, M \in f(K)$ следует, что $\exists x_1, x_2 \in K$ такие, что $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$.

Следствие. Пусть множество $K \subset X$ компактно в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$ и $f : K \to \mathbf{R}$ – числовая функция. Пусть $f \in C(K)$ и $f(x) > 0 \ \forall x \in K$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $f(x) \geq \delta > 0 \ \forall x \in K$.

В самом деле, в силу теоремы Вейерштрасса $\exists x_0 \in K$ такое, что $f(x_0) = \inf\limits_K f(x)$, но тогда $f(x_0) = \delta > 0$ и поэтому $f(x) \geq \delta > 0 \ \forall x \in K$.

Замечание. Пусть $(A\mathrm{x}, \mathrm{x}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ – (симметрическая) квадратическая положительно определенная (в $\mathbf{R}^n$) форма, так что $(A\mathrm{x}, \mathrm{x}) > 0 \ \forall \mathrm{x} \neq 0$, $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$. Тогда существует постоянная $a_0 > 0$ такая, что $(A\mathrm{x}, \mathrm{x}) \geq a_0 \ ||\mathrm{x}||_2^2 \ \forall \mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$.

В самом деле, положим $f(\mathrm{y}) = (A\mathrm{y}, \mathrm{y}) \ \forall \mathrm{y} \in K = \partial Ш_1(0) = \{\mathrm{y} \in \mathbf{R}^n \,|\, ||\mathrm{y}||_2 = 1\}$. Тогда $f \in C(K)$ и $f(\mathrm{y}) > 0 \ \forall \mathrm{y} \in K$. Поскольку множество K замкнуто и ограничено, то оно компактно в $\mathbf{R}^n$, и поэтому в силу следствия из теоремы Вейерштрасса $\exists a_0 > 0$ такое, что $f(\mathrm{y}) \geq a_0 > 0 \ \forall \mathrm{y} \in K$. Но тогда, полагая $\mathrm{y} = \mathrm{x}/||\mathrm{x}||_2 \ \forall \mathrm{x} \neq 0$, имеем $(A\mathrm{x}, \mathrm{x})/(\mathrm{x}, \mathrm{x}) = (A\mathrm{x}, \mathrm{x})/||\mathrm{x}||_2^2 = (A\mathrm{y}, \mathrm{y}) \geq a_0 > 0$, поскольку $\mathrm{y} = \mathrm{x}/||\mathrm{x}||_2 \in \partial Ш_1(0) = K$, откуда

$$(A\mathrm{x}, \mathrm{x}) \geq a_0 ||\mathrm{x}||_2^2 \forall \mathrm{x} \in \mathbf{R}^n.$$

Определение. *Пусть $R = \{X, \rho\}$ – метрическое пространство, $M \subset X$ – множество, а $x \in X$ – точка. Тогда расстояни-*

ем от точки x до множества M называется величина $\rho(x, M) = \inf\limits_{a \in M} \rho(x, a)$. *Очевидно,* $\forall x \in X\ \rho(x, M) \geq 0$ *и* $\rho(x, M) = 0\ \forall x \in M$.

Т е о р е м а. *Пусть $F \subset X$ - замкнутое в метрическом пространстве $R = \{X, \rho\}$ множество и $f : X \to \mathbf{R}^+$, где $f(x) = \rho(x, F)$. Тогда $f \in C(X)$ и $\rho(x, F) > 0\ \forall x \overline{\in} F$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть множество $F \subset X$ замкнуто и точка $y \overline{\in} F$. Допустим от противного, что $\rho(x, F) = 0$, тогда $\inf\limits_{a \in F} \rho(x, a) = 0$, и поэтому $\forall \delta > 0$ имеем $Ш_\delta(x) \cap F \neq \varnothing$, т. е. $x \in \overline{F} = F$. Противоречие. Итак, $\rho(x, F) > 0\ \forall x \overline{\in} F$. Введем функцию $f(x) = \rho(x, F) \geq 0\ \forall x \in X$. Пусть $x_1, x_2 \in X$ - любые, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists a \in F$ такое, что $\rho(x_1, a) \leq \rho(x_1, F) + \varepsilon$, и в силу неравенства треугольника имеем

$$\rho(x_2, a) \leq \rho(x_2, x_1) + \rho(x_1, a) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_1, F) + \varepsilon,$$

откуда

$$\rho(x_2, F) \leq \rho(x_2, a) \leq \rho(x_1, x_2) + \rho(x_1, F) + \varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ имеем $\rho(x_2, F) \leq \rho(x_1, F) + \rho(x_1, x_2) + \varepsilon$ или, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\rho(x_2, F) \leq \rho(x_1, F) + \rho(x_1, x_2)$. Меняя x_1 и x_2 местами, имеем $\rho(x_1, F) \leq \rho(x_2, F) + \rho(x_1, x_2)$, откуда

$$(|\rho(x_1, F) - \rho(x_2, F)| \leq \rho(x_1, x_2)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| \leq \rho(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X).$$

Но из этой оценки вытекает, что $f \in C(X)$. В самом деле, пусть $x_1 \in X$, тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon$ и при $\rho(x_1, x_2) < \delta = \varepsilon \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $R = \{X, \rho\}$ - метрическое пространство и $M_1, M_2 \subset X$ - непустые множества, тогда расстоянием между множествами M_1 и M_2 называется величина*

$$\rho(M_1, M_2) = \inf_{x_1 \in M_1, x_2 \in M_2} \rho(x_1, x_2) \geq 0.$$

З а м е ч а н и е. $\rho(M_1, M_2) = \inf\limits_{x_1 \in M_1} \rho(x_1, M_2) = \inf\limits_{x_2 \in M_2} \rho(x_2, M_1)$.

В самом деле, пусть $\delta = \rho(M_1, M_2) = \inf\limits_{y_1 \in M_1, y_2 \in M_2} \rho(y_1, y_2) \geq 0$, $\delta_1 = \inf\limits_{y_1 \in M_1} \rho(y_1, M_2) \geq 0$.

Отметим, что $\forall x_1 \in M_1$ и $\forall x_2 \in M_2$, имеем

$$\rho(x_1, x_2) \geq \inf_{y_2 \in M_2} \rho(x_1, y_2) = \rho(x_1, M_2) \geq \inf_{y_1 \in M_1} \rho(y_1, M_2) = \delta_1 \geq 0.$$

Итак, δ_1 есть нижняя грань величин $\rho(x_1, x_2)$, где $x_1 \in M_1$ и $x_2 \in M_2$. Но тогда $\delta = \inf\limits_{x_1 \in M_1, x_2 \in M_2} \rho(x_1, x_2) \geq \delta_1$ (так как точная нижняя грань есть наибольшая из нижних граней). Итак, $\delta > \delta_1$.

С другой стороны, $\delta_1 = \inf\limits_{y_1 \in M_1} \rho(y_1, M_2)$, и поэтому $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_1 \in M_1$ такое, что $\rho(x_1, M_2) < \delta_1 + \varepsilon/2$, но $\rho(x_1, M_2) = \inf\limits_{y_2 \in M_2} \rho(x_1, y_2)$, т. е. для того же $\varepsilon > 0\ \exists x_2 \in M_2$ такое, что $\rho(x_1, x_2) < \rho(x_1, M_2) + \varepsilon/2 < \delta_1 + \varepsilon$. Но тогда $(\delta = \inf\limits_{x_1 \in M_1, x_2 \in M_2} \rho(x_1, x_2) \le \delta_1 + \varepsilon\ \forall \varepsilon > 0) \Rightarrow (\delta \le \delta_1)$. Тем самым показано, что $\delta = \delta_1$.

Замечание. Пусть F_1 и F_2 – замкнутые множества из метрического пространства $R = \{X, \rho\}$. Тогда, даже если $F_1 \cap F_2 = \varnothing$, может случиться, что $\rho(F_1, F_2) = 0$. Так будет, например, для гиперболы и ее асимптоты на плоскости.

Теорема. *Пусть множество $F \subset X$ замкнуто, а множество $K \subset X$ компактно в $R = \{X, \rho\}$. Пусть $F \cap K = \varnothing$, тогда $\rho(F, K) > 0$, причем $\exists x_1 \in K$ такое, что $\rho(F, K) = \rho(F, x_1) > 0$.*

Доказательство. Пусть $F \cap K = \varnothing$ и $\rho(F, K) = \delta \ge 0$. Тогда $\delta = \inf\limits_{x \in K} \rho(x, F)$. Рассмотрим функцию $f(x) = \rho(x, F)$. Как было доказано, $f \in C(K)$. Поскольку K компактно, то по теореме Вейерштрасса $\exists x_1 \in K$ такое, что $f(x_1) = \delta$, но F замкнуто и $x_1 \overline{\in} F$, поэтому $\rho(x_1, F) > 0$, т. е. $(\delta = f(x_1) > 0) \Rightarrow (\rho(F, K) = \rho(x_1, F) > 0)$.

Следствие 1. Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество, а $K \subset G \subset \mathbf{R}^n$ – компактное множество. Тогда $\rho(K, \partial G) > 0$, если $\partial G \ne \varnothing$.

В самом деле, граница $\partial G \ne \varnothing$ замкнута, а K компактно, причем $K \subset G \subset \mathbf{R}^n$ и $\partial G \cap G = \varnothing$, но тогда $(\partial G \cap K = \varnothing) \Rightarrow (\rho(\partial G, K) > 0)$.

Следствие 2. Пусть $F \subset \mathbf{R}^n$ замкнуто и $x_0 \overline{\in} F$. Тогда $\exists x_1 \in F$ такое, что $\rho(x_0, F) = \rho(x_0, x_1)$.

В самом деле, пусть $x_0 \overline{\in} F$, тогда $\rho(x_0, F) = \delta > 0$. Рассмотрим замкнутый шар $\overline{\mathrm{Ш}}_{\delta+1}(x_0) \subset \mathbf{R}^n$, он компактен в $\mathbf{R}^n$, а потому $K = \overline{\mathrm{Ш}}_{\delta+1}(x_0) \cap F \ne \varnothing$ есть замкнутое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, поэтому K компактно, но тогда $x_0 \overline{\in} K$ и $\{x_0\}$ есть замкнутое множество. Поэтому $\exists x_1 \in K \subset F$ такое, что $\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, K) \le \delta + 1$. Но $(\forall x \in F \backslash K) \Rightarrow (\rho(x, x_0) \ge \delta + 1 \ge \rho(x_0, K)$, поэтому $\rho(x_0, K) = \rho(x_0, F)$, т. е. $\exists x_1 \in F$, такое, что $\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, F) = \delta$.

Следствие 3. Пусть $F, K \subset \mathbf{R}^n$, где F замкнуто, а K компактно и $F \cap K = \varnothing$. Тогда $\exists x_0 \in K$ и $\exists x_1 \in F$ такие, что $\rho(F, K) = \rho(x_0, x_1) > 0$.

В самом деле, по теореме $\exists x_0 \in K$ такое, что $\rho(x_0, F) = \rho(K, F) > 0$, но $x_0 \overline{\in} F$ и F замкнуто в $\mathbf{R}^n$, поэтому в силу следствия 2 $\exists x_1 \in F$ такое, что $\rho(x_0, x_1) = \rho(x_0, F) = \rho(K, F) > 0$.

Определение. *Пусть $R = \{X, \rho_X\}$ и $S = \{Y, \rho_Y\}$ – метрические пространства и множество $M \subset X$. Отображение $f : M \subset X \to Y$ называется равномерно непрерывным на множестве $M \subset X$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ таков, что $\forall x, x_2 \in M$, удовлетворяющих условию $\rho_X(x_1, x_2) < \delta$, имеем $\rho_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon$.*

Теорема Кантора (о равномерной непрерывности отобра-

жения, непрерывного на компактном множестве). *Пусть* $R = \{X, \rho_X\}$ *и* $S = \{Y, \rho_Y\}$ *- метрические пространства, множество* $K \subset X$ *компактно в* R *и* $f : K \subset X \to Y$. *Если* $f \in C(K)$, *то отображение* f *равномерно непрерывно на* K.

Доказательство. Пусть $K \subset X$ компактно в R и $f \in C(K)$. Тогда $f \in C(x)$ $\forall x \in K$, и поэтому $\forall \varepsilon > 0$ существует окрестность (шар) $Ш_{\eta(\varepsilon,x)}(x) \subset X$ с радиусом $\eta(\varepsilon, x) > 0$ такая, что

$$(\forall \varepsilon \in Ш_{\eta(\varepsilon,x)}(x) \cap K) \Rightarrow (\rho_Y(f(\xi), f(x)) < \varepsilon).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ - любое, но фиксированное. Тогда, полагая $\eta(\varepsilon, x) \equiv \eta(x)$ в силу предыдущего, видим, что существует открытый шар

$$Ш_{\eta(x)/2}(x) \equiv U(x) \subset Ш_{\eta(x)}(x) \subset X.$$

Система $\{U(x); x \in K\}$ образует открытое покрытие компактного множества K : $\bigcup\limits_{x \in K} U(x) \supset K$. Поэтому из этой системы можно выделить конечное открытое подпокрытие

$$\{U(x_k); k = 1, 2, \ldots, m\} : \bigcup_{k=1}^{m} U(x_k) \supset K.$$

Положим $\delta = \frac{1}{2} \min\limits_k \eta_k$ и покажем, что $\forall x, \xi \in K$ таких, что $\rho_X(x, \xi) < \delta$ имеем $\rho_Y(f(x), f(\xi)) < 2\varepsilon$. В самом деле, поскольку $\bigcup\limits_{k=1}^{m} U(x_k) \supset K$, то существует индекс i такой, что $\xi \in U(x_i) \equiv Ш_{\eta_i/2}(x_i)$, так что $\rho_X(\xi, x_i) < \eta_i/2 < \eta_i$. Используя неравенство треугольника, имеем $\rho_X(x, x_i) \leq \rho_X(x, \xi) + \rho_X(\xi, x_i) < \delta + \eta_i/2 < \eta_i$, т. е. $x \in Ш_{\eta_i}(x_i)$. Итак, $x, \xi \in Ш_{\eta_i}(x_i) \cap K$, но в силу выбора шара $Ш_{\eta(\varepsilon,x_i)}(x_i)$ имеем

$$\rho_Y(f(x), f(x_i)) < \varepsilon,\ \rho_Y(f(\xi), f(x_i)) < \varepsilon,$$

откуда, вновь используя неравенство треугольника, получаем

$$\rho_Y(f(x), f(\xi)) \leq \rho_Y(f(x), f(x_i)) + \rho_Y(f(x_i), f(\xi)) < 2\varepsilon.$$

Итак, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \xi, x \in K$, удовлетворяющих неравенству $\rho_X(x, \xi) < \delta$, имеем $\rho_Y(f(x), f(\xi)) < 2\varepsilon$, т. е. отображение f равномерно непрерывно на компактном множестве K.

§ 13. Сжимающие отображения в метрических пространствах

Определение. *Пусть* $R = \{X, \rho\}$ *- метрическое пространство. Отображение* $f : X \to X$ *пространства* R *в себя называется сжимающим, если существует такое число* $0 < \alpha < 1$, *что* $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha \rho(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$.

З а м е ч а н и е. Любое сжимающее отображение f метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ в себя непрерывно, т. е. $f \in C(X)$. В самом деле, если $x_0 \in X$, то $(f \in C(x_0)) \Leftrightarrow (\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0))$. Но из оценки $\rho(f(x), f(x_0))\alpha\rho(x, x_0)$ следует, что $\forall \varepsilon > 0$ при $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ имеем $\rho(f(x), f(x_0)) \leq \alpha\rho(x, x_0) < \alpha\varepsilon < \varepsilon$, т. е. $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Т е о р е м а (принцип сжимающих отображений). *Пусть $R = \{X, \rho\}$ – полное метрическое пространство и $f : X \to X$ – сжимающее отображение R в себя, т. е. $f(X) \subset X$. Тогда существует и притом единственная неподвижная точка этого отображения, т. е. уравнение $f(x) = x$ имеет одно и только одно решение из R.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Единственность.* Пусть существуют две неподвижные точки $x_1, x_2 \in X$ отображения $f : X \to X$, т. е. $f(x_i) = x_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда в силу сжимаемости отображения $f : X \to X$ имеем $\rho(x_1, x_2) = \rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha\rho(x_1, x_2)$. Но $0 < \alpha < 1$, поэтому $\rho(x_1, x_2) = 0$, т. е. $x_1 = x_2$.

Существование. Применяя метод последовательных приближений, рассмотрим произвольную точку $x_0 \in X$ и положим $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1})$. Тогда получим последовательность (x_n) из X. Докажем, что (x_n) есть последовательность Коши. Поскольку отображение $f : X \to X$ – сжимающее (с коэффициентом сжатия $0 < \alpha < 1$), то имеем

$$\rho(x_2, x_1) = \rho(f(x_1), f(x_0)) \leq \alpha\rho(x_1, x_0),$$

$$\rho(x_3, x_2) = \rho(f(x_2), f(x_1)) \leq \alpha\rho(x_2, x_1) \leq$$

$$\leq \alpha^2\rho(x_1, x_0), \ldots, \rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n\rho(x_1, x_0), \ldots,$$

откуда в силу обобщенного неравенства треугольника имеем оценку

$$\forall p : \rho(x_{n+p}, x_n) \leq \rho(x_{n+p}, x_{n+p-1}) + \rho(x_{n+p-1}, x_{n+p-2}) + \ldots +$$

$$+\rho(x_{n+1}, x_n) \leq \alpha^n(\alpha^{p-1} + \alpha^{p-2} + \ldots + \alpha + 1)\rho(x_1, x_0) \leq$$

$$\leq \alpha^n/(1 - \alpha) \cdot \rho(x_1, x_0),$$

т. е. $\forall p \geq 1\ \exists \lim\limits_{n \to +\infty} \rho(x_{n+p}, x_n) = 0$, т. е. (x_n) есть последовательность Коши в полном метрическом пространстве R. Но тогда (x_n) сходится к некоторому пределу $x \in X$, т. е. $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$. В силу непрерывности отображения $f(f \in C(X))$, переходя к пределу (при $n \to +\infty$) в равенстве $x_{n+1} = f(x_n)$, имеем $x = f(x)$. Таким образом, $x \in X$ есть неподвижная точка отображения f.

З а м е ч а н и е. При выполнении условий теоремы о сжимающих отображениях имеем оценку

$$\rho(x_n, x) = \lim_{p \to +\infty} \rho(x_n, x_{n+p}) \leq \alpha^n/(1 - \alpha) \cdot \rho(x_1, x_0)\, \forall n \in \mathbf{N}-$$

оценку скорости сходимости последовательных приближений (x_n) к неподвижной точке x.

Замечание. Предположение $0 < \alpha < 1$ необходимо в принципе сжимающих отображений, поскольку условие $0 < \alpha \leq 1$ не является достаточным ни для единственности, ни для существования неподвижной точки.

Пример 1. Тождественное отображение $I : x \to x$ метрического пространства $R = \{X, \rho\}$ в себя удовлетворяет условию $\rho(I(x_1), I(x_2)) \leq \alpha\rho(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in X$ при $\alpha = 1$. Но для отображения I любая точка $x \in X$ является неподвижной, т. е. нарушена единственность неподвижной точки.

Пример 2. Отображение «сдвига» $f : x \to x + 1$ в $\mathbf{R}$ также удовлетворяет условию $\rho(f(x_1), f(x_2)) \leq \alpha\rho(x_1, x_2)\ \forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ при $\alpha = 1$, однако для отображения f нет ни одной неподвижной точки (нет существования неподвижной точки).

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ $\mathbf{R}^n$ В $\mathbf{R}^m$

§ 1. Частные производные функций многих переменных

Рассмотрим точечное аффинное n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$, в котором введена декартова система координат, так что $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка в $\mathbf{R}^n$. Рассмотрим присоединенное линейное n-мерное пространство $\mathbf{R}^n$ с каноническим базисом $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, где орт $\mathbf{e}_j = (\underbrace{0, \ldots, 0, 1}_{j}, 0, \ldots, 0)$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда для вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ имеем представление $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \equiv (x_1, \ldots, x_n)$. Таким образом, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – точка из аффинного пространства $\mathbf{R}^n$, а $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ $\left(= \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right)$ – вектор из присоединенного линейного пространства $\mathbf{R}^n$. Отметим, что для двух точек x и y из аффинного пространства $\mathbf{R}^n$ можно ввести вектор $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} (y_i - x_i)\mathbf{e}_j \equiv (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n)$ из присоединенного линейного пространства $\mathbf{R}^n$ с «началом» в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и с «концом» в точке $y = (y_1, \ldots, y_n)$. Далее, для точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ (из аффинного пространства $\mathbf{R}^n$) и вектора

$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ (из линейного пространства $\mathbf{R}^n$) можно ввести точку $b = a + \mathbf{x} = (a_1 + x_1, \ldots, a_n + x_n)$ из аффинного пространства $\mathbf{R}^n$.

Введем в присоединенном линейном пространстве скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j \cdot b_j \ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ (так что $\mathbf{R}^n$ становится евклидовым пространством) и евклидову норму $||\mathbf{x}|| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2} \ \forall \mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \equiv (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. В аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$ введем евклидову метрику $\rho(x, y) = ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||$ (так что аффинное пространство $\mathbf{R}^n$ становится метрическим пространством).

Аналогично рассмотрим аффинное m-мерное пространство $\mathbf{R}^m$ с декартовой системой координат $\{y = (y_1, \ldots, y_m)\}$ и присоединенное m-мерное линейное (евклидово) пространство $\mathbf{R}^m$ с каноническим базисом $\{\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_m\}$, где $\mathbf{e}'_i = (\overbrace{0, \ldots, 0, 1}^{i}, 0, \ldots, 0)$ $(i = 1, \ldots, m)$, так что точке $y = (y_1, \ldots, y_m)$ соответствует вектор $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i \mathbf{e}'_i$.

Замечание. Если $\mathbf{f} : x \in \mathbf{R}^n \to \mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(x) \mathbf{e}'_i$ – векторная функция, определенная в аффинном пространстве $\mathbf{R}^n$ со значениями в линейном пространстве $\mathbf{R}^m$, то ей соответствует отображение $f : x \in \mathbf{R}^n \to f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \subset \mathbf{R}^m$ из аффинного пространства $\mathbf{R}^n$ в аффинное пространство $\mathbf{R}^m$.

Рассмотрим векторную функцию одного переменного $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$. В гл. 1 ч. III было введено понятие производной векторной функции $\mathbf{f}$ в точке a по формуле

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(a) = \lim_{h \to 0} (\mathbf{f}(a + h) - \mathbf{f}(a))/h \in \mathbf{R}^m.$$

В координатной форме имеем $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x) \mathbf{e}'_i \equiv (f_1(x), \ldots, f_m(x))$,

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(a) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}f_i(a) \mathbf{e}'_i \equiv (\mathrm{D}f_1(a), \ldots, \mathrm{D}f_m(a)).$$

Рассмотрим теперь (векторную) функцию n переменных $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$ – точка в $\mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n)$ – вектор из $\mathbf{R}^n$.

Определение. *Производной (или частной производной) функции* $\mathbf{f}$ *в точке* a *вдоль вектора* $\mathbf{l}$ *называется производная (если она существует) функции* $t \to \mathbf{f}(a + t\mathbf{l})$ *при* $t = 0$. (Обозначение: $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$.)

Итак, $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \lim\limits_{t\to 0}(\mathbf{f}(a+t\mathbf{l}) - \mathbf{f}(a))/t$. Очевидно, производная $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) \in \mathbf{R}^m$ есть вектор.

Замечание. Если $\mathbf{l} = 0 \in \mathbf{R}^m$ – нуль-вектор, то из данного выше определения следует, что производная вдоль нуль-вектора всегда существует и равна нулю.

В координатной форме имеем для $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = (\mathrm{D}_{\mathbf{l}}f_1(a), \ldots, \mathrm{D}_{\mathbf{l}}f_m(a)),$$

где

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}}f_i(a) = \lim_{t\to 0}(f_i(a+t\cdot\mathbf{l}) - f_i(a))/t \,(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Замечание. Если $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $\exists \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$, то $\forall \lambda \in \mathbf{R}$ $\exists \mathrm{D}_{\lambda\cdot\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$, причем $\mathrm{D}_{\lambda\cdot\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \lambda\cdot\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$. В самом деле, при $\lambda = 0$ это очевидно. Для $\lambda \neq 0$ положим $s = t\cdot\lambda$, тогда $(t \to 0) \Rightarrow (s \to 0)$, но $(\mathbf{f}(a+t\cdot\lambda\cdot\mathbf{l}) - \mathbf{f}(a))/t = \lambda\cdot(\mathbf{f}(a+s\cdot\mathbf{l}) - \mathbf{f}(a))/s$, поэтому, переходя к пределу при $t \to 0$, получаем

$$(\exists \lim_{t\to 0}(\mathbf{f}(a+t\cdot\lambda\cdot\mathbf{l}) - \mathbf{f}(a))/t = \lambda\cdot\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)) \Rightarrow (\mathrm{D}_{\lambda\cdot\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \lambda\cdot\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)).$$

Пусть $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ – числовая функция n переменных и $\mathbf{e}_j$ – j-й координатный орт в $\mathbf{R}^n$.

Определение. *Производная функции f в точке a вдоль орта $\mathbf{e}_j$* : $\mathrm{D}_{\mathbf{e}_j}f(a) = \partial_j f(a) = \mathrm{D}_j f(a) = \dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \lim\limits_{t\to 0}(f(a+t\mathbf{e}_j) - f(a))/t$ *называется j-й частной производной функции f в точке a. Очевидно,* $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j} = \lim\limits_{t\to 0}(f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n))/t$.

Замечание. Определение первых частных производных функции многих переменных не требует введения новых понятий по сравнению с дифференциальным исчислением функции одного переменного.

Пример. Пусть $f(x, y) = \sin(x^2 + \sqrt{y})$, тогда $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \cos(x^2 + \sqrt{y})\cdot 2x$; $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \cos(x^2+\sqrt{y})/(2\sqrt{y})$ $(y \neq 0)$.

Определение. *Пусть $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbf{R}^n$, тогда j-й частной производной (векторной) функции $\mathbf{f}$ в точке a называется вектор* $\partial_j\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}_j\mathbf{f}(a) = \lim\limits_{t\to 0}(\mathbf{f}(a+t\mathbf{e}_j) - \mathbf{f}(a))/t$. *В координатной форме* $\partial_j\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}_j\mathbf{f}(a) = \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\mathbf{e}_i' = \left(\dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_j}, \ldots, \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_j}\right)$.

О п р е д е л е н и е. $m \times n$ – *матрица, составленная из частных производных* $\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, *т. е.*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

называется матрицей Якоби для (векторной) функции f *в точке* a. *Если* $m = n$, *то определитель матрицы Якоби называется якобианом (векторной) функции* $\mathbf{f}$ *в точке* a *и обозначается символом* $\dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) \equiv \dfrac{\mathrm{D}(f_1, \ldots, f_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}(a)$. Из определения частных производных вдоль вектора вытекает

Т е о р е м а (о линейности частного дифференцирования). *Пусть* $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{g} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{l} = (l_1, \ldots, l_n) = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j$ *и* $\exists \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$, $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{g}(a)$ $(\exists \mathrm{D}_j\mathbf{f}(a), \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{g}(a))$. *Тогда в точке* $x = a$ *имеем: 1)* $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f} + \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{g}$, $(\mathrm{D}_j(\mathbf{f}+\mathbf{g}) = \mathrm{D}_j\mathbf{f} + \mathrm{D}_j\mathbf{g})$; *2)* $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}(\alpha \cdot \mathbf{f}) = \alpha \cdot \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}$ $\forall \alpha \in \mathbf{R}$; *3) при* $m = 1$ $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}(f \cdot g) = g \cdot \mathrm{D}_{\mathbf{l}} f + f \cdot \mathrm{D}_{\mathbf{l}} g$.

З а м е ч а н и е. Пусть $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\exists \mathrm{D}_j f(a)$ $\forall j$, тогда для функции одного переменного $f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \ldots, a_n) = g_j(x_j)$, очевидно, имеем $g_j \in C(a_j)$ $\forall j$, но утверждение $f \in C(a)$, вообще говоря, неверно.

П р и м е р. Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, \ x = 0, \ -\infty < y < +\infty, \\ 0, \ -\infty < x < +\infty, \ y = 0, \\ 1, \text{ для точек } (x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ не лежащих} \\ \text{на координатных осях.} \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \dfrac{\partial}{\partial y} f(0, 0) = 0$, но при $p_0 = (0, 0)$ $\forall U_\delta(p_0)$ $\exists p_1, p_2 \in U_\delta(p_0)$, $p_1 = (p, p)$, $p_2 = (0, p)$, $p \neq 0$ такие, что $f(p_1) = 1$, $f(p_2) = 0$, т. е. $f \overline{\in} C(p_0)$.

Использование теоремы о производной сложной функции для функций одного переменного (ч. I, гл. 5, §4) дает теорему:

Т е о р е м а (о частных производных композиции двух функций). *Пусть* $f : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to R$ *и* $(\varphi : (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, *причем* $(\alpha, \beta) \supset f(U(x_0))$. *Тогда существует композиция* $\varphi \circ f : U(0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. *Если при этом существуют частная производная* $\mathrm{D}_i f(x_0)$ *и производная* $\mathrm{D}\varphi(y_0)$, *где* $y_0 = f(x_0) \in (\alpha, \beta)$, *то* $\exists \mathrm{D}_i \varphi \circ f(x_0) = \mathrm{D}\varphi(y_0) \cdot \mathrm{D}_i f(x_0)$.

Для простоты будем теперь рассматривать числовую функцию n переменных $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Допустим, что $\forall x \in U(a)$ $\exists \mathrm{D}_i f(x)$,

тогда в окрестности $U(a) \subset \mathbf{R}^n$ определена функция $F_i : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $F_i(x) = \mathrm{D}_i f(x)$. Пусть функция $F_i(x)$ имеет в точке a j-ю частную производную $\mathrm{D}_j F_i(a)$.

О п р е д е л е н и е. *Частной производной второго порядка* $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(a)$ *функции* $f(x)$ *в точке* a *называется частная производная* $\mathrm{D}_j F_i(a)$, *т. е.* $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(a) = \mathrm{D}_j(\mathrm{D}_i f(x))|_{x=a}$. Обозначения: смешанные производные $(i \neq j)$ $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(a) = f''_{x_i x_j}(a) = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$, чистые производные второго порядка $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_i f(a) = f''_{x_i x_i}(a) = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i^2}$.

П р и м е р. Пусть $f(x, y) = \operatorname{arctg}(x/y)$. Тогда

$$\mathrm{D}_1 f(x, y) = y/(x^2 + y^2), \mathrm{D}_2 f = -x/(x^2 + y^2),$$

$$\mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 f = -2xy/(x^2 + y^2)^2, \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)^2 = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f,$$

$$\mathrm{D}_2\mathrm{D}_2 f = 2xy/(x^2 + y^2)^2 (x^2 + y^2 > 0).$$

Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество.

О п р е д е л е н и е. *m-й производной функции $f(x)$ в точке $a \in G$ называется функция, определяемая по индукции*

$$\mathrm{D}_{i_m}\mathrm{D}_{i_{m-1}} \dots \mathrm{D}_{i_1} f(a) = \mathrm{D}_{i_m}(\mathrm{D}_{i_{m-1}}, \dots, \mathrm{D}_{i_1} f(x))|_{x=a},$$

где $i_k = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m$ *(в предположении, что все частные производные, участвующие в определении, существуют).*

Т е о р е м а Ш в а р ц а (достаточное условие равенства смешанных частных производных второго порядка). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $x_0 \in G$ *и* $G \subset \mathbf{R}^n$ – *открытое множество. Пусть существует окрестность* $U(x_0) \subset G$ *такая, что* $\forall x \in U(x_0)$ $\exists \mathrm{D}_i f(x)$, $\mathrm{D}_j f(x)$ $(i \neq j)$ *и* $\exists \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x)$, *причем* $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f \in C(x_0)$. *Тогда* $\exists \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0)$ *и* $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности рассмотрим функцию двух переменных $f(x, y)$. Пусть $\forall p \in U(p_0) \subset G$ $\exists \mathrm{D}_1 f(p)$, $\mathrm{D}_2 f(p)$, $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(p)$, причем $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f \in C(p_0)$, $p_0 = (x_0, y_0)$. Положим $\Delta x = h$, $\Delta y = k$, причем $(x_0 + h, y_0 + k)$, $(x_0 + h, y_0)$, $(x_0, y_0 + k) \in U(p_0)$. Положим $A = \Delta_x\Delta_y f(p_0) = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + k) + f(x_0, y_0)$, если $\varphi(x_0) = f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$, то

$$A = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0).$$

Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, имеем $A = h\varphi'(x_0 + \vartheta_1 h) = h(\mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - \mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0))$, $0 < \vartheta_1 < 1$.

Поскольку $\forall p \in U(p_0)$ $\exists \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(p)$, то можно еще раз применить теорему Лагранжа и получить $\mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + k) - \mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot k$, $0 < \vartheta_2 < 1$, поэтому

$$A = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_1 h, y_0 + \vartheta_2 k) \cdot h \cdot k, \; 0 < \vartheta_i < 1 \, (i = 1, 2).$$

Поскольку $\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f \in C(p_0)$, то

$$\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h, y_0+\vartheta_2 k) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0) + o(1)$$

$$(\rho = (h^2+k^2)^{1/2} \to 0),$$

откуда $A = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)h\cdot k + o(h\cdot k)$ $(p\to 0)$, т. е.

$$(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0))/hk = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0) + o(1)\ (\rho\to 0).$$

Таким образом, $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что при любых h, k, удовлетворяющих неравенствам $0<|h|<\delta_1$, $0<|k|<\delta_2$, имеет место оценка

$$|(\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0))/hk - \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(p_0)| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

Полагая $\varphi(x_0) = f(x_0,y_0+k) - f(x_0,y_0) \equiv \varphi(x_0,k)$, имеем

$$|(\varphi(x_0+h;k)/k - \varphi(x_0;k)/k)/h - \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(p_0)| < \varepsilon,$$

но поскольку $\varphi(x_0;k)/k = (f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0))/k$, то

$$\lim_{k\to 0}\varphi(x_0;k)/k = \mathrm{D}_2 f(x_0,y_0),$$

$$\lim_{k\to 0}\varphi(x_0+h;k) = \mathrm{D}_2 f(x_0+h,y_0),$$

поэтому, переходя в неравенстве (1.1) к пределу при $k\to 0$, имеем при $0<|h|<\delta_1(\varepsilon)$ оценку

$$|(\mathrm{D}_2 f(x_0+h,y_0) - \mathrm{D}_2 f(x_0,y_0))/h - \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)| \le \varepsilon,$$

которая и означает, что существует

$$\lim_{h\to 0}(\mathrm{D}_2 f(x_0+h,y_0) - \mathrm{D}_2(x_0,y_0))/h = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0).$$

Таким образом, $\exists \mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(p_0)$ и $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(p_0) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(p_0)$.

З а м е ч а н и е. Теорему Шварца обычно применяют в следующей ослабленной форме: пусть существует окрестность $U(x_0)\subset \mathbf{R}^n$ такая, что $\forall x\in U(x_0)$ $\exists \mathrm{D}_i f(x)$, $\mathrm{D}_j f(x)$, $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x)$, $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x)$, $(i\ne j)$, причем $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x)$, $\mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x) \in C(x_0)$. Тогда $\mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_j\mathrm{D}_i f(x_0)$.

Т е о р е м а. *Пусть $f: G\subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $G\subset\mathbf{R}^n$ – открытое множество. Пусть функция $f(x)$ имеет в G всевозможные частные производные до $(m-1)$-го порядка включительно и смешанные производные m-го порядка, причем все эти производные непрерывны в G. Тогда значение m-й смешанной производной не зависит от того порядка, в котором производятся последовательные дифференцирования. (Теорему можно доказать по индукции.)*

Пример функции, имеющей различные смешанные производные:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy(x^2-y^2)/(x^2+y^2), & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

тогда

$$\mathrm{D}_1 f(x,y)=\begin{cases} y(x^4-y^4+4x^2y^2)/(x^2+y^2)^2, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

откуда

$$\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(0,0)=\lim_{y\to 0}(\mathrm{D}_1 f(0,y)-\mathrm{D}_1 f(0,0))/y=-1,$$

$$\mathrm{D}_2 f(x,y)=\begin{cases} x(x^4-y^4-4x^2y^2)/(x^2+y^2)^2, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

поэтому

$$\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0,0)=\lim_{x\to 0}(\mathrm{D}_2 f(x,0)-\mathrm{D}_2 f(0,0))/x=1,$$

т.е.

$$\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(0,0)=-1\neq 1=\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(0,0).$$

§ 2. Некоторые сведения из линейной алгебры

О п р е д е л е н и е. *Отображение* $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ *называется линейным (или гомоморфизмом, или морфизмом), если* $\forall \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbf{R}^n$ *и* $\forall\alpha_1,\alpha_2\in\mathbf{R}$ $A(\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2)=\alpha_1A\mathbf{x}_1+\alpha_2A\mathbf{x}_2$. В частности, $A0=0$.

Пусть $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ – линейное отображение, тогда матрицей морфизма A (относительно стандартных базисов $\{\mathbf{e}_j\}$ $(j=1,2,\dots,n)$ в $\mathbf{R}^n$ и $\{\mathbf{e}'_i\}$ $(i=1,2,\dots,m)$ в $\mathbf{R}^m$) называется $m\times n$ матрица (A_{ij}) $(i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n)$ такая, что $A\mathbf{e}_j=\sum\limits_{i=1}^{m}A_{ij}\mathbf{e}'_i$ $(i=1,2,\dots,n)$, $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$, $y_i=\sum\limits_{j=1}^{n}A_{ij}x_j$ $(i=1,2,\dots,m)$, или в векторно-матричной форме

$$\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots\\ y_m\end{pmatrix}=m\left\{\underbrace{\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn}\end{pmatrix}}_{n}\right\}\begin{pmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

З а м е ч а н и е. Между линейными отображениями $A:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ и $m\times n$ матрицами (A_{ij}) существует взаимно однозначное соответствие,

поэтому в дальнейшем линейное отображение и его матрицу будем обозначать одной буквой A ($A = (A_{ij})$).

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ – *множество всех линейных отображений* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. *Тогда* $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *становится линейным пространством, если положить: 1)* $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ $(A_1 = A_2) \Leftrightarrow (A_1\mathbf{x} = A_2\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n)$; *2)* $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ *и* $\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ $(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)\mathbf{x} = \alpha_1 A_1\mathbf{x} + \alpha_2 A_2\mathbf{x}\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *при этом* $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

З а м е ч а н и е. Если $A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $A_k = (A_{ij}^{(k)})$ $(k = 1, 2)$ – матрицы, соответствующие морфизмам A_1 и A_2, то линейному отображению $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ соответствует $m \times n$ матрица $(\alpha_1 A_{ij}^{(1)} + \alpha_2 A_{ij}^{(2)})$. Таким образом, линейное пространство $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ изоморфно линейному пространству всех $m \times n$ матриц, т. е. имеет размерность $m \cdot n$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *и* $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. *Рассмотрим отображение* $B \circ A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, *определенное с помощью равенства* $(B \circ A)\mathbf{x} = B(A\mathbf{x}) \in \mathbf{R}^p\ \forall \mathbf{x}\mathbf{R}^n$ $(A\mathbf{x}\mathbf{R}^m)$. *Очевидно.* $B \circ A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

З а м е ч а н и е. Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $A = (A_{ij})$ $m \times n$ матрица морфизма A, а $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$ и $B = (B_{kl})$ $p \times m$ матрица морфизма B. Тогда отображению $B \circ A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ соответствует $p \times n$ матрица $C = (C_{\mu\nu})$, где $C_{\mu\nu} = \sum\limits_{i=1}^{m} B_{\mu i} A_{i\nu}$, т. е. для матриц A, B и C имеем $C = B \cdot A$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, *тогда положим*

$$||A|| = \sup_{||x||_n > 0} (||A\mathbf{x}||_m / ||\mathbf{x}||_n) = \sup_{||x||_n = 1} ||A\mathbf{x}||_m = \sup_{||x||_n \le 1} ||A\mathbf{x}||_m.$$

Для доказательства написанных равенств заметим, что в силу линейности A и свойства нормы $||\ ||_m$ $\forall \mathbf{x} \neq 0$ имеем $(A\mathbf{x})/||\mathbf{x}||_n = A(\mathbf{x}/||\mathbf{x}||_n) = A\mathbf{y}$, где $||\mathbf{y}||_n = ||\mathbf{x}/||\mathbf{x}||_n||_n = 1$, т. е. $||A|| = \sup\limits_{||y||_n = 1} ||A\mathbf{y}||_m$. Далее, очевидно, $\sup\limits_{||x||_n \le 1} ||A\mathbf{x}||_m \ge \sup\limits_{||x||_n = 1} ||A\mathbf{x}||_m = ||A||$, но в силу линейности A при $0 < ||\mathbf{x}||_n \le 1$ имеем $||A\mathbf{x}||_m = ||\mathbf{x}||_n \cdot ||A(\mathbf{x}/||\mathbf{x}||_n)||_m \le ||A(\mathbf{x}/||\mathbf{x}||_n)||_m = ||A\mathbf{y}||_m \le ||A||$ (так как $||\mathbf{y}||_n = 1$), откуда $\sup\limits_{||x||_n \le 1} ||A\mathbf{x}||_m = ||A||$.

З а м е ч а н и е. Норма $||A||$ зависит от выбора норм $||\ ||_n$ и $||\ ||_m$ в линейных пространствах $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$.

З а м е ч а н и е. Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $||A|| < +\infty$. Тогда $||A\mathbf{x}||_m \le ||A|| \cdot ||\mathbf{x}||_n\ \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. В самом деле, для нулевого вектора $\mathbf{x} = 0$ это очевидно, а при $\mathbf{x} \neq 0$ имеем

$$(||A\mathbf{x}||_m / ||\mathbf{x}||_n \le \sup_{||x||_n > 0} (||A\mathbf{x}||_m / ||\mathbf{x}||_n)) \Rightarrow (||A\mathbf{x}||_m \le$$

$$\leq ||A|| \cdot ||\mathbf{x}||_n \; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n).$$

Замечание. Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $\alpha > 0$ таково, что $||A\mathbf{x}||_m \leq \alpha ||\overline{x}||_n \; \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$. Тогда $||A|| \leq \alpha$.

В самом деле, при $\mathbf{x} \neq 0$ $(||A\mathbf{x}||_m / ||\mathbf{x}||_n \leq \alpha) \Rightarrow (||A|| = \sup\limits_{||x||_n > 0} (||A\mathbf{x}||_m / ||\mathbf{x}||_n) \leq \alpha)$.

Теорема. *Пусть* $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. *Тогда: 1)* $||A|| < +\infty$; *2)* $||A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2||_m \leq ||A|| \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \; \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, *так что любое линейное отображение* $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *равномерно непрерывно на* $\mathbf{R}^n$.

Доказательство. Морфизму $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ соответствует $m \times n$ матрица $A = (A_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$, причем если $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbf{R}^m$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, то $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Очевидно, координатные функции $y_i(x)$ непрерывны в $\mathbf{R}^n$ $\forall i$. Как было замечено в §7 гл. 1 ч. III (и доказано для норм $||\;||_1$ и $||\;||_\infty$), любая норма в $\mathbf{R}^n$ $(\mathbf{R}^m)$ эквивалентна евклидовой норме, так что (см. §9 гл. 1 ч. III) непрерывность отображения $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ эквивалентна непрерывности координатных функций $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, поэтому для функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ имеем $\mathbf{f} \in C(\mathbf{R}^n)$. Но тогда в силу теоремы Вейерштрасса (об ограниченности векторной функции непрерывной на компактном множестве) имеем $||A|| = \sup\limits_{||x||_n = 1} ||A\mathbf{x}||_m < +\infty$, поскольку множество $K = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \,|\, ||\mathbf{x}||_n = 1\}$ компактно в $\mathbf{R}^n$ (в любой норме). Итак, при любом выборе норм $||\;||_n$ и $||\;||_m$ имеем 1) $||A|| < +\infty$. Далее, в силу линейности отображения $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ имеем 2) $||A\mathbf{x}_1 - A\mathbf{x}_2||_m = ||(A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)||_m \leq ||A|| \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \; \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, откуда, в частности, следует равномерная непрерывность морфизма A на $\mathbf{R}^n$.

Следствие. Пусть нормы $||\;||_n$ и $||\;||_m$ евклидовы и $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Тогда $||A|| \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij}^2 \right)^{1/2}$, где (A_{ij}) – матрица морфизма A.

В самом деле, поскольку $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$, то, используя неравенство Коши–Буняковского и рассматривая евклидовы нормы $||\;||_n$ и $||\;||_m$, имеем

$$||\mathbf{y}||_m^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} ||x||_n^2,$$

т. е.

$$||Ax||_m \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2\right)^{1/2} \cdot ||x||_n \; \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

откуда имеем

$$||A|| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}^2\right)^{1/2}.$$

Теорема. *Функция* $A \to ||A||$, *определенная* $\forall A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, *есть норма в линейном пространстве* $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

Доказательство. По доказанному выше $0 \leq ||A|| = \sup\limits_{||x||_n=1} ||Ax||_m < +\infty$. Тогда имеем:

1) $||A|| \geq 0 \; \forall A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $(A = 0) \Rightarrow (Ax = 0 \; \forall x \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (||A|| = 0)$, если же $||A|| = 0$, то $(||Ax||_m \leq ||A|| \cdot ||x||_n, \; \forall x \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (||Ax||_m = 0 \; \forall x \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (Ax = 0 \; \forall x \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (A = 0)$ (т. е. $(A = 0) \Leftrightarrow (||A|| = 0)$);

2) $(\forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)) \Rightarrow (||A_1 + A_2|| = \sup\limits_{||x||_n=1} ||(A_1 + A_2)x||_m = \sup\limits_{||x||_n=1} ||A_1x + A_2x||_m \leq \sup\limits_{||x||_n=1} (||A_1x||_m + ||A_2x||_m) \leq \sup\limits_{||x||_n=1} ||A_1x||_m + \sup\limits_{||x||_n=1} ||A_2x||_m = ||A_1|| + ||A_2||) \Rightarrow (||A_1 + A_2|| \leq ||A_1|| + ||A_2||)$:

3) $(\forall \alpha \in \mathbf{R}, \; \forall A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)) \Rightarrow (||\alpha \cdot A|| = \sup ||(\alpha \cdot Ax||_m = |\alpha| \cdot \sup\limits_{||x||_n=1} ||Ax||_m = |\alpha| \cdot ||A||) \Rightarrow (||\alpha \cdot A|| = |\alpha| \cdot ||A||)$.

Следствие. Нормированное линейное пространство $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ становится метрическим пространством, если в нем ввести метрику, индуцированную нормой $||A||$, т. е. положить $\rho(A_1, A_2) = ||A_1 - A_2|| \; \forall A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$.

Замечание. Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$. Тогда $B \circ A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$, $||B \circ A|| \leq ||B|| \cdot ||A||$.

В самом деле, $(\forall x \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (Ax \in \mathbf{R}^m) \Rightarrow (B(Ax) \in \mathbf{R}^p)$, $(||B \circ A)x||_p = ||B(Ax)||_p \leq ||B|| \cdot ||Ax||_m \leq ||B|| \cdot ||A|| \cdot ||x||_n) \Rightarrow (||B \circ A|| \leq ||B|| \cdot ||A||)$.

Пример. Рассмотрим пространства $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^m$ и $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$. Далее $\forall y \in \mathbf{R}^m$ рассмотрим отображение $A_y : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ такое, что $A_y \cdot h = h \cdot y \; \forall h \in \mathbf{R}$. Очевидно, $A_y \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ есть морфизм с $m \times 1$ матрицей $(A_{i1}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$ и нормой $||A_y|| = \sup\limits_{|h|=1} ||h \cdot y||_m = \sup\limits_{|h|=1} (|h| \cdot ||y||_m) = ||y||_m$, так что $||Ay|| = ||y||_m$, при этом $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \to \alpha_1 A_{y_1} + \alpha_2 A_{y_2}$, т. е. указанное отображение $y \to A_y$ пространства $\mathbf{R}^m$ в $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ линейно и сохраняет норму $||y||_m = ||A_y||$. Обратно,

любому морфизму $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ $A : h \to Ah$, где $Ah \in \mathbf{R}^m$, можно поставить в соответствие вектор $A \cdot 1 = \mathrm{y} \in \mathbf{R}^m$ такой, что $A : h \to h \cdot (A \cdot 1) = h \cdot \mathrm{y}$. Это соответствие $A \to \mathrm{y} = A \cdot 1$ также линейно: $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 \to \alpha_1 \mathrm{y}_1 + \alpha_2 \mathrm{y}_2 \equiv \alpha_1 A_1 \cdot 1 + \alpha_2 A_2 \cdot 1$. Тем самым установлен изоморфизм линейных пространств $\mathbf{R}^m \overset{\text{на}}{\underset{\text{на}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$.

Теорема. *Пусть* $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *и* $||B|| < 1$. *Тогда уравнение* $\mathrm{x} - B\mathrm{x} = \mathrm{y}$ *однозначно разрешимо* $\forall \mathrm{y} \in \mathbf{R}^n$.

Доказательство. Рассмотрим полное метрическое пространство $R = \{\mathbf{R}^n, \rho\}$ с точками $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$ и метрикой $\rho(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2) = ||\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2||_n$ и введем отображение $f : \mathrm{x} \to B\mathrm{x} + \mathrm{y}$ пространства R в себя. Поскольку $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, то $\forall \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{R}^n$ имеем оценку

$$\rho(f(\mathrm{x}_1), f(\mathrm{x}_2)) = ||B(\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2)||_n \leq ||B|| \cdot ||\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_2||_n =$$

$$= ||B|| \cdot \rho(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2),$$

но по условию $||B|| < 1$, поэтому f есть сжимающее отображение полного метрического пространства R в себя. В силу принципа сжимающих отображений существует единственная неподвижная точка $\mathrm{x} \in \mathbf{R}^n$ отображения f, так что $(f(\mathrm{x}) = \mathrm{x}) \Rightarrow (\mathrm{x} - B\mathrm{x} = y)$ и при этом $\mathrm{x} = \lim\limits_{m \to +\infty} \mathrm{x}_m$, где $x_0 = \mathrm{y}$, $\mathrm{x}_m = f(\mathrm{x}_{m-1})$ $(m = 1, 2, \ldots)$, так что

$$\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} + B\mathrm{y}, \mathrm{x}_2 = \mathrm{y} + B\mathrm{y} + B^2\mathrm{y}, \ldots, \mathrm{x}_m = \mathrm{y} + \sum_{k=1}^{m} B^k\mathrm{y}, \mathrm{x} = \mathrm{y} + \sum_{k=1}^{+\infty} B^k\mathrm{y},$$

$\lim\limits_{m \to +\infty} \rho(\mathrm{x}, \mathrm{x}_m) = \lim\limits_{m \to +\infty} ||\mathrm{x} - \left(\mathrm{y} + \sum\limits_{k=1}^{m} B^k\mathrm{y}\right)||_n = 0$. Заметим, что в силу следствия к теореме о принципе сжимающих отображений имеем оценку скорости сходимости (при $\alpha = ||B|| < 1$ и $\mathrm{x}_0 = \mathrm{y}$, $\mathrm{x}_1 = \mathrm{y} + B\mathrm{y}$, $||B\mathrm{y}||_n = \rho(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)$) $\rho(\mathrm{x}, \mathrm{x}_m) = ||\mathrm{x} - \mathrm{x}_m||_n \leq ||B||^m \rho(\mathrm{x}_0, \mathrm{x}_1)/(1 - ||B||) \leq ||B||^{m+1} ||\mathrm{y}||_n/(1 - ||B||)$.

Следствие (лемма Неймана). Пусть $B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ и $||B|| < 1$. Тогда $I - B \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ является биекцией $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$, причем обратная биекция $(I - B)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ такова, что

$$(I - B)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{+\infty} B^k \text{ и } ||(I - B)^{-1}|| \leq 1/(1 - ||B||).$$

Доказательство. В силу доказанной выше однозначной разрешимости уравнения $\mathrm{x} - B\mathrm{x} = \mathrm{y}$ $\forall \mathrm{y} \in \mathbf{R}^n$ вытекает, что отображение $I - B : \mathrm{x} \to \mathrm{y} = \mathrm{x} - B\mathrm{x}$ есть биекция и поэтому существует обратная биекция $(I - B)^{-1} : \mathrm{y} \to \mathrm{x} = (I - B)^{-1}\mathrm{y}$, являющаяся гомоморфизмом из $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, как показано в линейной алгебре. (В самом деле, пусть $C \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ есть линейная биекция, так что $\forall \mathrm{y}_1, \mathrm{y}_2 \ni \mathbf{R}^n$ $\exists \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2 \in \mathbf{R}^n$, для которых $C\mathrm{x}_1 = \mathrm{y}_1$, $C\mathrm{x}_2 = \mathrm{y}_2$ или

$\mathbf{x}_1 = C^{-1}\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 = C^{-1}\mathbf{y}_2$ и тогда $C(\alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2) = \alpha_1 C\mathbf{x}_1 + \alpha_2 C\mathbf{x}_2 = \alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2$, т. е. $C^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = \alpha_1\mathbf{x}_1 + \alpha_2\mathbf{x}_2$, откуда имеем $C^{-1}(\alpha_1\mathbf{y}_1 + \alpha_2\mathbf{y}_2) = \alpha_1 C^{-1}\mathbf{y}_1 + \alpha_2 C^{-1}\mathbf{y}_2$, т. е. $C^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. В силу единственности неподвижной точки имеем представление

$$\mathbf{x} = \lim_{m\to+\infty} \mathbf{x}_m = \lim_{m\to+\infty} \left(\mathbf{y} + \sum_{k=1}^{m} B^k\mathbf{y}\right) \stackrel{def}{=} \mathbf{y} + \sum_{k=1}^{+\infty} B^k\mathbf{y} \equiv$$

$$\equiv \left(I + \sum_{k=1}^{+\infty} B^k\right)\mathbf{y},$$

т. е. $\mathbf{x} \equiv (I-B)^{-1}\mathbf{y} \stackrel{def}{=} \left(I + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} B^k\right)\mathbf{y}$, так что $(I-B)^{-1} \stackrel{def}{=} I + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} B^k$. Напомним, что $\mathbf{x} = \lim\limits_{m\to+\infty} \mathbf{x}_m$ означает $\lim\limits_{m\to+\infty} ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_m||_n = 0$, причем, как показано ранее, $||\mathbf{x} - \mathbf{x}_m||_n \le ||B||^{m+1} \cdot ||\mathbf{y}||_n/(1 - ||B||)$. Но

$$||\mathbf{x}_m||_n = ||\mathbf{y} + \sum_{k=1}^{m} B^k\mathbf{y}||_n \le ||\mathbf{y}||_n + \sum_{k=1}^{m} ||B^k\mathbf{y}||_n \le$$

$$\le \left(1 + \sum_{k=1}^{m} ||B||^k\right) ||\mathbf{y}||_n \le ||\mathbf{y}||_n/(1 - ||B||),$$

т. е. $||\mathbf{x}_m||_n \le ||\mathbf{y}||_n/(1 - ||B||)$. Поскольку $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbf{x}_m = \mathbf{x}$, то в силу непрерывности нормы $||\ ||_n$ в $\mathbf{R}^n$, переходя к пределу при $m \to +\infty$, получаем оценку $||\mathbf{x}||_n \le ||\mathbf{y}||_n/(1 - ||B||)$, т. е.

$$||(I - B)^{-1}y||_n \le ||\mathbf{y}||_n/(1 - ||B||)\ \forall \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n,$$

откуда имеем оценку $||(I - B)^{-1}|| \le 1/(1 - ||B||)$. Заметим, что формально эта оценка может быть получена из формального представления $(I - B)^{-1} = I + \sum\limits_{k=1}^{+\infty} B^k$, дающего

$$||(I - B)^{-1}|| \equiv ||I + \sum_{k=1}^{+\infty} B^k|| \le 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} ||B||^k = 1/(1 - ||B||).$$

Т е о р е м а (о линейном возмущении). *Пусть* $A, C \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, *причем* $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *и* $||A^{-1}|| \le \alpha$. *Пусть* $||A - C|| \le \beta$, *где* $\alpha\beta < 1$. *Тогда* $\exists C^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, *причем* $||C^{-1}|| \le \alpha/(1 - \alpha\beta)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что $A^{-1}C = I - (I - A^{-1}C) = I - A^{-1}(A - C)$. Но $||A^{-1}(A - C)|| \le ||A^{-1}|| \cdot ||A - C|| \le \alpha\beta < 1$, так что, полагая $\mathcal{D} = A^{-1}C$, в силу леммы Неймана видим, что $\exists \mathcal{D}^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, причем $||\mathcal{D}^{-1}|| \le 1/(1 - ||A^{-1}(A - C)||) \le 1/(1 - \alpha\beta)$. Далее,

$(\mathcal{D}^{-1}\mathcal{D} = I) \Rightarrow (\mathcal{D}^{-1}A^{-1}C = I)$, т. е. $\exists C^{-1} = \mathcal{D}^{-1}A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, причем

$$||C^{-1}|| = ||\mathcal{D}^{-1}A^{-1}|| \leq ||\mathcal{D}^{-1}|| \cdot ||A^{-1}|| \leq \alpha/(1-\alpha\beta).$$

Пусть $G \subset \mathbf{R}^m$ – открытое множество и $\forall x \in G \subset \mathbf{R}^m$ определен морфизм $A(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, тогда отображение $x \to A(x)$ есть отображение $G \subset \mathbf{R}^m \to \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

Т е о р е м а (о нелинейном возмущении). *Пусть $G \subset \mathbf{R}^m$ – открытое множество и $x_0 \in G$ – точка. Пусть $A : G \subset \mathbf{R}^m \to \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ $(x \to A(x))$, где $A(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ и $A \in C(x_0)$, причем для морфизма $A(x_0)$ существует обратный морфизм $A^{-1}(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Тогда существуют шар $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^m$ и постоянная $\gamma > 0$ такие, что $\forall x \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^m$ морфизм $A(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ имеет обратный $A^{-1}(\text{x}) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, причем $||A^{-1}(x)|| \leq \gamma$ и отображение $A^{-1} : \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G \to \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ непрерывно в точке $x_0 \in G$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим $\alpha = ||A^{-1}(x_0)||$ и выберем $0 < \beta < 1/\alpha$. Поскольку $A \in C(x_0)$, то для $\beta > 0$ существует шар $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset G$ такой, что $||A(x_0) - A(x)|| < \beta \ \forall x \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G$, но поскольку $0 < \alpha\beta < 1$, то в силу теоремы о линейном возмущении (где $A \equiv A(x_0)$, $C \equiv A(x)$) видим, что морфизм $A(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ есть биекция и для обратной биекции $A^{-1}(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ имеет место оценка $||A^{-1}(x)|| \leq a/(1-\alpha\beta) = \gamma$. Далее, $\forall x \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G$ имеем

$$||A^{-1}(x_0) - A^{-1}(x)|| = ||A^{-1}(x_0)(A(x) - A(x_0))A^{-1}(x)|| \leq$$

$$\leq ||A^{-1}(x_0)|| \cdot ||A^{-1}(x)|| \cdot ||A(x) - A(x_0)|| \leq \alpha \cdot \gamma \cdot ||A(x) - A(x_0)||.$$

Но $A \in C(x_0)$, поэтому $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_1 \in (0, \delta)$ такое, что $||A(x) - A(x_0)|| < \varepsilon/\alpha\gamma \ \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}(x_0)$, а потому $||A^{-1}(x_0) - A^{-1}(x)|| < \varepsilon$, т. е. $A^{-1} \in C(x_0)$.

§ 3. Понятие дифференцируемости отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$

Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество и $a \in G$. Тогда существует окрестность $U(a) \subset G$. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Вспомним определение дифференцируемости в точке $a \in G \subset \mathbf{R}$ для числовой функции $f(x)$ одного действительного переменного.

С т а р о е о п р е д е л е н и е. *Числовая функция $f(x)$, определенная на $G \subset \mathbf{R}$, называется дифференцируемой в точке $a \in G$, если существуют окрестность $U(a) \subset G$ и число $A \in \mathbf{R}$ такие, что $(\forall a + h \in U(a)) \Rightarrow (f(x+h) = f(a) + Ah + r(h)|h|$, где $r(h) = o(1)$ $(h \to 0))$, при этом число $A \in \mathbf{R}$ определялось единственным образом и называлось производной функции f в точке a : $A = f'(a)$.* Вводя

линейное отображение $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ по формуле $A : \mathrm{h} \to f'(a) \cdot \mathrm{h}$, можно дать эквивалентное определение дифференцируемости функции f в точке a.

Новое определение. *Функция $f : G \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ называется дифференцируемой в точке $a \in G$, если существуют окрестность $U(a) \subset G$ и морфизм $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ такие, что $\forall a + \mathrm{h} \in U(a)$ имеем $f(a + \mathrm{h}) = f(a) + A\mathrm{h} + r(\mathrm{h})|\mathrm{h}|$, где $\lim\limits_{|h| \to 0} r(\mathrm{h}) = 0$ (т. е. $r(\mathrm{h}) = o(1)$ $(\mathrm{h} \to 0)$), при этом морфизм $A : \mathrm{h} \to f'(a) \cdot \mathrm{h}$ определяется единственным образом и его естественно назвать производной (или дифференциалом) функции $f(x)$ в точке $a \in G$.* Этот морфизм также обозначается символом $f'(a)$ или $df(a)$.

В конце §2 этой главы был доказан изоморфизм пространств $\mathbf{R}^1$ и $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$, поэтому производную функции f в точке a, т. е. $f'(a)$, можно считать как числом из $\mathbf{R}$ (старое определение), так и морфизмом $df(a) : \mathrm{h} \to f'(a) \cdot \mathrm{h}$ из $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^1, \mathbf{R}^1)$ (новое определение).

Рассмотрим теперь (векторную) функцию одного действительного переменного $\mathbf{f} : G \subset R \to \mathbf{R}^m$, тогда $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. Ранее мы по определению положили $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} (\mathbf{f}(a + h) - \mathbf{f}(a))/h$, так что $\mathbf{f}'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a))$ или

Старое определение. *(Векторная) функция $\mathbf{f} : G \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ называется дифференцируемой в точке $a \in G \subset \mathbf{R}$, если в a дифференцируемы все координатные функции $f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, т. е. если существует вектор $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathbf{R}^m$ и окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}$ такие, что $\forall a + h \in U(a)$ имеем $f_i(a + h) = f_i(a) + A_i h + r_i(h)|h|$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где $\lim\limits_{h \to 0} r_i(h)$ или в векторной форме $\mathbf{f}(a + h) = \mathbf{f}(a) + A \cdot h + \mathbf{r}(h)|h|$, где $\mathbf{r}(h) = (r_1(h), \ldots, r_m(h)$ и $\lim\limits_{|h| \to 0} ||\mathbf{r}(h)||_m = 0$.* Вектор $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^m$ определяется при этом единственным образом и называется производной (векторной) функции $\mathbf{f}$ в точке a : $\mathbf{A} \equiv \mathbf{f}'(a) = (f_1'(a), \ldots, f_m'(a)) \in \mathbf{R}^m$. Если ввести морфизм $\mathbf{A} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ по формуле $A : h \to \mathbf{f}'(a)h$, то можно дать иное (эквивалентное) определение.

Новое определение. *(Векторная) функция $\mathbf{f} : G \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ называется дифференцируемой в точке $a \in G \subset \mathbf{R}$, если существуют морфизм $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ и окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}$ такие, что $\forall a + h \in U(a)$ $\mathbf{f}(a + h) = \mathbf{f}(a) + A \cdot h + \mathbf{r}(h)|h|$, где $\lim\limits_{|h| \to 0} ||\mathbf{r}(h)||_m = 0$, при этом морфизм $A : h \to \mathbf{f}'(a) \cdot h$ (определяемый единственным образом), называется производной (или дифференциалом) функции $\mathbf{f}$ в точке $a \in G$ и обозначается символом $\mathbf{f}'(a)$ (или $df(a)$).*

В силу доказанного в §2 изоморфизма $\mathbf{R}^m \overset{\text{на}}{\underset{\text{вз}}{\rightleftarrows}} \mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ производную $\mathbf{f}'(a)$ (векторной) функции $\mathbf{f}$ в точке $a \in G$ можно считать как

вектором из $\mathbf{R}^m$ (старое определение), так и морфизмом $df(a) : h \to f'(a) \cdot h$ из пространства $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ (новое определение). В обоих случаях $\mathbf{R}^m = \mathbf{R}$ и $\mathbf{R}^m$ ($m \geq 2$) пространства $\mathbf{R}^m$ и $\mathfrak{L}(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ изоморфны и, в частности, имеют одну размерность m.

Перейдем теперь к определению понятия дифференцируемости отображения $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ в точке $a \in G$. В этом случае (при $n \geq 2$) размерность $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ будет $m \cdot n$, не равной размерности $\mathbf{R}^m$. Напомним, что пространство $\mathbf{R}^n$ является как векторным пространством векторов $\mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$, где $\{\mathbf{e}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – канонический базис $\mathbf{R}^n$, так и точечным аффинным пространством точек $x = (x_1, \ldots, x_n)$ (с присоединенным векторным пространством $\mathbf{R}^n$), но тогда имеет смысл запись $a + \mathbf{h} = b$ для точки $b \in \mathbf{R}^n$, являющейся концом вектора $\mathbf{h} = \mathbf{b} - \mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$ с началом в точке a и концом в точке b.

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ дифференцируемо в точке $a \in G$, если существуют линейное отображение $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такие, что $f(a+\mathbf{h}) = f(a) + A\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h})||\mathbf{h}||_n$, $\forall a+\mathbf{h} \in U(a)$, где $\lim\limits_{||h||_n \to 0} ||r(\mathbf{h})||_m = 0$, при этом морфизм $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ называют производной (или дифференциалом) отображения f в точке $a \in G$.* Запись: $A = \mathrm{D}f(a)$ или $A = df(a)$. Если отображение f дифференцируемо в точке $a \in G$, то будем писать $f \in \mathcal{D}(a)$.

З а м е ч а н и е. (Векторная) функция $\mathbf{r}(\mathbf{h}) = \dfrac{\mathbf{f}(a+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) - A\mathbf{h}}{||\mathbf{h}||_n}$ определена единственным образом при $\mathbf{h} \neq 0$. Будем считать, что $\mathbf{r} \in C(0)$, т. е. положим $\mathbf{r}(0) = 0$. Подчеркнем, что вектор $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ и для точки $a + \mathbf{h} \in U(a) \subset G$ вектор $\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) \in \mathbf{R}^m$. Поскольку $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, то $A\mathbf{h}$ есть вектор из $\mathbf{R}^m$ так, что для любой точки $a + \mathbf{h} \in U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ вектор $\mathbf{f}(a+h) - \mathbf{f}(a) - A\mathbf{h} \in \mathbf{R}^m$. Дифференцируемость отображения f в точке $a \in G \subset \mathbf{R}^n$ можно истолковать так: при фиксированной точке $a \in G$ и малом (по норме $||\,||_m$) векторе $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ вектор разности $\Delta\mathbf{f}(a) = \mathbf{f}(a+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) \in \mathbf{R}^m$ приближенно равен вектору $\mathrm{D}f(a)\mathbf{h}$ (т. е. значению морфизма $A = \mathrm{D}f(a) = df(a)$ на векторе $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$).

З а м е ч а н и е. ($f \in \mathcal{D}(a)$) $\Leftrightarrow$ (выполнено одно из двух эквивалентных утверждений:

1) $\lim\limits_{||h||_n \to 0} ||\mathbf{f}(a+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) - A\mathbf{h}_m / ||\mathbf{h}||_n = 0$;

2) существует окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такая, что в $\dot{U}(a)$ имеет место представление

$$f(a+\mathbf{h}) = f(a) + A\mathbf{h} + o(||\mathbf{h}||_n)(\mathbf{h} \to 0)).$$

О п р е д е л е н и е. *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $C \subset \mathbf{R}^n$ –*

открытое множество. Скажем, что функция f дифференцируема на G (запись: $f \in \mathcal{D}(G)$), если $f \in \mathcal{D}(x)\ \forall x \in G$.

Т е о р е м а (о единственности производной). *Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ – открытое множество, $a \in G$ и $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Если $f \in \mathcal{D}(a)$, то линейное отображение $A = \mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ из определения производной единственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что $\exists A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ такое, что $\forall a + \mathbf{h} \in U(a) \subset G$ имеет место представление $f(a+\mathbf{h}) = f(a) + A_i\mathbf{h} + \mathbf{r}_i(\mathbf{h})||\mathbf{h}||_n$, где $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} ||\mathbf{r}_i(\mathbf{h})||_m = 0$ $(i = 1, 2)$. Пусть $B = A_1 - A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Тогда для любого вектора $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^n$ $(\mathbf{X} \neq 0)$, полагая (при $t \in \mathbf{R}$) $\mathbf{h} = t \cdot \mathbf{X}$, видим, что для достаточно малых $t \neq 0$ $a + t \cdot \mathbf{X} \in U(a)$, поэтому $||B(t \cdot \mathbf{X})||_m = ||A_1(t \cdot \mathbf{X}) - A_2(t \cdot \mathbf{X})||_m = ||(\mathbf{f}(a + t \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{X}) \cdot ||t \cdot \mathbf{X}||_n) - (\mathbf{f}(a + t \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{f}(a) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{X})||t \cdot \mathbf{X}||_n)||_m = |t| \cdot ||\mathbf{X}||_n \cdot ||\mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{X})||_m$, откуда $||B(t \cdot \mathbf{X})||_m / (|t| \cdot ||\mathbf{X}||_n) = ||B\mathbf{X}||_m / ||\mathbf{X}||_n = ||\mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{X}) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{X})||_m$. Но

$$(\lim_{t\to 0} \mathbf{r}_i(t \cdot \mathbf{X}) = 0\ (i = 1, 2)) \Rightarrow (||B\mathbf{X}||_m = 0$$

$$\forall \mathbf{X} \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (||B|| = 0) \Rightarrow (B = A_1 - A_2 = 0) \Rightarrow (a_1 = A_2).$$

С л е д с т в и е. Если $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $a \in G$ и $f \in \mathcal{D}(a)$, то существует окрестность $U(a) \subset G$ такая, что $\forall x \in U(a)$ имеем $f(x) = f(a) + \mathrm{D}f(a)(\mathbf{x}-\mathbf{a}) + \mathbf{r}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \cdot ||\mathbf{x}-\mathbf{a}||_n$, где $\lim\limits_{x\to a} ||\mathbf{r}(\mathbf{x}-\mathbf{a})||_m = 0$ ($\mathbf{x} - \mathbf{a}$ есть вектор с началом в точке a и концом в точке x).

П р и м е р ы. 1) Пусть $f(x) \equiv c = \{c\} \in \mathbf{R}^m\ \forall x \in G \subset \mathbf{R}^n$ есть сужение на G постоянного отображения $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^m$. Тогда $f \in \mathcal{D}(G)$ и $\mathrm{D}c = 0$. В самом деле, $(\forall x, x + \mathbf{h} \in G) \Rightarrow (f(x + \mathbf{h}) = f(x) = c)$, т. е. $f(x+\mathbf{h}) = f(x) + o\mathbf{h}$, и в силу единственности производной имеем $\mathrm{D}c = 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, т. е. $\mathrm{D}c = 0$.

2) Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $\mathbf{f} : x \to 0 + A\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$. Тогда $\mathrm{Df}(x) = A$. В самом деле, $\forall x + \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ имеем $(\mathbf{f}(x + \mathbf{h}) = 0 + \mathbf{f}(x) + A\mathbf{h}) \Rightarrow (\mathrm{Df}(x) = A\ \forall x \in \mathbf{R}^n)$.

3) Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $f : x \to b + A\left(\sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j\right)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}^m$. Тогда $\mathrm{D}f(x) = A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. В самом деле, $(\forall x + \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n) \Rightarrow (f(x + \mathbf{h}) = f(x) + A\mathbf{h}) \Rightarrow (\exists \mathrm{D}f(x) = A)$.

4) Пусть $p_i : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ есть i-я проекция, так что для $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $p_i\mathbf{x} = x_i$, тогда $\mathrm{D}p_i = p_i \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$. (Доказать самим.)

Т е о р е м а (о непрерывности дифференцируемой функции). *Пусть $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $f \in \mathcal{D}(a)$. Тогда имеем $f \in C(a)$ и, более точно, $\exists \delta > 0$ и $c > 0$ такие, что $\forall a + \mathbf{h} \in \mathrm{Ш}_\delta(a) \subset U(a)$*

$||\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)||_m \le c||\mathbf{h}||_n$ *(таким образом, если* $f \in \mathcal{D}(a)$*, то* f *непрерывна по Липшицу в точке* a*).*

Доказательство. Поскольку $f \in \mathcal{D}(a)$, то существует морфизм $\mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ такой, что $\forall a+\mathbf{h} \in U(a) \subset \mathbf{R}^n$ имеет место представление

$$\mathbf{f}(a+\mathbf{h})-\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(a)\mathbf{h} + \mathbf{r}(\mathbf{h})\cdot||\mathbf{h}||_n,$$

где $\lim\limits_{h\to 0}||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_m = 0$, причем, как показано в §2, для морфизма $\mathrm{D}f(a)$ имеем $||\mathrm{D}f(a)|| < +\infty$. Но тогда $\forall a+\mathbf{h} \in U(a)$ имеем оценку $||\mathbf{f}(a+\mathbf{h})-\mathbf{f}(a)||_m \le (||\mathrm{D}f(a)|| + ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_m)\cdot||\mathbf{h}||_n$. Поскольку $\lim\limits_{h\to 0}||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_m = 0$, то $\forall \varepsilon_0 > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_m \le \varepsilon_0\ \forall ||\mathbf{h}||_n < \delta$, и тогда, полагая $c = ||\mathrm{D}f(a)|| + \varepsilon_0$, имеем оценку $||\mathbf{f}(a+h)-\mathbf{f}(a)||_m \le c||\mathbf{h}||_n$ $\forall a+\mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(a) \subset U(a)$ и, в частности, $f \in C(a)$.

Теорема (о существовании производной вдоль любого вектора у дифференцируемой вектор-функции). *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и* $\mathbf{l} = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j$ *– вектор из* $\mathbf{R}^n$*. Пусть* $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(a)$*, тогда существует частная производная (векторной) функции* $\mathbf{f}$ *в точке* a *вдоль вектора* $\mathbf{l}$*, причем* $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}\mathbf{f}(a)\mathbf{l}$.

Доказательство. Поскольку $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(a)$, то, полагая $\mathbf{h} = t\cdot\mathbf{l} \in \mathbf{R}^n$ при достаточно малом $t \ne 0$, имеем $a+t\cdot\mathbf{l} \in U(a)$ и тогда ввиду $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(a)$ имеем представление $\mathbf{f}(a+t\cdot l)-\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(a)(t\cdot\mathbf{l}) + \mathbf{r}(t\cdot\mathbf{l})\cdot||t\cdot\mathbf{l}||_n = t(\mathrm{D}\mathbf{f}(a)\mathbf{l} + (|t|/t)\cdot\mathbf{r}(t\cdot\mathbf{l})\cdot||\mathbf{l}||_n)$, $(\mathbf{f}(a+t\cdot\mathbf{l})-\mathbf{f}(a))/t = \mathrm{D}\mathbf{f}|(a)\mathbf{l} + (|t|/t)\cdot\mathbf{r}(t\cdot\mathbf{l})\cdot||\mathbf{l}||_n$, откуда в силу условий $||t|/t| = 1$ $(t \ne 0)$, $\lim\limits_{t\to 0}\mathbf{r}(t\cdot\mathbf{l}) = 0$ видим, что

$$\exists \lim_{t\to 0}(\mathbf{f}(a+t\cdot l)-\mathbf{f}(a))/t = \mathrm{D}f(a)\mathbf{l},$$

т. е. $\exists \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}\mathbf{f}(a)\mathbf{l}$.

Следствие (необходимое условие дифференцируемости вектор-функции в точке). Пусть $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. Если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}(a)$, то для функции $\mathbf{f}$ в точке a существуют все j-е частные производные $\mathrm{D}_j\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(a)\mathbf{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\mathbf{e}_i'$.

Теорема (о представлении производной дифференцируемой функции в координатной форме). *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и* $f \in \mathcal{D}(x)$ $(f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)))$*. Тогда производной* $\mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ *как морфизму соответствует в качестве матрицы матрица Якоби*

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Пусть $\{\mathbf{e}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ – канонический базис в $\mathbf{R}^n$ и $\{\mathbf{e}'_j\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ – канонический базис в $\mathbf{R}^m$. Поскольку $f \in \mathcal{D}(a)$, то существует морфизм $\mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Пусть (A_{ij}) $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ $m \times n$ матрица морфизма $\mathrm{D}f(a)$. Тогда из линейной алгебры имеем $\mathrm{D}f(a)\mathbf{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} A_{ij}\mathbf{e}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Но в силу необходимого условия дифференцируемости функции в точке a существуют частные производные $\mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{D}f(a)\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, так что в координатной форме имеем

$$\mathrm{D}_j f(a) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\mathbf{e}'_i \, (j = 1, 2, \ldots, n),$$

поэтому

$$\left(\sum_{i=1}^{m} A_{ij}\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\mathbf{e}'_i \, (j = 1, 2, \ldots, n)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(A_{ij} = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \, (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)\right).$$

В силу теоремы о единственности производной у дифференцируемого отображения имеем

Определение. *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. *Тогда* $f \in \mathcal{D}(a)$, *если в окрестности* $\dot{U}(a)$ *имеет место представление*

$$f_i(a + \mathbf{h}) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a) h_j +$$

$$+ o(||\mathbf{h}||_n)(\mathbf{h} \to 0)(i = 1, 2, \ldots, m); \; \mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j.$$

В частности, для числовой функции

$$f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

утверждение $f \in \mathrm{D}(a)$ означает, что в $\dot{U}(a) \subset \mathbf{R}^n$ имеет место представление

$$f(a_1, +h_1, \ldots, a_n + h_n) = f(a_1, \ldots, a_n) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a_1, \ldots, a_n)}{\partial x_j} h_j +$$

$$+ o(||\mathbf{h}||_n)(\mathbf{h} \to 0).$$

Т е о р е м а (критерий дифференцируемости (векторной) функции в точке). *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}'_i$. *Тогда*

$$(\mathbf{f} \in \mathrm{D}(a)) \Leftrightarrow (f_i \in \mathcal{D}(a)(i = 1, 2, \ldots, m)).$$

С л е д с т в и е (выражение производной вдоль вектора через частные производные). Пусть $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $\mathbf{l} = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j$ – вектор из $\mathbf{R}^n$. Пусть $\mathbf{f} \in \mathrm{D}(a)$ $\left(\text{где } \mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}'_i\right)$. Тогда

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(a)\mathbf{l} = \mathrm{D}f(a)\left(\sum_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} l_j \mathrm{D}f(a)\mathbf{e}_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a) l_j\right)\mathbf{e}'_i,$$

т. е.

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}} f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a) l_j \ (i = 1, 2, \ldots, m).$$

В частности, для числовой функции $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и орта $\mathbf{l}_0 = (\cos\alpha_1, \ldots, \cos\alpha_n)$ имеем (при $f \in \mathcal{D}(a)$)

$$\frac{\partial f(a)}{\partial l_0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} \cos\alpha_j.$$

З а м е ч а н и е. Пусть $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $f \in C(U(a))$. Тогда из существования даже всех частных производных $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ $(n \geq 2)$, вообще говоря, не следует, что $f \in \mathcal{D}(a)$.

П р и м е р (непрерывной функции, имеющей все частные производные в точке, но не дифференцируемой в точке). Пусть $f(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, $p_0 = (0, 0)$, $p = (\Delta x, \Delta y)$, тогда $f \in C(\mathbf{R}^2)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x} f(0, 0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f(\Delta x, 0) - f(0, 0))/\Delta x = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} (f(0, \Delta y) - f(0, 0))/\Delta y = 0.$$

Покажем, что $f \overline{\in} \mathcal{D}(p_0)$. Допустим от противного, что $f \in \mathcal{D}(p_0)$, тогда из единственности производной имеем представление $\Delta f(p_0) \equiv$

$f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) = 0 \cdot \Delta x + 0 \cdot \Delta y + o(\rho)$ $(\rho = ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)^{1/2} \to 0)$. Но $\Delta f(p_0) = |\Delta x \cdot \Delta y|^{1/2} \neq O(\rho)$ $(\rho \to 0)$, поскольку при $\Delta y = \Delta x$, $\rho = \sqrt{2}\Delta x$ и $|\Delta x \cdot \Delta y|^{1/2} = |\Delta x| = \rho/\sqrt{2}$, т. е.

$$(|\Delta x \cdot \Delta y|^{1/2} \neq o(\rho)(\rho \to 0)) \Rightarrow (f \overline{\in} \mathcal{D}(p_0)).$$

Т е о р е м а (достаточное условие дифференцируемости функции в точке). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *где* G – *открытое множество и* $a \in G$. *Пусть существует окрестность* $U(a) \subset G$ *такая, что* $\forall x \in U(a)$ $\exists \mathrm{D}_j f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда* $(\mathrm{D}_j f_i \in C(a)$ $\forall i, j) \Rightarrow (f \in \mathcal{D}(a))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $(f \in \mathcal{D}(a)) \Leftrightarrow (f_i \in \mathcal{D}(a)$, $(i = 1, 2, \ldots, m))$, то достаточно доказать, что $(\mathrm{D}_j f_i \in C(a)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)) \Rightarrow (f_i \in \mathcal{D}(a)$ $\forall i)$. Без ограничения общности будем считать, что $m = 1$ и $n = 2$, т. е. положим $f_i(x, y) \equiv f(x, y)$. Пусть $p_0 = (x_0, y_0)$ и $p = (x, y) \in U(p_0) \subset G \subset \mathbf{R}^2$, причем $\forall p \in U(p_0)$ $\exists \mathrm{D}_j f(p)$ и $\mathrm{D}_j f \in C(p_0)$ $(j = 1, 2)$. Тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $|\mathrm{D}_j f(p_)) - \mathrm{D}_j f(p_0)| < \varepsilon/2$ $\forall p \in \text{Ш}_\delta(p_0) \subset U(p_0) \subset G$, но $\Delta f(p_0) \equiv f(x, y) - f(x_0, y_0) = (f(x, y) - f(x, y_0)) + (f(x, y_0) - f(x_0, y_0))$. Рассмотрим при фиксированном y_0 функцию $\varphi(z) = f(z, y_0)$ на отрезке $[x_0, x]$. Поскольку $\mathrm{D}\varphi(z) = \mathrm{D}_1 f(z, y_0)$ $\forall z \in [x_0, x]$, т. е. $\varphi \in \mathcal{D}([x_0, x])$ и, в частности, $\varphi \in C([x_0, x])$, поэтому к функции $\varphi(z)$ на отрезке $[x_0, x]$ применима теорема Лагранжа о конечных приращениях. Аналогично, полагая $\psi(z) = f(x, z)$, видим, что из существования $\mathrm{D}_2 f(p)$ $\forall p \in U(p_0)$ вытекает, что $\psi \in \mathcal{D}([y_0, y])$, $\psi \in C([y_0, y])$ и $\mathrm{D}\psi(z) = \mathrm{D}_2 f(x, z)$, так что и к функции $\psi(z)$ на отрезке $[y_0, y]$ применима теорема Лагранжа о конечных приращениях. Но тогда имеем представление $\Delta f(p_0) = (y - y_0)$ $\mathrm{D}_2 f(x, y_0 + \vartheta_1(y - y_0)) + (x - x_0)\mathrm{D}_1 f(x_0 + \vartheta_2(x - x_0), y_0)$, $0 < \vartheta_i < 1$ $(i = 1, 2)$.

Положим $p_1 = (x, y_0 + \vartheta_1(y - y_0))$, $p_2 = (x_0 + \vartheta_2(x - x_0), y_0) \in \text{Ш}_\delta(p_0)$, тогда из неравенства $\rho(p_0, p_j) < \delta$ $(j = 1, 2)$ в силу выбора $\delta(\varepsilon) > 0$ имеем $|\mathrm{D}_1 f(p_0) - \mathrm{D}_1 f(p_2)| < \varepsilon/2$, $|\mathrm{D}_2 f(p_0) - \mathrm{D}_2 f(p_1)| < \varepsilon/2$, т. е.

$$|\Delta f(p_0) - (\mathrm{D}_1 f(p_0)(x - x_0) + \mathrm{D}_2 f(p_0)(y - y_0)| < \varepsilon(|x - x_0| +$$

$$+ |y - y_0|)/2 < \varepsilon\rho(p, p_0) \forall p \in \dot{\text{Ш}}_\delta(p_0) \Rightarrow (f \in \mathcal{D}(p_0)).$$

Т е о р е м а Ю н г а (достаточное условие равенства вторых смешанных частных производных у функции многих переменных). *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *причем* $\forall x \in U(a)$ *существует* $\mathrm{D}_i f(x)$ *и* $\mathrm{D}_i f \in \mathcal{D}(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. *Тогда* $\forall i, j = 1, 2, \ldots, n$ $\exists \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(a)$ *и* $\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(a) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(a)$ *при* $i \neq j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности будем считать $n = 2$ и положим $p_0 = (x_0, y_0)$, $p = (x, y) \in U(p)$, так что $\forall p \in U(p_0)$ $\exists \mathrm{D}_i f(p)$ и $\mathrm{D}_i f \in \mathrm{D}(p_0)$ $(i = 1, 2)$. Заметим сначала, что

$\forall i,j=1,2,\ldots,n\ \exists \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(p_0)$. Пусть h таково, что (x_0+h,y_0+h), $(x_0+h,y_0),(x_0,y_0+h)\in U(p_0)\subset\mathbf{R}^2$. Тогда при $\Delta x=\Delta y=h$ положим $A=f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)$. Вводя обозначения $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$, $\Delta_x f(x_0,y_0)=f(x,y_0)-f(x_0,y_0)$, $\Delta_y f(x_0,y_0)=f(x_0,y)-f(x_0,y_0)$, имеем $A=\Delta_y\Delta_x f(p_0)=\Delta_x\Delta_y f(p_0)$.

Пусть $\varphi(x_0)=f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)=\Delta_y f(x_0,y_0)$. Тогда $A=\Delta_x\Delta_y f(p_0)=\Delta_x\varphi(x_0)=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$. По теореме Лагранжа о конечных приращениях $\exists\vartheta_1\in(0,1)$ такое, что $\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)=\mathrm{D}\varphi(x_0+\vartheta_1 h)\cdot h$. Но $\mathrm{D}\varphi(x_0+\vartheta_1 h)=\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0+h)-\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0)$. Таким образом $A=(\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0+h)-\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0)h)$. Но

$$(\mathrm{D}_1 f\in\mathcal{D}(p_0))\Rightarrow(\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0+h)=\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)+$$

$$+\mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)\cdot\vartheta_1 h+\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)\cdot h+o_1(|h|)(h\to 0))$$

и

$$(\mathrm{D}_1 f(x_0+\vartheta_1 h,y_0)=\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)+\mathrm{D}_1\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)\cdot\vartheta_1 h+$$

$$+o_2(|h|)(h\to 0)),$$

поэтому

$$A=\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)h^2+(o_1(|h|)+o_2(|h|))\cdot h(h\to 0)$$

или

$$\Delta_x\Delta_y f(p_0)=\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)h^2+o_3(h^2)(h\to 0).$$

Аналогичным образом полагая $A=\Delta_y\Delta_x f(p_0)=\psi(y_0+h)-\psi(y_0)$, где $\psi(y_0)=f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)$, имеем

$$A=\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(x_0,y_0)h^2+o_4(h^2)(h\to 0),$$

т. е. при $h\neq 0$

$$(\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(x_0,y_0)h^2+o_3(h^2))=\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)h^2+$$

$$+o_4(h^2)(h\to 0))\Rightarrow(\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(x_0,y_0)=\mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x_0,y_0)).$$

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f:G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, где G – открытое множество, называется непрерывно дифференцируемым на $G\subset\mathbf{R}^n$ (запись: $f\in C^{(1)}(G)$), если (при $f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$, $\forall x\in G\ \exists\mathrm{D}_j f_i(x)$ $(i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n)$ и $\mathrm{D}_j f_i\in C(G)$ $\forall i,j$.*

Можно дать иное, не связанное с координатными функциями определение.

О п р е д е л е н и е. *Пусть $f:G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, где G – открытое множество. Пусть $f\in\mathcal{D}(G)$. Тогда отображение f называется непрерывно дифференцируемым на открытом множестве $G\subset\mathbf{R}^n$, если отображение $\mathrm{D}f:G\subset\mathbf{R}^n\to\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ $(\mathrm{D}f:x\to\mathrm{D}f(x))$ есть*

непрерывное отображение множества $G \subset \mathbf{R}^n$ *в нормированное пространство* $\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. *Итак,* $f \in C^{(1)}(G)$, *если* $\forall \varepsilon > 0$ *и* $\forall x_0 \in G$ $\exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ *такое, что* $||\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)|| < \varepsilon$ $\forall x \in \mathrm{Ш}_0(x_0) \subset G$.

Т е о р е м а (критерий непрерывной дифференцируемости функции на открытом множестве). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *где* G – *открытое множество. Тогда* $(f \in C^{(1)}(G)) \Leftrightarrow$ *(выполнены два условия:*

1) $\forall x \in G \exists \mathrm{D}_j f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $\mathrm{D}_j f_i \in C(G)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Если $f \in C^{(1)}(G)$ (в смысле второго определения), то $\forall x \in G$ существует морфизм $\mathrm{D}f(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ с матрицей Якоби $(\mathrm{D}_j f_i(x))$ $(i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n)$ при канонических базисах $\{\mathbf{e}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ в $\mathbf{R}^n$ и $\{\mathbf{e}'_j\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ в $\mathbf{R}^m$. Тогда в силу правила умножения матриц имеем $\mathrm{D}f(x)\mathbf{e}_j = \sum\limits_{i=1}^{m} \mathrm{D}_j f_i(x)\mathbf{e}'_i$, откуда $\forall i, j$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ и $\forall x, x_0 \in G \subset \mathbf{R}^n$ получаем оценки

$$|\mathrm{D}_j f_i(x) - \mathrm{D}_j f_i(x_0)| \le ||\mathrm{D}f(x)\mathbf{e}_j - \mathrm{D}f(x_0)\mathbf{e}_j||_m = ||(\mathrm{D}f(x) -$$

$$-\mathrm{D}f(x_0))\mathbf{e}_j||_m \le ||\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)|| \cdot ||\mathbf{e}_j||_n = ||\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)||$$

(поскольку $||\mathbf{e}_j||_n = 1$ в евклидовой норме $||\ ||_n$). Но тогда

$$(f \in C^{(1)}(G)) \Rightarrow (\mathrm{D}f \in C(G)) \Rightarrow (\mathrm{D}f \in C(x_0)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lim_{x \to x_0} ||\mathrm{D}f(x)\mathrm{D}f(x_0)|| = 0) \Rightarrow (\lim_{x \to x_0} |\mathrm{D}_j f_i(x) -$$

$$-\mathrm{D}_j f_i(x_0)| = 0 \forall i, j) \Rightarrow (\mathrm{D}_j f_i \in C(x_0) \forall x_0 \in G, \forall i, j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathrm{D}_j f_i \in C(G), i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Достаточность. Пусть $\mathrm{D}_j f_i \in C(G)$ $\forall i, j$, тогда, используя достаточное условие дифференцируемости функции в точке, имеем $(f_i \in \mathcal{D}(G)$ $\forall i) \Rightarrow (f \in \mathcal{D}(G))$. Далее, для матрицы Якоби $(\mathrm{D}_j f_i(x))$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ производной $\mathrm{D}f(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ имеем оценку

$$||\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)|| \le \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_j f_i(x) - \mathrm{D}_j f_i(x_0))^2 \right)^{1/2} \quad \forall x, x_0 \in G,$$

из которой $\forall i, j$ имеем

$$(\mathrm{D}_j f_i \in C(G)) \Rightarrow (\mathrm{D}_j f_i \in C(x_0)) \Rightarrow (\lim_{x \to x_0} |\mathrm{D}_j f_i(x) -$$

$$-\mathrm{D}_j f_i(x_0)| = 0; i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow (\lim_{x \to x_0} ||\mathrm{D}f(x) - \mathrm{D}f(x_0)|| = 0) \Rightarrow$$

$$(\mathrm{D}f \in C(x_0)\, \forall x_0 \in G) \Rightarrow (f \in C^{(1)}(G)).$$

Пусть $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $f \in \mathcal{D}(a)$. Тогда, пользуясь общим определением дифференцируемости отображения f из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}$, видим, что существует морфизм $df(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, который мы назвали дифференциалом функции f в точке a, такой, что $df(a) : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, и для любого вектора $\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j e_j$ такого, что $a + \mathbf{h} \in \dot{U}(a)$ имеет место представление

$$f(a + \mathbf{h}) = f(a) + fd(a)\mathbf{h} + o(||\mathbf{h}||_n)(\mathbf{h} \to 0).$$

Морфизм $df(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ есть линейная форма (линейная функция), определенная в линейном пространстве $\mathbf{R}^n$, а число

$$df(a)\mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) \cdot h_j \in \mathbf{R}$$

есть значение линейной формы на векторе $\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n$. Таким образом, дифференциал $df(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ функции f в точке a есть не число, а символ линейной формы.

Рассмотрим, в частности, линейную форму $p_j \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ (j-ю проекцию) такую, что $p_j \mathbf{x} = x_j \ \forall \mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j$. Тогда в силу ранее доказанного видим, что $p_j \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $dp_j = p_j$, поэтому имеем

$$\mathrm{D}_i p_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial x_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Следуя классическим традициям записи, положим $dp_j \equiv dx_j \ \forall j$. Тогда дифференциал (независимого переменного x_j) $dx_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ есть не число, а линейная форма $dx_j \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ такая, что

$$\left(\forall \mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n\right) \Rightarrow (dx_j(\mathbf{h}) = dp_j(\mathbf{h}) = p_j(\mathbf{h}) = h_j) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (dx_j(\mathbf{h}) = h_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)).$$

Но тогда отмеченное ранее равенство $df(a)\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) h_j$ дает возможность записать дифференциал $df(a)$ как линейную форму из

$\mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ в виде $df(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) dx_j$. Итак, первый дифференциал функции f в точке a : $df(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) dx_j$ есть не число, а символ линейной формы, определенной на векторах $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$, причем для ее значения на любом векторе $\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n$ имеем

$$df(a)\mathbf{h} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) dx_j(\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) h_j.$$

Вспоминая основное представление для функции $f \in \mathcal{D}(a)$ в окрестности $\dot{U}(a) \in \mathbf{R}^n$:

$$\Delta f(a) \equiv f(a + \mathbf{h}) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) h_j + o(||\mathbf{h}||_n)(\mathbf{h} \to 0),$$

видим, что значение дифференциала $df(a)$ на векторе $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ $df(a)\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) h_j$ есть главная (при $df(a) \not\equiv 0$) линейная часть приращения функции $f(x)$ в точке a, соответствующая приращению $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$. Итак, для $f \in \mathcal{D}(a)$ в окрестности $\dot{U}(a) \subset \mathbf{R}^n$ имеем представление $\Delta_h f(a) - df(a)\mathbf{h} = o(||\mathbf{h}||_n)$ $(\mathbf{h} \to 0)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f \in C(U(a))$, $f \in \mathcal{D}(a)$ *и* $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbf{R}^{n+m} | x \in U(a)\, y = f(x) \in \mathbf{R}^m\} \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *есть график отображения* f. *Пусть* $b = f(a) \in \mathbf{R}^m$. *Тогда касательной* n*-мерной плоскостью в* $\mathbf{R}^{n+m}$ *к графику* Γ *в точке* $(a, f(a)) \in \Gamma$ *называется аффинное подпространство с уравнением* $y = f(a) + \mathrm{D}f(a)(\mathbf{x} - \mathbf{a})$ *или в координатной форме*

$$y_i = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a)(x_j - a_j)\, (i = 1, 2, \ldots, m).$$

П р и м е р. Пусть $\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | (x, y) \in U((x_0, y_0)),$ $z = fx, y)\}$ - график функции $f : U((x_0, y_0)) \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^1$ и $f \in \mathcal{D}((x_0, y_0))$, $f \in C(U)$. Тогда уравнение касательной плоскости к Γ в точке $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \Gamma$ имеет вид $z = L(x, y)$, где

$$L(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Далее, поскольку $f \in \mathcal{D}((x_0, y_0))$, то в окрестности $\dot{U}((x_0, y_0)) \subset \mathbf{R}^2$ имеем $f(x, y) - L(x, y) = o(\rho(p, p_0))$ $(p = (x, y) \to p_0 = (x_0, y_0))$, это

представление является геометрической характеристикой касательной плоскости. Заметим, что частная производная $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x_0, y_0)$ есть угловой коэффициент касательной прямой к графику $\Gamma_1 = \Gamma \cap \{y = y_0\}$ функции $g_1 : x \to f(x, y_0)$ в точке $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \Gamma_1$. Аналогичный смысл имеет и частная производная $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0, y_0)$.

Пример. Пусть $f : (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ $(x \to (y(x), z(x))$ $x \in (\alpha, \beta))$. Тогда касательная прямая к графику

$$\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \,|\, y = y(x), z = z(x), x \in (\alpha, \beta)\}$$

этого отображения f в точке $(a, y(a), z(a)) \in \Gamma$ имеет уравнения

$$\begin{cases} y - y(a) = y'(a)(x - a), \\ z - z(a) = z'(a)(x - a). \end{cases}$$

Рассмотрим числовую функцию $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $f \in \mathcal{D}(a)$. Тогда $\mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ есть линейная форма. Рассмотрим $\mathbf{R}^n$ как евклидово пространство, тогда существует вектор $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^n$ такой, что $\mathrm{D}f(a)\mathbf{h} = (\mathbf{l}, \mathbf{h})$ $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$. В самом деле, $\mathrm{D}f(a)\mathrm{h} = \mathrm{D}_h f(a)$, где $\mathrm{D}_h f(a)$ – производная функции f вдоль вектора $\mathbf{h}$ в точке a, но тогда в каноническом базисе $\{\mathbf{e}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ для $\mathbf{R}^n$ имеем $\mathrm{D}_h f(a) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a) h_j$, откуда получаем $\mathrm{D}f(a)\mathbf{h} = (\mathbf{l}, \mathbf{h})$, где $\mathbf{l} = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a)\mathbf{e}_j$. Используя канонический базис в $\mathbf{R}^n$, положим $\mathbf{l} \equiv grad\, f(a)$, тогда

$$grad\, f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) \cdot \mathbf{e}_j \equiv \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(a)}{\partial x_n} \right),$$

$$\mathrm{D}f(a)\mathbf{h} = (grad\, f(a), \mathbf{h})\, \forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n.$$

Попутно заметим, что если $\mathbf{e} = \sum\limits_{j=1}^{n} \cos\alpha_j \mathbf{e}_j$ есть орт в $\mathbf{R}^n$ и $f \in \mathrm{D}(\mathbf{R}^n)$, то для производной функции $f(x)$ по направлению $\mathbf{e}$ (вдоль вектора $\mathbf{e}$) имеем

$$\mathrm{D}_{\mathbf{e}} f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \cos\alpha_j = (grad\, f(x), \mathbf{e}).$$

В частности, модуль производной функции $f(x)$ по направлению $\mathbf{e}$: $\left|\dfrac{\partial f(x)}{\partial \mathbf{e}}\right| = |grad\, f(x), \mathbf{e})| \geq 0$ имеет максимальное значение при $\mathbf{e} = \lambda \cdot grad\, f(x)$ (т. е. направление вектора градиента $grad\, f(x)$ есть направление наибольшего изменения функции $f(x)$) и равно нулю,

если орт $\mathbf{e}$ ортогонален вектору градиента. Заметим, что линейной форме $df(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) dx_j \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ можно поставить вектор $grad\, f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(A)\mathbf{e}_j$, получающийся формальной заменой (в $df(a)$) линейной формы dx_j на орт $\mathbf{e}_j$.

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ (где G - открытое множество) слабо дифференцируемо (по Гато) в точке $a \in G$, если существует линейное отображение $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такие, что $\forall a + t\mathbf{h} \in U(a)$ имеет место представление $f(a+t\mathbf{h}) = f(a) + t \cdot A\mathbf{h} + t \cdot \mathbf{r}(t \cdot \mathbf{h})$, где $\lim\limits_{t \to 0} ||\mathbf{r}(t \cdot \mathbf{h})|| = 0$, при этом морфизм $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ называется производной Гато (или слабой производной) отображения f в точке $a \in G$.*

Запись: $f \in \mathrm{D}_G(a)$, $A = \mathrm{D}_G f(a)$.

З а м е ч а н и е. Векторная функция

$$\mathbf{r}(t \cdot h) = \frac{\mathbf{f}(a + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) - t \cdot A\mathbf{h}}{t} \in \mathbf{R}^m$$

определена однозначно при $t \neq 0$. Будем считать, что $\mathbf{r} \in C(0)$, положив $\mathbf{r}(0 \cdot \mathbf{h}) = \mathbf{0} \in \mathbf{R}^m$.

З а м е ч а н и е. $(f \in \mathrm{D}_G(a)) \Rightarrow$ (выполнено одно из двух эквивалентных утверждений:

1) $\lim\limits_{t \to 0} \frac{||\mathbf{f}(a + t\mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) - t \cdot A\mathbf{h}||_m}{t} = 0$

2) существует окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такая, что $\forall a + t\mathbf{h} \in U(a)$ имеет место представление

$$f(a + t\mathbf{h}) = f(a) + t \cdot A\mathbf{h} + \mathbf{o}(t \cdot \mathbf{h})\ (t \to 0)$$

$$(\mathbf{o}(t \cdot \mathbf{h}) = t \cdot \mathbf{o}(1)\ (t \to 0)).$$

З а м е ч а н и е. Если $f \in \mathrm{D}_G(a)$, то для любого вектора $\mathbf{l} = \sum\limits_{j=1}^{n} l_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n$ существует производная вектор-функции $\mathbf{f}$ вдоль вектора $\mathbf{l}$

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{\mathbf{f}(a + t \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{f}(a)}{t},$$

причем

$$\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}_G f(a)\mathbf{l},$$

где $\mathrm{D}_G f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ - производная Гато.

З а м е ч а н и е. Из того, что отображение $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ имеет для любого вектора $\mathbf{l} \in \mathbf{R}^n$производную вдоль этого вектора $\mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a)$, вообще говоря, не следует, что $f \in \mathrm{D}_G(a)$ по Гато, так как, хотя производная $\mathrm{D}_{\mathbf{l}} f(a)$ однородна (по $\mathbf{l}$) (т. е. $\mathrm{D}_{\lambda\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) = \lambda \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(\mathbf{a})$

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$), но аддитивности (по l) $\mathrm{D}_{\mathbf{l}+\mathbf{h}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{l}}\mathbf{f}(a) + \mathrm{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{f}(a)$ $\forall \mathbf{l}, \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ может и не быть.

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f(0,0) = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$$

и если бы $f \in \mathrm{D}_C((0,0))$, то имели бы $\mathrm{D}_C f(0,0) \equiv 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^1)$ и, в частности, $\mathrm{D}_l f(0,0) = \mathrm{D}_C f(0,0) \equiv 0$. Однако $\mathrm{D}_l f(0,0) = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(t \cdot l_1, t \cdot l_2)}{t} = \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{t^3(l_1^3 - 3l_1 l_2^2)}{t^3(l_1^2 + l_2^2)} = \dfrac{l_1^3 - 3l_1 l_2^2}{l_1^2 + l_2^2} \neq 0$ при $l_1 \neq 0$.

Теорема (о единственности производной Гато). *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где G – открытое множество и $a \in G$. Если $f \in \mathrm{D}_C(a)$, то линейное отображение $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ из определения производной Гато единственно.*

Доказательство. Допустим, что $\exists A_1, A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и окрестность $U(a) \subset G$ такие, что $\forall a + t \cdot \mathbf{h} \in U(a) \subset G$ имеет место представление

$$f(a + t \cdot \mathbf{h}) = f(a) + t \cdot A_i \mathbf{h} + t \cdot \mathbf{r}_i(t \cdot \mathbf{h}) \; (i = 1, 2),$$

где $\lim\limits_{t \to 0} ||\mathbf{r}_i(t \cdot \mathbf{h})||_m = 0$ $(i = 1, 2)$.

Пусть $B = A_1 - A_2 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Тогда для любого вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ $(\mathbf{x} \neq \mathbf{0})$ видим, что при достаточно малых $t \neq 0$ имеем $a + t \cdot \mathbf{x} \in U(a)$ и поэтому

$$\begin{aligned} ||B(t \cdot \mathbf{x})||_m &= ||A_1(t \cdot \mathbf{x}) - A_2(t \cdot \mathbf{x})||_m = \\ &= ||(\mathbf{f}(a + t \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{f}(a) - t \cdot \mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{x})) - \\ &- (\mathbf{f}(a + t\mathbf{x}) - \mathbf{f}(a) - t \cdot \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{x}))||_m = \\ &= |t| \cdot ||\mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{x})||_m, \end{aligned}$$

откуда

$$\frac{||B(t \cdot \mathbf{x})||_m}{|t|} = ||B\mathbf{x}||_m = ||\mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{x})||_m.$$

Но

$$\lim_{t \to 0} ||\mathbf{r}_1(t \cdot \mathbf{x}) - \mathbf{r}_2(t \cdot \mathbf{x})||_m = 0,$$

т. е. $||B\mathbf{x}||_m = 0$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ и поэтому $B \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, так что $(B = A_1 - A_2 = 0) \Rightarrow (A_1 = A_2)$.

Замечание. Если $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $f \in \mathrm{D}_C(a)$, то из этого, вообще говоря, не следует, что $f \in C(a)$.

Пример.

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ при } y = x^2,\ x \neq 0 \\ 0 \text{ для остальных } (x,y) \in \mathbf{R}^2. \end{cases}$$

Тогда $f(0,0) = 0$ и $f \overline{\in} C((0,0))$. Однако при достаточно малых t имеем $f(tl_1, tl_2) = 0$, причем $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ и $\forall \mathbf{l} \in \mathbf{R}^2$ $\exists \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(tl_1, tl_2)}{t} = 0$, т. е. $\exists \mathrm{D}_C f(0,0) = 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^1)$ $(f(tl_1, tl_2) = f(0,0) + t \cdot (ol_1 + ol_2) + t \cdot o(1)$ $(t \to 0)$, где $t \cdot o(1) \equiv 0$ $\forall t \neq 0)$, т. е. $f \in \mathrm{D}_C((0,0))$.

Следствие. Если $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где G – открытое множество, $a \in G$ и $f \in \mathrm{D}_C(a)$, то существует окрестность $U(a) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такая, что $\forall a + t \cdot \mathbf{h} \in U(a)$ имеет место представление

$$f(a + t\mathbf{h}) = f(a) + t \cdot \mathrm{D}_C f(a)\mathbf{h} + \mathbf{o}(t \cdot \mathbf{h})\ (t \to 0),$$

где $\mathrm{D}_C f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ – производная Гато.

Следствие (необходимое условие существования производной Гато). Если $f \in \mathrm{D}_C f(a)$, то $\forall j = 1, \ldots, n$ $\exists \dfrac{\partial \mathbf{f}(a)}{\partial x_j} = \mathrm{D}_C f(a)\mathbf{e}_j = \mathrm{D}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{f}(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\mathbf{e}_i'$ и тогда производной Гато $\mathrm{D}_C f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ как морфизму соответствует матрица Якоби $(\mathrm{D}_j f_j(a)) \in M_{m\times n}$ при $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_j(x)\mathbf{e}_i'$.

В самом деле, поскольку $\exists \mathrm{D}_C f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, то морфизму $\mathrm{D}_c f(a)$ соответствует матрица $(A_{i,j}) \in M_{m\times n}$, для которой

$$\mathrm{D}_C f(a)\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^{m} A_{ij}\mathbf{e}_j'.$$

Но $\mathrm{D}_C f(a)\mathbf{e}_j = \mathrm{D}_{\mathbf{e}_j}\mathbf{f}(a) = \dfrac{\partial \mathbf{f}(a)}{\partial x_j} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \cdot \mathbf{e}_j$, откуда $A_{ij} = \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ $\forall j = 1, \ldots, n;\ i = 1, \ldots, m$, так что морфизму $\mathrm{D}_C f(a)$ (производной Гато) соответствует матрица Якоби.

Теорема. *Если $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $f \in \mathrm{D}(a)$ в смысле Фреше, то $f \in \mathrm{D}_C(a)$ в смысле Гато и $\mathrm{D}f(a) = \mathrm{D}_C f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (с матрицей Якоби).*

В самом деле, поскольку $f \in \mathrm{D}(a)$ (в смысле Фреше), то $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ имеем, в частности, $\forall a + t \cdot \mathbf{h} \in \dot{U}(a)$ представление

$$\mathbf{f}(a + t \cdot \mathbf{h}) - \mathbf{f}(a) = t\mathrm{D}f(a)\mathbf{h} + \mathbf{o}(t \cdot \mathbf{h})\ (t \to 0),$$

что и означает дифференцируемость отображения f в точке $a \in G$ в смысле Гато, причем в силу единственности производной Гато имеем $\mathrm{D}_C f(a) \equiv \mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ (с матрицей Якоби) и $\mathrm{D}_{\mathbf{h}}\mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(a)\mathbf{h} \equiv \mathrm{D}_C f(a)\mathbf{h} = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial f_i(a)}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i'$, (где $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}_i'$).

В силу теоремы единственности слабой производной и замечания о представлении производной Гато $\mathrm{D}_C f(a)$ в координатной форме имеем

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. *Тогда* $f \in \mathrm{D}_C(a)$, *если в окрестности* $\dot{U}(a) \subset \mathbf{R}^n$ *имеет место представление* $\forall a + t \cdot \mathbf{h} \in \dot{U}(a)$

$$f_i(a + t \cdot \mathbf{h}) = f_i(a) + t \cdot \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a) h_j + t \cdot o_i(1)\ (t \to 0),\ i = 1, \ldots, m.$$

В частности, для числовой функции $f : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ утверждение $f \in \mathrm{D}_C(a)$ означает, что $\forall a + t \cdot \mathbf{h} \in \dot{U}(a) \subset \mathbf{R}^n$ имеет место представление

$$f(a_1 + th_1, \ldots, a_n + th_2) = f(a_1, \ldots, a_n) + t \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j + t \cdot o(1)\ (t \to 0).$$

Т е о р е м а (критерий слабой дифференцируемости вектор-функции). *Пусть* $\mathbf{f} : U(a) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *где* $\mathbf{f}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)\mathbf{e}_i'$. *Тогда* $(\mathbf{f} \in \mathrm{D}_C(a)) \Leftrightarrow (f_i \in \mathrm{D}_C(a)\ \forall i = 1, \ldots, m)$.

З а м е ч а н и е. Ранее была доказана теорема о связи производной Фреше и производной Гато: $(f \in \mathrm{D}(a)$ в смысле Фреше$) \Rightarrow (f \in \mathrm{D}_C(a)$ в смысле Гато, причем $\mathrm{D}_C f(a) = \mathrm{D}f(a) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Обратное утверждение $(f \in \mathrm{D}_C(a)) \Rightarrow (f \in \mathrm{D}(a))$, вообще говоря, неверно.

П р и м е р.

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^4 + y^2},\ x^2 + y^2 > 0 \\ 0,\ x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $f(0,0) = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0$ и при $\mathbf{h} = h_1\mathbf{e}_1 + h_2\mathbf{e}_2$ имеем

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(th_1, th_2) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 \cdot h_1^3 h_2}{t^2(t^2 h_1^4 + h_2^2) \cdot t} = 0,$$

т. е. $f \in \mathrm{D}_C(0,0)$ и $\mathrm{D}_C f(0,0) = 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$. Однако $f \overline{\in} \mathrm{D}(0,0)$, так как при $y = x^2$ имеем

$$f(x, y) - f(0,0) = \frac{x^5}{2x^4} = \frac{x}{2} \neq o(\sqrt{x^2 + y^2}) \equiv o(|x| \cdot \sqrt{1 + x^2})\ (x \to 0),$$

т. е.

$$f(x,y)-(f(0,0)+o\cdot x+o\cdot y)\equiv\frac{x^3y^2}{x^2+y^2}\neq o(\sqrt{x^2+y^2})\,(\sqrt{x^2+y^2}\to 0).$$

Замечание. Теорема о производной сложной функции для слабых производных, вообще говоря, неверна.

Пример.

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2},\ x^2+y^2>0\\ 0,\ x^2+y^2=0,\end{cases}$$

где $g(0,0)=\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}=0$, $g\in C((0,0))\wedge \mathrm{D}_C((0,0))$, причем $\mathrm{D}_C g(0,0)\equiv 0\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R})$ (как было показано выше). Пусть $\mathbf{f}: t\to t\cdot\mathbf{e}_1+t^2\cdot\mathbf{e}_2\equiv x(t)\mathbf{e}_1+y(t)\mathbf{e}_2$, так что $\dfrac{dx(t)}{dt}=1$, $\dfrac{dy(t)}{dt}=2t$.

Тогда для сложной функции $F=g\circ f: t\to\dfrac{t^5}{2t^4}=\dfrac{t}{2}$ видим, что $\exists\mathrm{D}F(t)=\dfrac{1}{2}\ \forall t$. Однако формула (из теоремы о производной сложной функции) дает $\dfrac{dF(0)}{dt}=\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x}\cdot\dfrac{dx(0)}{dt}+\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y}\cdot\dfrac{dy(0)}{dt}=0\cdot 0+0\cdot 2t|_{t=0}=0\neq\dfrac{1}{2}$.

Теорема (достаточное условие сильной дифференцируемости). *Пусть $f: G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, где G – открытое множество, $x_0\in G$ и $\exists U(x_0)\subset G$ такая, что $f\in\mathrm{D}_C(x)\ \forall x\in U(x_0)\subset G$ (так что $\exists\mathrm{D}_C f(x)\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$ (с матрицей Якоби) $\forall x\in U(x_0)$) и $\mathrm{D}_C f\in C(x_0)$ (т. е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\text{Ш}(x_0)\subset U(x_0)$ такой, что $||\mathrm{D}_C f(x)-\mathrm{D}_C f(x_0)||<\varepsilon\ \forall x\in\text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$. Тогда $f\in\mathrm{D}(x_0)$ в смысле Фреше и $\mathrm{D}f(x_0)=\mathrm{D}_C f(x_0)$.*

Доказательство. Поскольку ($f\in\mathrm{D}(a)$ или $f\in\mathrm{D}_C(a)\Leftrightarrow(f_i\in\mathrm{D}(a)$, $i=1,\dots,m$ или $f_i\in\mathrm{D}_C(a)$, $i=1,\dots,m$), то достаточно рассмотреть случай $m=1$, полагая $f: G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$. Итак, $f\in\mathrm{D}_C(x)\ \forall x\in U(x_0)\subset G\subset\mathbf{R}^n$, причем $\mathrm{D}_C f\in C(x_0)$, т. е. $||\mathrm{D}_C f(x)-\mathrm{D}_C f(x_0)||<\varepsilon\ \forall x\in\text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\subset U(x_0)$.

Пусть $x_0+\mathbf{h}\in\text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)\subset U(x_0)$. Введем функцию

$$\omega(x_0,\mathbf{h})=f(x_0+\mathbf{h})-f(x_0)-\mathrm{D}_C f(x_0)\mathbf{h}.$$

Нужно доказать, что

$$\omega(x_0,\mathbf{h})=o(||\mathbf{h}||_n)\,(||\mathbf{h}||_n\to 0).$$

Введем числовую функцию $F(t) = f(x_0 + t \cdot \mathbf{h})$ на отрезке $[0,1]$. Тогда имеем $F(1) = f(x_0 + \mathbf{h})$, $F(0) = f(x_0)$, причем, поскольку $f \in \mathrm{D}_C(x)\ \forall x \in \text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \subset U(x_0)$, то $\forall t \in [0,1]\ \exists \dfrac{dF(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{f(x_0 + (t+\Delta t)\cdot \mathbf{h}) - f(x_0 + t\cdot \mathbf{h})}{\Delta t} = \mathrm{D}_C f(x_0 + t\cdot \mathbf{h})\mathbf{h}$, т. е. $F \in \mathrm{D}([0,1])$ и, в частности, $F \in C([0,1])$. Но тогда в силу теоремы Лагранжа (о конечных приращениях) $\exists \vartheta \in (0,1)$ такое, что $F(1) - F(0) = \dfrac{dF(\vartheta)}{dt} \equiv \mathrm{D}_C f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h})\mathbf{h}$, что дает равенство $\omega(x_0, \mathbf{h}) = [\mathrm{D}_C f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}) - \mathrm{D}_C f(x_0)]\,\mathbf{h}$, где $\mathrm{D}_C f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}) - \mathrm{D}_C f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, причем в силу выбора $\text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0)$ при $x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}$, $x_0 \in \text{Ш}_{\delta(\varepsilon)}(x_0) \subset U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ имеем оценку $|\omega(x_0, \mathbf{h})| \leq ||\mathrm{D}_C f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}) - \mathrm{D}_C f(x_0)|| \cdot ||\mathbf{h}||_n < \varepsilon \cdot ||\mathbf{h}||_n$, т. е. $\omega(x_0\mathbf{h}) = 0\ (||\mathbf{h}||_n)\ (||\mathbf{h}||_n \to 0)$, что и означает существование производной Фреше

$$\mathrm{D} f(x_0) \equiv \mathrm{D}_C f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$$

в силу теоремы единственности для сильной производной.

§ 4. Теорема о производной сложной функции и ее следствия

Т е о р е м а (о производной сложной функции). *Пусть* $f : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и* $y_0 = f(x_0) \in \mathbf{R}^m$. *Пусть* $g : V(y_0) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, *где* $f(U(x_0)) \subset V(y_0) \subset \mathbf{R}^m$. *Пусть* $f \in \mathcal{D}(x_0)$ *и* $g \in \mathcal{D}(y_0)$. *Тогда для композиции* $F = g \circ f : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ *имеем* $F \in \mathcal{D}(x_0)$, *причем* $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и $U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$, то в силу липшицевости функции f в точке x_0 видим, что существуют окрестность $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset U(x_0)$ и постоянная $c > 0$ такие, что

$$||\mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_0)||_m \leq c \cdot ||\mathbf{h}||_n$$

$$\forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset U(x_0).$$

Положим $f(x_0 + \mathbf{h}) = y_0 + \mathbf{k}$, где $\mathbf{k} = \mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_0) \in \mathbf{R}^m$, тогда $||\mathbf{k}||_m \leq c||\mathbf{h}||_n\ \forall ||\mathbf{h}||_n < \delta$ и, в частности, $\lim\limits_{||\mathbf{h}||_n \to 0} ||\mathbf{k}||_m = 0$. Кроме того, поскольку $f(U(x_0)) \subset V(y_0) \subset \mathbf{R}^m$, то $f(x_0 + \mathbf{h}) \in V(y_0) \subset \mathbf{R}^m$, так что $F(x_0 + \mathbf{h}) = g(f(x_0 + \mathbf{h})) = g(y_0 + \mathbf{k})\ \forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset U(x_0)$. Поскольку $f \in \mathcal{D}(x)$, то

$$\exists \mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m) \text{ и } ||\mathrm{D}f(x_0)|| < +\infty.$$

Аналогично

$$(g \in \mathcal{D}(y_0)) \Rightarrow (\exists \mathrm{D}g(y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p) \text{ и } ||\mathrm{D}g(y_0)|| < +\infty),$$

причем $\mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$. Но тогда

$$\forall x_0 + \mathbf{h} \in \dot{\amalg}_\delta(x_0) \subset U(x_0)$$

имеем

$$||\mathbf{F}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(x_0) - (\mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0))\mathbf{h}||_p / ||\mathbf{h}||_n =$$

(поскольку $\mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_0) = \mathrm{D}f(x_0)\mathbf{h} + \alpha(\mathbf{h}) \cdot ||\mathbf{h}||_n$, где

$$\lim_{||\mathbf{h}||_n \to 0} ||\alpha(\mathbf{h})||_m = 0) = ||\mathbf{g}(y_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(y_0) -$$

$$-\mathrm{D}g(y_0)(\mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x_0) + \alpha \cdot ||\mathbf{h}||_n)||_p / ||\mathbf{h}||_n =$$

$$= ||\mathbf{g}(y_0 + \mathbf{k}) - \mathbf{g}(y_0) - \mathrm{D}g(y_0)\mathbf{k} + \mathrm{D}g(y_0)(\alpha(\mathbf{h}) \cdot ||\mathbf{h}||_n)||_p / ||\mathbf{h}||_n =$$

(но $g \in \mathcal{D}(y_0)$, т. е. $\mathbf{g}(y_0 + k) - \mathbf{g}(y_0) = \mathrm{D}g(y_0)\mathbf{k} +$

$$+\beta(\mathbf{k}) \cdot ||\mathbf{k}||_m, \text{ где } \lim_{||\mathbf{k}||_m \to 0} ||\beta(\mathbf{k})||_p = 0) =$$

$$= ||\beta(\mathbf{k}) \cdot ||\mathbf{k}||_m + \mathrm{D}g(y_0)(\alpha(\mathbf{h}) \cdot ||\mathbf{h}||_n)||_p / ||\mathbf{h}||_n \leq I_1(\mathbf{h}) + I_2(\mathbf{h}),$$

где $||\mathbf{k}||_m \leq c||\mathbf{h}||_n$,

$$0 \leq I_1(\mathbf{h}) = ||\beta(\mathbf{k}) \cdot ||\mathbf{k}||_m||_p / ||\mathbf{h}||_n \leq$$

$$\leq ||\beta(\mathbf{k})||_p \cdot ||\mathbf{k}||_m / ||\mathbf{h}||_n \leq c \cdot ||\beta(\mathbf{k})||_p,$$

и поскольку

$$\lim_{||h||_n \to 0} ||\mathbf{k}||_m = 0, \text{ то } \lim_{||h||_n \to 0} ||\beta(\mathbf{k})||_p = \lim_{||\mathbf{k}||_m \to 0} ||\beta(\mathbf{k})||_p = 0,$$

т. е. $\lim\limits_{||h||_n \to 0} I_1(\mathbf{h}) = 0$. Далее, $0 \leq I_2(\mathbf{h}) =$

$$= ||\mathrm{D}g(y_0)(\alpha(\mathbf{h}) \cdot ||\mathbf{h}||_n)||_p / ||\mathbf{h}||_n \leq ||\mathrm{D}g(y_0)\alpha(\mathbf{h})||_p \leq$$

$$\leq ||\mathrm{D}g(y_0)|| \cdot ||\alpha(h)||_m, \text{ но}$$

$$(\lim_{||h||_n \to 0} ||\alpha(h)||_m = 0) \Rightarrow (\lim_{||h||_n \to 0} I_2(\mathbf{h}) = 0).$$

Таким образом, существует морфизм $\mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ такой, что

$$\lim_{||h||_n \to 0} ||\mathbf{F}(x_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{F}(x_0) - (\mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0)\mathbf{h}||_p / ||\mathbf{h}||_n = 0,$$

т. е. $F \in \mathcal{D}(x_0)$ и в силу единственной производной

$$\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p).$$

Замечание. Если ввести дифференциальные обозначения $y = f(x)$, $z = g(y)$, $\mathbf{dx} = (dx_1, \dots, dx_n)$, $\mathbf{dy} = (dy_1, \dots, dy_m)$, $\mathbf{dz} = (dz_1, \dots, dz_p)$, то имеем $\mathbf{dy} = \mathrm{D}f(x)\mathbf{dx}$, $\mathbf{dz} = \mathrm{D}g(y)\mathbf{dy}$ и тогда (из теоремы о сложной функции) видим, что дифференциал сложной функции $F = g \circ f$ получается из дифференциала функции g, если заменить y на $f(x)$ и $\mathbf{dy}$ на дифференциал $\mathrm{D}f(x)\mathbf{dx}$, т. е. $\mathbf{dz} = \mathrm{D}F(x)dx = \mathrm{D}g(f(x))(\mathrm{D}f(x)\mathbf{dx})$.

Замечание. Поскольку $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0)$, где $\mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, R^m)$ и $\mathrm{D}g(y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^p)$, то матрица Якоби для морфизма $\mathrm{D}F(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^p)$ есть $p \times n$ матрица $(\mathrm{D}_j F_l(x_0))$ $(l = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n)$. Она получается как произведение матриц Якоби $(\mathrm{D}_i g_l(y_0))$ $(l = 1, \dots, p; i = 1, \dots, m)$ и $(\mathrm{D}_j f_i(x_0))$ $(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$ $y_0 = f(x_0)$, т. е.

$$p\begin{pmatrix} & & \overset{m}{} & \\ \mathrm{D}_1 g_1(y_0) & \dots & \mathrm{D}_m g_1(y_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{D}_1 g_p(y_0) & \dots & \mathrm{D}_m g_p(y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \overset{n}{} & \\ \mathrm{D}_1 f_1(x_0) & \dots & \mathrm{D}_n f_1(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{D}_1 f_m(x_0) & \dots & \mathrm{D}_n f_m(x_0) \end{pmatrix} m =$$

$$= \begin{pmatrix} & & \overset{n}{} & \\ \mathrm{D}_1 F_1(x_0) & \dots & \mathrm{D}_n F_1(x_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathrm{D}_1 F_p(x_0) & \dots & \mathrm{D}_n F_p(x_0) \end{pmatrix} p$$

где $\mathrm{D}_j F_l(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}_i g_l(y_0) \cdot \mathrm{D}_j f_i(x_0)$ $(l = 1, 2, \dots, p, j = 1, 2, \dots, n)$. Последнюю формулу можно записать короче, вводя не совсем корректные, но очень удобные обозначения: пусть

$$f : x \to y(x) = (y_1(x), \dots, y_m(x)),\ g : y \to z(y) =$$
$$= (z_1(y), \dots, z_p(y)),$$
$$F = g \circ f : x \to z(y(x)) = (z_1(y(x)), \dots, z_p(y(x))),$$

тогда

$$\frac{\partial z_l}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j}\ (l = 1, 2, \dots, p; j = 1, 2, \dots, n).$$

Если $n = m = p$, то якобиан сложной функции $F = g \circ f$ в точке x_0 равен произведению якобиана отображения f в точке x_0 на якобиан отображения g в точке $y_0 = f(x_0)$, т. е.

$$\frac{\mathrm{D}(z_1, \ldots, z_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_u)} = \frac{\mathrm{D}(z_1, \ldots, z_n)}{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\mathrm{D}(y_1, \ldots, y_n)}{\mathrm{D}(x_1, \ldots, x_n)}.$$

Следствие 1 (цепное правило вычисления частных производных сложной функции). Пусть $f : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ и $f \in \mathcal{D}(x_0)$. Пусть $g : V(y_0) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$, где $f(U(x_0)) \subset V(y_0) \subset \mathbf{R}^m$, $y_0 = f(x_0)$ и $g \in \mathcal{D}(y_0)$. Тогда сложная функция $F = g \circ f : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $F(x) = g(f_1(x), \ldots, f_m(x))$ дифференцируема в точке x_0 ($F \in \mathcal{D}(x_0)$) и

$$\mathrm{D}_j F(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}_i g(y_0) \cdot \mathrm{D}_j f_i(x_0) \; (j = 1, \ldots, n),$$

или

$$\frac{\partial F(x_0)}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(y_0)}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial f_i(x_0)}{\partial x_j} \; (j = 1, 2, \ldots, n),$$

или

$$\frac{\partial z}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \; (j = 1, 2, \ldots, n),$$

Следствие 2 (теорема о полной производной сложной функции). *Пусть $f : I \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ и $f \in \mathcal{D}(x_0)$, $x_0 \in I = (a, b) \subset (-\infty, +\infty)$. Пусть $g : V(y_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $f(I) \subset V(y_0) \subset \mathbf{R}^n$, $y_0 = f(x_0)$ и $g \in \mathcal{D}(y_0)$. Тогда сложная функция $F = g \circ f : (a, b) \to \mathbf{R}$ дифференцируема в точке x_0 ($F \in \mathcal{D}(x_0)$), причем*

$$\mathrm{D}F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i g(y_0) \mathrm{D} f_i(x_0)$$

или

$$\frac{d}{dx} F(x_0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g(y_0)}{\partial y_i} \cdot \frac{df_i(x_0)}{dx}, \; \frac{dz}{dx} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{dy_i)}{dx}.$$

Замечание. В теореме о производной сложной функции важно, что $F = g \circ f$ есть композиция дифференцируемых функций f и g. Одного существования частных производных у функций f и g недостаточно для справедливости формулы $\mathrm{D}F(x_0) = \mathrm{D}g(y_0) \circ \mathrm{D}f(x_0)$.

Пример. Пусть $F(t) = (g \circ f)(t)$, где $f(t) = (t, t)$ и

$$g(x, y) = \begin{cases} x^2 \cdot y/(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 > 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, $\dfrac{\partial g(0,0)}{\partial x} = \dfrac{\partial g(0,0)}{\partial y} = 0$ и $f_1'(0) = f_2'(0) = 1$, при этом $(F(t) = t^3/2t^2) \Rightarrow (F(t) = t/2) \Rightarrow (F'(0) = 1/2)$. Вычисление же по формуле теоремы о производной сложной функции дает неверный результат

$$F'(0) = \frac{\partial}{\partial x} g(0,0) f_1'(0) + \frac{\partial}{\partial y} g(0,0) f_2'(0) =$$

$$= 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0 \neq 1/2.$$

Все дело в том, что функция $g(x,y)$ не дифференцируема в точке $(0,0)$. В самом деле, $g(\Delta x, \Delta y) - g(0,0) = (\Delta x)^2 \Delta y / ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2) = r(\mathrm{h})$ при $\mathrm{h} = (\Delta x, \Delta y)$. Но при $\Delta y = \Delta x$, $\rho = \sqrt{2} \cdot |\Delta x|$, т. е. $r(\mathrm{h}) = \Delta x/2 \neq o(\rho)$ $(\rho \to 0)$.

Т е о р е м а (о линейности дифференцирования). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *и* g $G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *где* G *– открытое множество. Пусть* $f, g \in \mathcal{D}(x)$, $x \in G$. *Тогда* $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *имеем* $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathcal{D}(x)$, $f \cdot g \in \mathcal{D}(x)$, *причем*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha \cdot f + \beta \cdot g) = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + \beta \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}, \ \frac{\partial}{\partial x_i}(f \cdot g) =$$

$$= f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

и

$$d(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \cdot df(x) + \beta \cdot dg(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}),$$
$$d(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot dg(x) + g(x) \cdot df(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f, g \in \mathcal{D}(x)$, то $\exists \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \dfrac{\partial g(x)}{\partial x_i}$ $\forall i$ и равенства для частных производных функций $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ и $f \cdot g$ следуют из соответствующей теоремы о линейности дифференцирования для функций одного переменного (см. ч. I, гл. 5, § 4). Для доказательства дифференцируемости функций $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ и $f \cdot g$ воспользуемся теоремой о производной сложной функции, для чего введем вспомогательные функции $F : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^2$, $F(x) = (f(x), g(x))$, $\varphi_i : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$, $\varphi_1(y_1, y_2) = \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2$, $\varphi_2(y_1, y_2) = y_1 \cdot y_2$. Тогда $(f, g \in \mathcal{D}(x)) \Rightarrow (F \in \mathcal{D}(x))$ и $\varphi_i \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ $(i = 1, 2)$. Но очевидно, $\alpha \cdot f + \beta \cdot g = \varphi_1 \circ F$, $f \cdot g = \varphi_2 \circ F$, и по теореме о производной сложной функции имеем $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathcal{D}(x)$, $f \cdot g \in \mathcal{D}(x)$.

З а д а ч а. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$; $g : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где G – открытое множество. Пусть $f, g \in \mathcal{D}(x)$, $x \in G$, причем $g(x) \neq 0$. Тогда $f/g \in \mathcal{D}(x)$ и $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(f/g) = \left(g \dfrac{\partial f}{\partial x_i} - f \dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right) / g^2$ $\forall i$, так что

$$d(f/g)(x) = (g(x) df(x) - f(x) dg(x)) / g^2(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}).$$

(Доказать самим.)

Т е о р е м а. *Пусть* $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$; $g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, *причем* $f : x \to f(x)$; $t \to g(t) = x$, *где* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbf{R}^m$. *Тогда для композиции* $u = f \circ g : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ ($u : t \to f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$ *имеем* $u = f \circ g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$, $du(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) dx_i$, *где* $dx_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \mathrm{D}_j g_i(t) dt_j$ $i = 1, 2, \ldots, n$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применяя теорему о производной сложной функции, имеем $(f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),\ g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)) \Rightarrow (u = f \circ g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m),\ \mathrm{D}(f \circ g) = \mathrm{D}f(x) \circ \mathrm{D}g(t) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}))$, откуда, вспоминая правило умножения матриц Якоби, имеем

$$\mathrm{D}_j(f \circ g) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) \mathrm{D}_j g(t) \ (j = 1, 2, \ldots, m),$$

т. е.

$$du(t) = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{D}_j(f \circ g) dt_i = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) \mathrm{D}_j g_i(t) dt_j = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) \times$$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{m} \mathrm{D}_j g_i(t) dt_j \right), \text{ однако при } x_i = g_i(t) \text{ имеем } dx_i = \sum_{j=1}^{m} \mathrm{D}_j g_i(t) dt_j,$$

$$\text{поэтому } \left(du(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) dx_i\right) \Rightarrow \left(d(f \circ g) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) dx_i\right).$$

З а м е ч а н и е (об инвариантности формы первого дифференциала). Пусть $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, где числовая функция $f : G \subset \mathbf{R}_x^n \to \mathbf{R}$ дифференцируема ($f \in \mathcal{D}(x)\ \forall x \in G$), тогда $dy = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$. Пусть $x_i = x_i(t)$, $t = (t_1, \ldots, t_m)$, где $x_i \in \mathcal{D}(t)$ – дифференцируемые функции, тогда $dx_i = \sum\limits_{j=1}^{m} \dfrac{\partial x_i(t)}{\partial t_j} dt_j$. С другой стороны, по теореме о производной сложной функции функция $y = f(x(t))$ дифференцируема, причем

$$dy = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f(x(t))}{\partial t_j} dt_j = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} \right) dt_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial x_i}{\partial t_j} dt_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

т. е. форма записи 1-го дифференциала $dy = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$ не зависит от того, являются x_i независимыми переменными или дифференцируемыми функциями $x_i = x_i(t)$.

Замечание (формулы для вычисления дифференциалов). Пусть $f: G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где G – открытое множество и $x \in G$. Если $f \in \mathcal{D}(x)$, то поскольку $df(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i f(x) dx_i \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ и частные производные $\mathrm{D}_i f(x)$ сами являются линейными операторами по отношению к функции, то $\forall u, v \in \mathcal{D}(x)$ имеем:

1) $d(c \cdot u) = c \cdot du \ \forall c \in \mathbf{R}$;
2) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
3) $d(u \cdot v) = udv - vdu$;
4) $d(u/v) = (vdu - udv)/v^2 \ (v(x) \neq 0)$.

Для примера докажем равенство 3). Пусть $w = u \cdot v$. Тогда w дифференцируема как функция u и v, поскольку ее частные производные $\dfrac{\partial w}{\partial u} = v \in C(\mathbf{R}^2)$ и $\dfrac{\partial w}{\partial x} = u \in C(\mathbf{R}^2)$ непрерывны в $\mathbf{R}^2$ и поэтому $dw = \dfrac{\partial w}{\partial u} du + \dfrac{\partial w}{\partial v} dv$, но $\dfrac{\partial w}{\partial u} = v$, $\dfrac{\partial w}{\partial v} = u$, так что $dw = vdu + udv$. В силу инвариантности формы 1-го дифференциала выражение $vdu + udv$ будет дифференциалом функции $u \cdot v$ и в случае, когда u и v сами являются дифференцируемыми функциями других переменных.

Теорема (об обратной биекции). *Пусть $G \subset \mathbf{R}^n$ и $\mathfrak{G} \subset \mathbf{R}^m$ – открытые множества и $f: G \overset{\text{на}}{\to} \mathfrak{G}$ – биекция G на $\mathfrak{G}$ так, что существует обратная биекция $f^{-1}: \mathfrak{G} \overset{\text{на}}{\to} G$. Пусть $f \in \mathcal{D}(a)$ и $f^{-1} \in \mathcal{D}(b)$, где $b = f(a) \in \mathfrak{G}$, $a \in G$. Тогда морфизм $\mathrm{D}f(a) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ является биекцией $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^m$ и его обратная биекция $(\mathrm{D}f(a))^{-1}$ является производной в точке $b = f(a)$ для обратной биекции f^{-1}, т. е. $(\mathrm{D}f(a))^{-1} = \mathrm{D}f^{-1}(b)$, при этом размерности m и n совпадают, т. е. $m = n$ и матрица Якоби обратной биекции f^{-1} в точке $b = f(a)$ является обратной матрицей для матрицы Якоби отображения f в точке a, т. е.*

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(a) \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(f(a)) = 1.$$

Доказательство. Поскольку $f: G \overset{\text{на}}{\to} \mathfrak{G}$ – биекция и $f^{-1}: \mathfrak{G} \overset{\text{на}}{\to} G$ – обратная биекция, то $(f^{-1} \circ f)(x) = x \ \forall x \in G$, $(f \circ f^{-1})(y) = y \ \forall y \in \mathfrak{G}$, т. е. $f^{-1} \circ f + I_G$, $f \circ f^{-1} = I_{\mathfrak{G}}$, где $I_G: G \overset{\text{на}}{\to} G$ –тождественное отображение (G на G) и $I_{\mathfrak{G}}: \mathfrak{G} \overset{\text{на}}{\to} \mathfrak{G}$ – тождественное отображение ($\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}$). Очевидно, $\mathrm{D}I_G(a) \equiv I_n \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ и $\mathrm{D}I_{\mathfrak{G}}(b) \equiv I_m \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m))$, где $I_n: \mathbf{R}^n \overset{\text{на}}{\to} \mathbf{R}^n$ и $I_m: \mathbf{R}^m \overset{\text{на}}{\to} \mathbf{R}^m$ – тождественные отображения $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ на $\mathbf{R}^m$ соответственно. Поскольку $f \in \mathcal{D}(a)$ и $f^{-1} \in \mathcal{D}(b)$, где $b = f(a)$, то в силу теоремы о производной сложной функции имеем $(f \circ f^{-1} = I_{\mathfrak{G}}) \Rightarrow (\mathrm{D}(f \circ f^{-1}(b)) = \mathrm{D}I_{\mathfrak{G}} = I_n) \Rightarrow \mathrm{D}f(a) \circ \mathrm{D}f^{-1}(b) = I_m$ и $\mathrm{D}f^{-1}(b) \circ \mathrm{D}f(a) = I_n$, т. е. морфизм $\mathrm{D}f(a): \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ есть линейная биекция $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^m$, а морфизм $\mathrm{D}f^{-1}(b)$:

$\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ есть обратная линейная биекция $\mathbf{R}^m$ на $\mathbf{R}^n$. Но тогда из линейной алгебры имеем $m = n$ и $\mathrm{D}f^{-1}(b) = (\mathrm{D}f(a))^{-1}$, откуда и следуют все утверждения теоремы об обратной биекции.

§ 5. Теорема о среднем для отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ и ее приложения

В дифференциальном исчислении функций одного переменного доказана (ч. I, гл. 5, § 6) важная теорема Лагранжа о конечных приращениях: если $f \in \mathcal{D}((a,b)) \wedge C([a,b])$, то существует точка $\xi \in (a,b)$ такая, что $f(b) - f(a) = \mathrm{D}f(\xi)(b-a)$.

З а м е ч а н и е. Теорема о среднем в указанной выше форме, вообще говоря, неверна для отображений $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ при $m \geq 2$.

П р и м е р. Пусть $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, где $f : (x,y) \to (x^3, x^2)$, тогда не существует точки $\xi = (x_0, y_0)$ на отрезке $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,|\, y = x,\ 0 \leq x \leq 1\}$ такой, что $\mathbf{f}(1,1) - \mathbf{f}(0,0) = \mathrm{D}f(x_0,y_0)\mathbf{h}$ $(\mathbf{h} = (1,1))$. В самом деле, $\mathrm{D}f(x,y)\mathbf{h} = (3x^2, 2y)$, и, допустив, что такая точка (x_0,y_0) существует, мы бы имели $1 = 3x_0^2$, $1 = 2y_0$, но $y_0 = 1/2 \neq 1/\sqrt{3} = x_0$, т. е. точка (x_0,y_0) не может лежать на отрезке, соединяющем точки $(0,0)$ и $(1,1)$. Для обобщения теоремы о среднем на отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ $x \to f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ при $m \geq 2$ возможны три пути: 1) применение теоремы Лагранжа к координатным (числовым) функциям $f_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$; 2) вывод теоремы о среднем для отображения f в интегральной форме; 3) замена точного равенства $\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a) = \mathrm{D}f(\xi)(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ на неравенства

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||_m \leq M(f) \cdot ||\mathbf{b} - \mathbf{a}||_n,$$

где $0 \leq M(f) < +\infty$.

Т е о р е м а (о среднем для числовой функции многих переменных). *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где G - открытое множество и отрезок $[a,b] \subset G$. Пусть $f \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$, тогда существует число $\vartheta \in (0,1)$ такое, что имеет место формула конечных приращений*

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a + \vartheta(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\,(b_j - a_j).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим вспомогательную функцию (одного переменного) $F(t) = f(a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))$. Поскольку отрезок $[a,b] = \{x \in G | x = a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}), t \in [0,1]\} \subset G$, то функция $F(t)$ определена на отрезке $[0,1]$, причем $F(0) = f(a)$ и $F(1) = f(b)$. Поскольку $f \in C([a,b])$, то в силу непрерывности линейной функции $t \to a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ на отрезке $[0,1]$ имеем $F \in C([0,1])$. Поскольку

$f \in \mathcal{D}((a,b))$ (где $(a,b) \subset G$), то по теореме о производной сложной функции (используя дифференцируемость линейной функции) видим, что $\forall t \in (0,1)$ у функции $F(t) = f(a + t(b_1 - a_1), \ldots, a_n + t(b_n - a_n))$ существует производная

$$\frac{d}{dt}F(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))\frac{dx_j}{dt} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(b_j - a_j).$$

Но тогда к функции одного переменного $F(t)$, удовлетворяющей условиям $F \in C([0,1]) \wedge \mathcal{D}((0,1))$, применима теорема Лагранжа о конечных приращениях из ч. I, гл. 5, §7, в силу которой $\exists \vartheta \in (0,1)$ такое, что $F(1) - F(0) = \mathrm{D}F(\vartheta)(1-0)$ или

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(a + \vartheta(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(b_j - a_j).$$

Т е о р е м а (о среднем для отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *и отрезок* $[a,b] \subset G$ *(где* G *- открытое множество). Пусть* $f \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ *и* $\mathrm{D}_j f_i(x)$ $\forall i,j$ *ограничены на интервале* (a,b), *причем*

$$M(f) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{0<t<1} |\mathrm{D}_j f_i(a + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}))| \right)^2 \right)^{1/2} < +\infty.$$

Тогда имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||_m \leq M(f) \cdot ||\mathbf{b} - \mathbf{a}||_n.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$, имеем $f \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))) \Rightarrow (f_i \in C([a,b]) \wedge \mathcal{D}((a,b))$ $(i = 1,2,\ldots,m))$, где $[a,b] \subset G$. Тогда в силу теоремы о среднем для числовых функций существуют числа $\vartheta_i \in (0,1)$ $(i = 1,2,\ldots,m)$ такие, что имеют место равенства

$$f_i(b) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a + \vartheta_i(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(b_j - a_j) \; (i = 1,2,\ldots,m).$$

Но тогда в силу неравенства Коши–Буняковского имеем

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||_m^2 = \sum_{i=1}^{m} (f_i(b) - f_i(a))^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f_i(a + \vartheta_i(\mathbf{b} - \mathbf{a}))(b_j - a_j) \right)^2 \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_j f_i(a + \vartheta_i(\mathbf{b} - \mathbf{a})))^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j)^2 \leq M^2(f) \cdot ||\mathbf{b} - \mathbf{a}||_n^2$$

так, что

$$||\mathbf{f}(b) - \mathbf{f}(a)||_m \leq M(f) \cdot ||\mathbf{b} - \mathbf{a}||_n.$$

Замечание. Указанная теорема о среднем существенно использует координатное представление отображения $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, а потому неинвариантна. Доказательство аналогичной теоремы о среднем в инвариантной (не координатной) форме значительно сложнее и приведено, например, в книге [3].

Следствие 1. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где G – открытое множество, $f \in \mathcal{D}(S)$ (причем $\mathrm{D}_j f_i(x)$ ограничены на S $\forall i, j$), где $S \subset G$ – выпуклое множество и имеет место оценка

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_j f_i(x))^2 \right)^{1/2} \leq M \; \forall x \in S.$$

Тогда отображение f удовлетворяет на S условию Липшица

$$||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||m \leq M \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \; \forall x_1, x_2 \in S.$$

Следствие 2. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где G – открытое множество, и $f \in \mathcal{D}(S)$, где $S \subset G$ – выпуклое множество, причем частные производные $\mathrm{D}_j f_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ ограничены на S. Тогда для любых точек $x, y, z \in S$ имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(z) - \mathrm{D}f(x)(\mathbf{y} - \mathbf{z})||_m \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{0<t<1} (\mathrm{D}_j f_i(y + t(\mathbf{z} - \mathbf{y})) - \mathrm{D}_j f_i(x))^2 \right)^{1/2} \cdot ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||_n. \quad (5{:}1)$$

Доказательство. Для фиксированного $x \in S$ рассмотрим функцию $F(w) = f(w) - \mathrm{D}f(x)\mathbf{w}$, $w \in S$. Тогда $F \in \mathcal{D}(S)$, причем

$$F_i(w) = f_i(w) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k f_i(x) w_k, \; \mathrm{D}_j F_i(w) = \mathrm{D}_j f_i(w) -$$

$$-\mathrm{D}_j f_i(x) \; (j = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, m).$$

Поскольку множество S выпукло, то $\forall y, z \in S$ отрезок $[y, z] \subset S \subset G$ так, что $F \in C([y, z]) \wedge \mathcal{D}((y, z))$. В силу ограниченности всех частных

производных $\mathrm{D}_j f_i$ на множестве S, применяя теорему о среднем для отображений (из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$), получаем оценку

$$||\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(z)||_m \leq M(F) \cdot ||\mathbf{y} - \mathbf{z}||_n,$$

где

$$M(F) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{o<t<1} (\mathrm{D}_j F_i(y + t(\mathbf{z} - \mathbf{y})))^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{0<t<1} (\mathrm{D}_j f_i(y + t(\mathbf{z} - \mathbf{y})) - \mathrm{D}_j f_i(x)^2 \right)^{1/2} < +\infty,$$

откуда и вытекает оценка (5.1), поскольку

$$\mathbf{F}(y) - \mathbf{F}(z) = \mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(z) - \mathrm{D}f(x)(\mathbf{y} - \mathbf{z}).$$

Т е о р е м а. *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *где* G *- открытое множество и* $f \in \mathcal{D}(G)$, *причем* $\mathrm{D}f \in C(x_0)$ *(где* $x_0 \in G$*). Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *такое, что шар* $\overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0) \subset G$ *и имеет место оценка*

$$||f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}) - \mathrm{D}f(x_0)(\mathbf{y} - \mathbf{x})||_m \leq \varepsilon ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_n \ \forall x, y \in \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in \mathcal{D}(G)$ и $\mathrm{D}f \in C(x_0)$, где x_0 – внутренняя точка G, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что шар $\overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0) \subset G$ и

$$|\mathrm{D}_j f_i(w) - \mathrm{D}_j f_i(x_0)| < \varepsilon / \sqrt{m \cdot n} \forall w \in \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0).$$

Но тогда имеем оценку

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_j f_i(w) - \mathrm{D}_j f_i(x_0))^2 \leq \varepsilon^2 \forall w \in \overline{\mathrm{III}_\delta}(x_0). \tag{5.2}$$

В силу выпуклости шара $\overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0) \subset G$ для любых точек $x, y \in \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0)$ отрезок $[x, y] \subset \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0)$ так, что $w = x + t(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \in \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0)\ \forall t \in [0, 1]$, и поэтому в силу (5.2) имеем

$$M^2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \sup_{0 \leq t \leq 1} (\mathrm{D}_j f_i(x + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})) - \mathrm{D}_j f_i(x_0))^2 \leq \varepsilon^2.$$

Но тогда в силу оценки (5.1) следствия 2 имеем из оценки (5.2)

$$||\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) - \mathrm{D}f(x_0)(\mathbf{y} - \mathbf{x})||_m \leq M \cdot ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_n \leq$$

$$\leq \varepsilon ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_n \, \forall x, y \in \overline{\mathrm{III}}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n.$$

§ 6. Формула Тейлора для (векторных) функций

Будем в дальнейшем использовать следующие обозначения с мультииндексом

$$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n), \; |k| = \sum_{i=1}^{n} k_i, \; 0 \leq k_i \leq |k| \, (k_i \in \mathbf{N}_0;$$

$$i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\mathrm{D}^k f(x) = \frac{\partial^{|k|} f(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} = \mathrm{D}_1^{k_1} \ldots \mathrm{D}_n^{k_n} f(x).$$

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, *где* G *- открытое множество и* $x_0 \in G$. *Функция* $f(x)$ *называется* m *раз дифференцируемой в точке* x_0 *при* $m \geq 2$, *если существует окрестность* $U(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ *такая, что функция* $f(x)$ *дифференцируема* $(m-1)$ *раз на* $U(x_0)$ *и все ее частные производные* $\mathrm{D}^k f(x)$ $(|k| = m-1)$ *дифференцируемы в точке* x_0. Запись: $f \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0)$.

З а м е ч а н и е. При $m = 2$, $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$, если $\exists U(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ такая, что $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$, причем $\mathrm{D}_i f \in \mathcal{D}(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда по теореме Юнга $\exists \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, причем $\mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(x_0) = \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0)$ $i \neq j$. Вообще, если $f \in \mathcal{D}^{(m)}(x_0)$, то $\mathrm{D}^k f \in \mathcal{D}(x_0)$ при $|k| = m - 1$ и значение $\mathrm{D}^p f(x_0) = \dfrac{\partial^{|p|} f(x_0)}{\partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}}$ $(|p| = m)$ не зависит от порядка частных дифференцирований.

О п р е д е л е н и е. *Если* $f \in \mathcal{D}^{(m)}(x)$ $\forall x \in G \subset \mathbf{R}^n$, *то говорят, что функция* $f(x)$ m *раз дифференцируема на* G. Запись: $f \in \mathcal{D}^{(m)}(G)$.

О п р е д е л е н и е. *Если* $f \in \mathcal{D}^{(m)}(G)$ *и* $\mathrm{D}^k f \in C(G)$ $\forall |k| = m$, *то говорят, что функция* $f(x)$ m *раз непрерывно дифференцируема на* G. Запись: $f \in C^{(m)}(G)$.

О п р е д е л е н и е. *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, *где* G *- открытое множество,* $x_0 \in G$ *и в каноническом базисе* $\mathbf{R}^m$ *имеем* $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$. *Тогда*

$$(f \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)) \Leftrightarrow (f_i \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0) \, (i = 1, 2, \ldots, m)),$$

$$(f \in \mathcal{D}^{(p)}(G)) \Leftrightarrow (f_i \in \mathcal{D}^{(p)}(G) \, (i = 1, 2, \ldots, m)),$$

$$(f \in C^{(p)}(G)) \Leftrightarrow (f_i \in C^{(p)}(G) \, (i = 1, 2, \ldots, m)).$$

Замечание. Проведенные определения классов $\mathcal{D}^{(p)}(x_0)$, $\mathcal{D}^{(p)}(G)$ и $C^{(p)}(G)$ существенно используют координатную запись отображения f из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$, т. е. не инвариантны.

Лемма (обобщение формулы бинома Ньютона). *Пусть* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ – *мультииндекс* ($k_i \in \mathbf{N}_0$; $i = 1, 2, \ldots, n$), *причем* $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ *и* $k! = k_1! \cdot k_2! \ldots k_n!$, $x^k = x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{k_i}$. *Тогда* $\forall m \in \mathbf{N}$ *имеет место обобщенная формула Ньютона*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} \cdot x^k =$$

$$= \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=m} \frac{m!}{k_1! \cdot k_2! \ldots k_n!} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Доказательство. Рассмотрим однородный многочлен m-й степени

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^m = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_n=m} A_{k_1,\ldots,k_n} \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}.$$

Беря производную $\dfrac{\partial^m}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_n^{\nu_n}}$ (где $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $|\nu| = m$) от обеих частей этого тождества, имеем

$$m! = \sum_{|k|=m} A_{k_1,\ldots,k_n} \cdot \prod_{i=1}^{n} k_i \cdot (k_i - 1) \ldots (k_i - \nu_i + 1) x_i^{k_i - \nu_i},$$

причем, очевидно, справа сохраняются лишь те индексы k_i, для которых имеем $k_i \geq \nu_i$ $\forall i$. Но $m = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i$, поэтому $k_i \leq \nu_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), т. е. сохраняются лишь индексы $k_i = \nu_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Но тогда имеем $m! = A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} \cdot \nu_1! \ldots \nu_n!$, т. е. $A_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = m!/(\nu_1! \ldots \nu_n!)$, откуда $A_{k_1,\ldots,k_n} = m!/k!$, что и доказывает обобщенную формулу бинома Ньютона.

Замечание. При $n = 2$ имеем, полагая $k_1 = l$ и $k_2 = m - l$,

$$(x_1 + x_2)^m = \sum_{k_1+k_2=m} m!/(k_1! \cdot k_2!) \cdot x_1^{k_1} \cdot x_2^{k_2} = \sum_{l=0}^{m} \frac{m!}{l! \cdot (m-l)!} \cdot x_1^{l} \cdot x_2^{m-l}$$

– обычный бином Ньютона.

Лемма. *Пусть* $f : \mathrm{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(p)}(\mathrm{Ш}_\delta(x_0))$. *Пусть* $x_0 + t \cdot \mathbf{h} \in \mathrm{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *так, что* $t \in [0, 1]$, $\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j$ *и* $||\mathbf{h}||_n < \delta$.

Положим $F(t) = f(x_0 + t \cdot \mathbf{h})$. *Тогда* $\forall m \in \mathbf{N}$ *такого, что* $1 \le m \le p$, *имеет место* $(\forall t \in [0,1])$ *формула*

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k!} h^k \cdot \mathrm{D}^k f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) \equiv$$

$$\equiv \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1! \dots k_n!} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \cdot \mathrm{D}_1^{k_1} \dots \mathrm{D}_n^{k_n} f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^m f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}).$$

Доказательство. Очевидно, имеем $f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) \equiv f(x_1^0 + t \cdot h_1, \dots, x_n^0 + t \cdot h_n)$, причем $f \in \mathcal{D}^{(p)}$ $(\mathrm{Ш}_\delta(x_0))$, поэтому, применяя теорему о производной сложной функции из §4 к функции одного переменного $F(t) = f(x_0 + t \cdot \mathbf{h})$, получаем

$$\frac{dF(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) \cdot h_j \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right) f(x_0 + t \cdot \mathbf{h})$$

и вообще для любого натурального $m \in \mathbf{N}$, $1 \le m \le p$ имеем представление

$$\frac{d^m}{dt^m} F(t) = \sum_{|k|=m} B_{k_1,\dots,k_n} \cdot h_1^{k_1} \dots h_n^{k_n} \cdot \mathrm{D}_1^{k_1} \dots \mathrm{D}_n^{k_n} f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}).$$

Заметим, что коэффициенты $B_{k_1,\dots,k_n}$ в этом представлении, очевидно, не зависят от вида функции f, поэтому их можно вычислить, беря в качестве функции f, например, функцию $\varphi(x) = \exp\{x_1 + \dots + x_n\}$. Но тогда

$$\Phi(t) = \varphi(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) = \exp\{(x_1^0 + t \cdot h_1) + \dots + (x_n^0 + t \cdot h_n)\} =$$

$$= \exp\{(x_1^0 + \dots + x_n^0) + t(h_1 + \dots + h_n)\}.$$

Очевидно, $\mathrm{D}_1^{k_1} \dots \mathrm{D}_n^{k_n} \varphi(x) = \varphi(x)$, и поскольку $\varphi \in C(\mathrm{Ш}_\delta(x_0))$, то, используя формулу Ньютона в обобщенной форме, имеем в силу теоремы о производной сложной функции представление

$$\frac{d^m}{dt^m} \Phi(t) = \exp\{x_1^0 + \dots + x_n^0\} \cdot \frac{d^m}{dt^m} \exp\{t(h_1 + \dots + h_n)\} =$$

$$= \exp\{(x_1^0 + \dots + x_n^0) + t(h_1 + \dots + h_n)\}(h_1 + \dots + h_n)^m =$$

$$= \varphi(x_0 + t\cdot\mathbf{h})\cdot \sum_{|k|=m} \frac{m!}{k_1!\dots k_n!}\cdot h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n} \equiv$$

$$\equiv \sum_{|k|=m} B_{k_1,\dots,k_n}\cdot h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n}\cdot \mathrm{D}_1^{k_1}\dots \mathrm{D}_n^{k_n}\varphi(x_0+t\cdot\mathbf{h}) =$$

$$= \varphi(x_0+t\cdot\mathbf{h})\cdot \sum_{|k|=m} B_{k_1,\dots,k_n}\cdot h_1^{k_1}\dots h_n^{k_n},$$

откуда

$$B_{k_1,\dots,k_n} = m!/(k_1!\dots k_n!),\ |k| = k_1+\dots+k_n = m.$$

(Метод доказательства леммы сообщен автору Н.И. Фельдманом.)

З а м е ч а н и е. Поскольку $f \in \mathcal{D}^{(p)}$ $(\text{Ш}_\delta(x_0))$ $(p \geq 1)$, то, полагая $\mathbf{h} = \sum\limits_{j=1}^{n} h_j \mathbf{e}_j$ и выбирая $0 < \delta_0 < \delta$ и $\varepsilon_0 \in (0, \frac{\delta}{\delta_0} - 1)$ так, что $1+\varepsilon_0 < \frac{\delta}{\delta_0}$, видим, что $x_0 + t\mathbf{h} \in \text{Ш}_{\delta_0}(x_0) \subset \text{Ш}_\delta(x_0)$ $\forall |t| < 1+\varepsilon_0$ и $||\mathbf{h}||_n < \delta_0 < \delta$ (так как $(1+\varepsilon_0)\delta_0 < \delta$). Тогда функция $F(t) = f(x_0 + t\mathbf{h})$ определена $\forall t \in (-1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$, причем в силу теоремы о производной сложной функции $(F \in \mathcal{D}^{(p)}((1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0))$ $\exists \frac{d^m}{dt^m} F(t)$ $\forall t \in (-1-\varepsilon_0, 1+\varepsilon_0)$ $\forall m$, $1 \leq m \leq p$, и, в частности, (ср. с. 134, 170) $F \in \mathcal{D}^{(p)}([0,1])$, причем $\forall m$, $1 \leq m \leq p$, имеем $\frac{d^m F(0)}{dt^m} = \frac{d^m}{dt^m} F(t)\,|_{t=0}$ и $\frac{d^m F(1)}{dt^m} = \frac{d^m F(t)}{dt^m}\,|_{t=1}$.

Т е о р е м а (формулы Тейлора для числовой функции многих переменных). *Пусть* $f : \text{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(p+1)}(\text{Ш}_\delta(x_0))$ *при* $p \geq 0$. *Тогда* $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *имеет место представление*

$$f(x_0+\mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j\right)^k f(x_0) + r_p(x_0,\mathbf{h}),$$

причем $\exists \vartheta \in (0,1)$ *такое, что*

$$r_p(x_0,\mathbf{h}) = \frac{1}{(p+1)!}\left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j\right)^{p+1} f(x_0+\vartheta\cdot\mathbf{h})$$

– остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа; если, кроме того, $f \in C^{(p+1)}(\text{Ш}_\delta(x_0))$, *то*

$$r_p(x_0,\mathbf{h}) = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-\lambda)^p \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j\right)^{p+1} f(x_0+\lambda\cdot\mathbf{h})d\lambda -$$

остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме.

Доказательство. Рассмотрим сложную функцию (одного действительного переменного t) $F(t) = f(x_0 + t \cdot \mathbf{h})$, $t \in [0,1]$. Заметим, что в силу выпуклости шара $Ш_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ при $||\mathbf{h}||_n < \delta$ имеем $x_0 + t \cdot \mathbf{h} \in Ш_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ $\forall t \in [0,1]$, поэтому функция одного переменного $F(t)$ определена $\forall t \in [0,1]$, причем $F(0) = f(x_0)$, $F(1) = f(x_0 + \mathbf{h})$. Поскольку $f \in \mathcal{D}^{(p+1)}(Ш_\delta(x_0))$, то в силу леммы, приведенной выше, имеем представление

$$F^{(k)}(t) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}) \, (k = 1, 2, \ldots, p),$$

так что

$$F^{(k)}(0) = \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k f(x_0) \, (k = 1, 2, \ldots, p).$$

В случае $f \in \mathcal{D}^{(+1)}(Ш_\delta(x_0))$ имеем $F \in C^{(p)}([0,1])$ и $F^{(p)} \in \mathcal{D}((0,1))$ и по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа (для функции одного переменного из §10 гл. 5), примененной к функции $F(t)$ на отрезке $[0,1]$, видим, что $\exists \vartheta \in (0,1) \subset (-1 - \varepsilon_0, 1 + \varepsilon_0)$ такое, что

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \cdot F^{(k)}(0) t^k + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!} F^{(p+1)}(\vartheta \cdot t),$$

и при $t = 1$ имеем

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k f(x_0) + r_p(x_0, \mathbf{h}),$$

где

$$r_p(x_0, \mathbf{h}) = \frac{1}{(p+1)!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^{p+1} f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}), \; 0 < \vartheta < 1.$$

В случае $f \in C^{(p+1)}(Ш_\delta(x_0))$ формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (из §9 гл. 2 ч. II), примененная к функции $F(t)$ на отрезке $[0,1]$, дает

$$F(t) = F(0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) t^k + \frac{t^{p+1}}{p!} \cdot \int_0^1 (1 - \lambda)^p F^{(p+1)}(\lambda \cdot t) d\lambda,$$

откуда при $t = 1$ имеем

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k f(x_0) + r_p(x_0, \mathbf{h}),$$

где

$$r_p(x_0, \mathbf{h}) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-\lambda)^p \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^{p+1} f(x_0 + \lambda \cdot \mathbf{h}) d\lambda.$$

З а м е ч а н и е. При доказательстве теоремы Тейлора существенное значение имела выпуклость шара $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$, для которого $f \in \mathcal{D}^{(p+1)}$ $(\text{Ш}_\delta(x_0))$. Поэтому при разложении функции $f(x)$ по формуле Тейлора в точке $x_0 \in G$ необходимо, чтобы отрезок $[x_0, x]$, соединяющий точки x_0 и x из G, целиком содержался в G. Таким свойством обладают области G, звездные относительно точки $x_0 \in G$, т. е. такие области, что $[x_0, x] \subset G \; \forall x \in G$. Поэтому для звездных относительно точки x_0 областей $G \subset \mathbf{R}^n$ справедливо разложение по формуле Тейлора при выполнении прочих условий (гладкости).

С л е д с т в и е (теорема о среднем для числовой функции многих переменных в интегральной форме). Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где G – открытое множество и отрезок $[a, b] \subset G$. Пусть $f \in C^{(1)}([a, b])$, тогда имеет место представление

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \int_0^1 \mathrm{D}_j f(a + \lambda(b-a)) d\lambda.$$

З а м е ч а н и е. Используя обобщенную формулу бинома Ньютона, формулу Тейлора можно переписать в виде

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{|m|=1}^{p} \frac{h^m}{m!} \mathrm{D}^m f(x_0) +$$

$$+ r_p(x_0, \mathbf{h}) \forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G,$$

где при $f \in \mathcal{D}^{(p+1)} \text{Ш}_\delta(x_0))$

$$r_p(x_0, \mathbf{h}) = \sum_{|m|=p+1} \frac{h^m}{m!} \mathrm{D}^m f(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h})$$

(остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа) или при

$$f \in C^{(p+1)}(\text{Ш}_\delta(x_0)) \; r_p(x_0, \mathbf{h}) =$$

$$= (p+1) \sum_{|m|=p+1} \frac{h^m}{m!} \int_0^1 (1-\lambda)^p \mathrm{D}^m f(x_0 + \lambda \cdot \mathbf{h}) d\lambda$$

(остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме).

Т е о р е м а (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано). *Пусть* $f : \text{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(p-1)}$ $(\text{Ш}_\delta(x_0))$, *причем* $f \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)$ $(p \geq 1)$. *Тогда имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано* $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0)$

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k f(x_0) + o(||\mathbf{h}||_n^p) \, (\mathbf{h} \to 0),$$

или

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{|m|=1}^{p} \frac{h^m}{m!} \mathrm{D}^m f(x_0) + o(||\mathbf{h}||_n^p) \, (\mathbf{h} \to 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $p = 1$ формула Тейлора справедлива, поскольку

$$(f \in \mathcal{D}(x_0)) \Rightarrow (f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(x_0) h_j + o(||\mathbf{h}||_n) \, (\mathbf{h} \to 0)).$$

При $p \geq 2$ положим

$$\mathcal{P}_p(x; f(x_0)) = f(x_0) + \sum_{|m|=1}^{p} \frac{(x - x_0)^m}{m!} \cdot \mathbf{D}^m f(x_0),$$

отметим, что при $k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$, $1 \leq |k| \leq p$ имеем

$$\mathbf{D}^k \mathcal{P}_p(x; f, x_0) = \sum_{m_1 = k_1, \ldots, m_n = k_n}^{|m|=p} \left(\prod_{i=1}^{n} m_i \cdot (m_i - 1) \ldots \right.$$

$$\ldots (m_i - k_1 + 1)/(m! \cdot m_2! \ldots m_n!) \times$$

$$\left. \times (x_i - x_i^0)^{m_i - k_i} \right) \cdot \mathbf{D}_1^{m_1} \cdot \mathbf{D}_2^{m_2} \ldots \mathbf{D}_n^{m_n} f(x_0),$$

откуда, полагая $x = x_0$, имеем

$$\mathbf{D}^k \mathcal{P}_p(x_0; f, x_0) = \left(\prod_{i=1}^{n} k_i! \right) / (k_1! \ldots k_n!) \cdot \mathbf{D}^k f(x_0) = \mathbf{D}^k f(x_0).$$

Таким, образом, если ввести вспомогательную функцию $g(x) = f(x) - \mathcal{P}_p(x; f, x_0)$, $p \geq 2$, $x \in \text{Ш}_\delta(x_0)$, то $(f \in \mathcal{D}^{(p-1)}(\text{Ш}_\delta(x_0))) \Rightarrow (g \in$

$\mathcal{D}^{(p-1)}(\text{Ш}_\delta(x_0)))$, причем $(f \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)) \Rightarrow (g \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)) \Rightarrow (\mathrm{D}^k g(x_0) = 0;\ |k| = 0, 1, \ldots, p)$. Применим к функции $g(x)$ в $\text{Ш}_\delta(x_0)$ формулу Тейлора (с заменой $p \geq 2$ на $p-2$) с остаточным членом в форме Лагранжа. Тогда при ≥ 2

$$g(x_0 + \mathbf{h}) = \sum_{|m|=p-1} \frac{h^m}{m!} \mathrm{D}^m g(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}),\ 0 < \vartheta < 1,$$

но $(g \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)) \Rightarrow (\mathrm{D}^m g \in \mathcal{D}(x_0)$ при $|m| = p - 1 \geq 1)$, и поэтому при $|m| = p - 1$ имеем

$$\mathrm{D}^m g(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}) = \mathrm{D}^m g(x_0) + \vartheta \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j \mathrm{D}^m g(x_0) h_j + o(||\mathbf{h}||_n)\ (\mathbf{h} \to 0),$$

откуда в силу отмеченного ранее равенства $\mathrm{D}^m g(x_0) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}^m g(x_0) = 0$ при $|m| = p - 1 \geq 1$ имеем

$$\mathrm{D}^m g(x_0 + \vartheta \cdot \mathbf{h}) = o_m(||\mathbf{h}||_n)\ (\mathbf{h} \to 0),\ |m| = -1 \geq 1,$$

$$g(x_0 + \mathbf{h}) = \sum_{|m|=p-1} (h^m/m!) \cdot o(||\mathbf{h}||_n) = o(||\mathbf{h}||_n^p)\ (\mathbf{h} \to 0),$$

т. е. при $p \geq 2$

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = \mathcal{P}_p(x_0 + h; f, x_0) + o(||\mathbf{h}||_n^p)\ (\mathbf{h} \to 0),$$

что и завершает доказательство формулы Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Т е о р е м а (формулы Тейлора для (векторных) функций). *Пусть* $f : \text{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$. *Тогда:*

1) если $f \in \mathcal{D}^{(p-1)}\ (\text{Ш}_\delta(x_0))$ *и* $f \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)$ *(при* $(p \geq 1)$*, то в проколотой окрестности* $\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *имеет место формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано*

$$\mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k \mathbf{f}(x_0) + \mathbf{o}(||\mathbf{h}||_n^p)\ (\mathbf{h} \to \mathbf{0}),$$

2) если $f \in \mathcal{D}^{(p+1)}\ (\text{Ш}_\delta(x_0))$ *при* $p \geq 0$, *то* $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \text{Ш}_\delta(x_0)$ *имеет место представление*

$$\mathbf{f}(x_0 + \mathbf{h}) = \mathbf{f}(x_0) + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \mathrm{D}_j \right)^k \mathbf{f}(x_0) + \mathbf{r}_p(x_0, \mathbf{h}),$$

где

$$\mathbf{r}_p(x_0,\mathbf{h})=\frac{1}{(p+1)!}\left(\sum_{j=1}^{n}h_j\mathrm{D}_j\right)^{p+1}\mathbf{f}(x_0+\vartheta*\mathbf{h}),\ \vartheta=(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m),$$

причем $0<\vartheta_i<1$ $(i=1,2,\ldots,m)$ *и*

$$\mathbf{f}(x_0+\vartheta*\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{m}f_i(x_0+\vartheta_i\cdot\mathbf{h})\mathbf{e}_i'$$

(остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа), если же $\mathbf{f}\in C^{(p+1)}(\text{Ш}_\delta(x_0))$ $(p\geq 0)$, *то*

$$r_p(x_0,\mathbf{h})=\frac{1}{p!}\int_0^1(1-\lambda)^p\left(\sum_{j=1}^{n}h_j\mathrm{D}_j\right)^{p+1}\mathbf{f}(x_0+\lambda\cdot\mathbf{h})d\lambda$$

(остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме).

Доказательство. Достаточно применить уже доказанные теоремы Тейлора для каждой из координатных функций $f_i(x_0+h)=p_i\circ\mathbf{f}(x_0+\mathbf{h})$. Заметим, что, применяя формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа для $f_i(x_0+\mathbf{h})$ $(i=1,\ldots,m)$, получаем числа $\vartheta_i\in(0,1)$, вообще говоря, различные при разных i, так что в отличие от формулы Тейлора для числовой функции многих переменных нельзя выбрать $\vartheta=\vartheta_i$ одинаковыми для всех $i=1,2,\ldots,m$.

Следствие (теорема о среднем для векторной функции). Пусть $\mathbf{f}:G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, где G – открытое выпуклое множество и $\mathbf{f}\in\mathcal{D}(G)$. Тогда для любого отрезка $[a,b]\subset G$ $\exists\vartheta=(\vartheta_1,\ldots,\vartheta_m)$, $0<\vartheta_i<1$ $(i=1,2,\ldots,m)$ такое, что

$$\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)=\mathrm{D}f(a+\vartheta*(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\mathbf{b}-\mathbf{a}),$$

или в координатной форме $f_i(b)-f_i(a)=\sum\limits_{j=1}^{n}\mathrm{D}_jf_i(a+\vartheta_i(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(b_j-a_j)$, $(i=1,2,\ldots,m)$, при этом все $\vartheta\in(0,1)$, вообще говоря, различны, и хотя точки $a+\vartheta_i(\mathbf{b}-\mathbf{a})\in(a,b)$ $(i=1,\ldots,m)$, но $\mathrm{D}f(a+\vartheta*(\mathbf{b}-\mathbf{a}))$ не является производной функции $\mathbf{f}$ в некоторой промежуточной точке отрезка $[a,b]$.

Следствие (теорема о среднем для векторной функции в интегральной форме). Пусть $\mathbf{f}:G\subset\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, где G – открытое выпуклое множество и $\mathbf{f}\in C^{(1)}(G)$. Тогда для любого отрезка $[a,b]\subset G$ имеет место формула конечных приращений

$$\mathbf{f}(b)-\mathbf{f}(a)=\int_0^1\mathrm{D}f(a+\lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}))(\mathbf{b}-\mathbf{a})d\lambda,$$

или в координатной форме

$$f_i(b) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j)\int_0^1 \mathrm{D}_j f_i(a + \lambda\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}))d\lambda\,(i = 1, 2, \ldots, m).$$

Следствие (формула Тейлора для векторной функции одного переменного). Пусть $\mathbf{f}: (\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^m$. Тогда:

1) при $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $\mathbf{f} \in \mathcal{D}^{(p-1)}((\alpha, \beta))$, $\mathbf{f} \in \mathcal{D}^{(p)}(x_0)$ $(p \geq 1)$ имеем в $(\alpha, \beta) \setminus \{x_0\}$

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0) + \sum_{k=1}^{p}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{D}^k\mathbf{f}(x_0) + \mathbf{o}(|x-x_0|^p)\,(x \to x_0);$$

2) если $\mathbf{f} \in \mathcal{D}^{(p+1)}$ $((\alpha, \beta))$ при $p \geq 0$, то $\forall x \in (\alpha, \beta)$ имеем

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(x_0) + \sum_{k=1}^{p}\frac{(x-x_0)^k}{k!}\mathrm{D}^k\mathbf{f}(x_0) + \mathbf{r}_p(x, x_0),$$

где

$$\mathbf{r}_p(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{p+1}}{(p+1)!}\cdot\mathbf{f}^{(p+1)}(x_0 + \vartheta * (x - x_0)),$$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \ldots, \vartheta_m),\ 0 < \vartheta_i < 1\,(i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\mathbf{f}^{(p+1)}(x_0 + \vartheta * (x - x_0)) = \sum_{i=1}^{m} f_i^{(p+1)}(x_0 + \vartheta_i(x - x_0))\cdot\mathbf{e}_i'$$

(остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа), если же при $p \geq 0$ $\mathbf{f} \in C^{(p+1)}((\alpha, \beta))$, то

$$r_p(x, x_0) = \frac{(x-x_0)^{(p+1)}}{p!}\int_0^1 (t-\lambda)^p\cdot\mathrm{D}^{p+1}\mathbf{f}(x_0 + \lambda(x - x_0))d\lambda$$

(остаточный член формулы Тейлора в интегральной форме).

Лемма. *Пусть $f: G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где G - открытое связное множество. Тогда $(f(x) = const$ в $G) \Leftrightarrow (f \in \mathcal{D}(G)$ и $\forall x \in G\ df(x) = 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, т. е. $\mathrm{D}_j f(x) = 0\ \forall x \in G\ (j = 1, 2, \ldots, n))$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $f(x) = \mathrm{const}$ в G, тогда $f \in \mathrm{D}(G)$ и $(df(x) = 0 \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\ \forall x \in G) \Rightarrow (\mathrm{D}_j f(x) = 0\ \forall x \in G;\ j = 1, 2, \ldots, n)$.

Достаточность. Пусть $f \in \mathcal{D}(G)$ и $df(x) = 0\ \forall x \in G$, тогда $\mathrm{D}_j f(x) = 0\ \forall x \in G\ (j = 1, 2, \ldots, n)$. Зафиксируем точку $x_0 \in G$ и рассмотрим любую точку $x \in G$. Поскольку открытое множество G связно в $\mathbf{R}^n$, то в силу критерия из §11 гл. 1 точки $x_0, x \in G$ можно соединить ломаной $l[x_0, x] = \bigcup_{k=1}^{m}[a_k, b_k]$ $(a_1 = x_0, a_k = b_{k-1}, b_m = x)$ с носителем, целиком лежащим в G. Поскольку $[a_k, b_k] \subset G$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$,

то в силу теоремы о среднем для числовой функции $f \in \mathcal{D}([a_k, b_k])$ существуют точки $c_k \in (a_k, b_k) \subset G$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ такие, что $f(b_k) - f(a_k) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(c_k)(b_j^{(k)} - a_j^{(k)})$, но $(c_k \in G) \Rightarrow (\mathrm{D}_j f(c_k) = 0)$, поэтому $(f(a_k) = f(b_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, m)) \Rightarrow (f(x) = f(x_0)\ \forall x \in G) \Rightarrow (f(x) = \text{const в } G)$.

§ 7. Локальные экстремумы числовой функции многих переменных

О п р е д е л е н и е. *Пусть $f : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, тогда внутренняя точка $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ называется точкой локального максимума (локального минимума) функции $f(x)$ на множестве M, если существует окрестность $U(x_0) \subset M$ такая, что*

$$f(x) \leq f(x_0)(f(x) \geq f(x_0)) \forall x \in \dot{U}(x_0), \tag{7.1}$$

(если в (7.1) вместо $\leq$ ($\geq$) стоит $<$ ($>$), то точка $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ называется точкой строгого локального максимума (строгого локального минимума) функции $f(x)$ на множестве M).

З а м е ч а н и е. Если $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ – точка локального максимума или локального минимума функции $f(x)$ на множестве M, то $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ называется точкой локального экстремума функции $f(x)$ на множестве M.

Т е о р е м а (необходимое условие существования локального экстремума для дифференцируемой функции). *Пусть $f : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ есть точка локального экстремума функции $f(x)$ на множестве M. Тогда если $f \in \mathcal{D}(x_0)$, то $\mathrm{D}_i f(x_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f \in \mathcal{D}(x_0)$ и существует шар $\mathrm{Ш}_\delta(x_0) \subset M$ такой, что, например, $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in \mathrm{Ш}_\delta(x_0)$. Докажем, что для любого ненулевого вектора $\mathbf{l} = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i \mathbf{e}_i$ имеем $\mathrm{D}_\mathbf{l} f(x_0) = 0$. В самом деле, пусть $F(t) = f(x_0 + t \cdot \mathbf{l})$ $\forall t \in (-\delta_1, \delta_1)$, где $x_0 + t \cdot \mathbf{l} \in \mathrm{Ш}_\delta(x_0)$, тогда $F(t) \leq F(0)$ $\forall t \in (-\delta_1, \delta_1)$, и поскольку $f \in \mathcal{D}(x_0)$, то $\exists F'(0) = \mathrm{D}_\mathbf{l} f(x_0)$. Но тогда в силу необходимого условия существования локального экстремума у дифференцируемой функции одного переменного (см. ч. I) имеем $(F'(0) \Rightarrow (\mathrm{D}_\mathbf{l} f(x_0) = 0)$ и, в частности, $\mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_{\mathbf{e}_j} f(x_0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

З а м е ч а н и е. Доказанное необходимое условие существования локального экстремума для дифференцируемой функции ни в коем случае не является условием достаточным.

П р и м е р. Пусть $M = \mathbf{R}^2$, $x_0 = (0, 0)$ и $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$. Тогда $\mathrm{D}_j f(0, 0) = 0$ $(j = 1, 2)$, но функция $f(x_1, 0) = -x_1^2$ имеет в точке

$x_1 = 0$ локальный максимум, а функция $f(0, x_2) = x_2^2$ имеет в точке $x_2 = 0$ локальный минимум. Функция $f(x_1, x_2) = x_2^2 - x_1^2$ не имеет в точке $(0, 0)$ локального экстремума, поскольку точка $(0, 0)$ является «седлом» для графика функции $z = f(x_1, x_2)$ (график – гиперболический параболоид, см. рис. 52).

Прежде чем приводить достаточные условия существования локального экстремума для числовой функции многих переменных, напомним некоторые сведения из линейной алгебры (см. [4]). Рассмотрим квадратическую форму

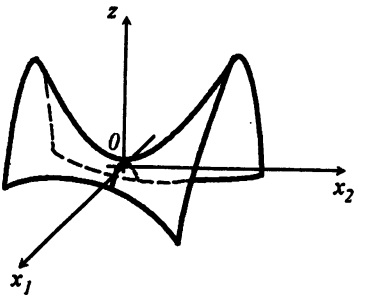


Рис. 52

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j,$$

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j \in \mathbf{R}^n$$

с симметрической матрицей (a_{ij}) $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ (так что $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i \neq j$).

О п р е д е л е н и е. *Квадратическая форма* $\Phi(\mathbf{x})$ *называется положительно (отрицательно) определенной, если* $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, *имеем*

$$\Phi(\mathbf{x}) > 0 \,(< 0) \text{ при } \|\mathbf{x}\|_n > 0 \tag{7.2}$$

З а м е ч а н и е. Если в (7.2) знак $>$ $(<)$ заменить на $\geq$ $(\leq)$, то квадратическая форма $\Phi(\mathbf{x})$ называется положительно (отрицательно) полуопределенной.

О п р е д е л е н и е. *Квадратическая форма* $\Phi(\mathbf{x})$ *называется неопределенной, если* $\Phi(\mathbf{x})$ *может принимать как положительные, так и отрицательные значения при различных* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{R}^n$.

Ранее в § 12 гл. 1 ч. III была доказана

Л е м м а. *Если квадратическая форма* $\Phi(\mathbf{x})$ *– положительно (отрицательно) определенная, то существует постоянная* $c > 0$ *такая, что* $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \geq c\|\mathbf{x}\|_n^2 \,(\leq -c\|\mathbf{x}\|_n^2).$$

Т е о р е м а (признак Сильвестра определенности квадратической формы). *Пусть* $\Phi(\mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ *– квадратическая форма и* $A = (a_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ *соответствующая ей симметрическая* $(a_{ij} =$

a_{ji} $\forall i \neq j$) $n \times n$ *матрица с главными минорами*

$$A_1 = a_{11},\ A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \dots$$

$$\dots, A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) (квадратическая форма $\Phi(\mathbf{x})$ *является положительно определенной)* $\Leftrightarrow$ $(A_1 > 0,\ A_2 > 0, \dots,\ A_n > 0)$;

2) (квадратическая форма $\Phi(\mathbf{x})$ *является отрицательно определенной)* $\Leftrightarrow$ $(A_1 < 0,\ A_2 > 0,\ A_3 < 0, \dots,\ (-1)^n A_n > 0)$. (Доказательство теоремы Сильвестра приводится в курсах линейной алгебры, см., например, [4].)

Пусть $f : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ и $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$, тогда существует окрестность $U(x_0) \subset M$ такая, что $f \in \mathcal{D}(U(x_0))$, т. е. в любой точке $x \in U(x_0)$ существует первый дифференциал $df(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(x) dx_j \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, причем $\mathrm{D}_j f(x) \in \mathcal{D}(x_0)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, так что $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \dot{U}(x_0)$ имеет место представление $\mathrm{D}_j f(x_0 + \mathbf{h}) - \mathrm{D}_j f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) \cdot h_i + o_j(||\mathbf{h}||_n)$ $(\mathbf{h} \to 0)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$. Рассмотрим при $x_0 + \mathbf{h} \in \dot{U}(x_0)$ и $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^n$ разность

$$df(x_0 + \mathbf{h})\mathbf{k} - df(x_0)\mathbf{k} = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{D}_j f(x_0 + \mathbf{h}) - \mathrm{D}_j f(x_0)) k_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i + o_j(||\mathbf{h}||_n)) k_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i k_j + o_j(||\mathbf{h}||_n) k_j \ (\mathbf{h} \to 0).$$

В силу теоремы Юнга $\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(x_0)$ $\forall i \neq j$, так что, вводя билинейную форму $d^2 f(x_0) \overset{def}{=} \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) dx_i\, dx_j : (\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ имеем представление $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \dot{U}(x_0)$ и $\forall \mathbf{k} \in \mathbf{R}^n$

$$df(x_0 + \mathbf{h})\mathbf{k} - df(x_0)\mathbf{k} = d^2 f(x_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) + o(||\mathbf{h}||_n)||\mathbf{k}||_n \ (\mathbf{h} \to 0). \quad (7.3)$$

Равенство (7.3) можно принять за определение того, что $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$. Итак, если для функции $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0) \wedge \mathcal{D}(U(x_0))$ окрестность $U(x_0) \subset$

M, то существует второй дифференциал $d^2f(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n, \mathbf{R})$, участвующий в представлении (7.3), и тогда билинейная форма

$$B(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \equiv d^2f(x_0)(\mathbf{h}, \mathbf{k}) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i k_j$$

является значением второго дифференциала $d^2f(x_0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}_i dx_i\right)^2 f(x_0)$ на паре векторов $(\mathbf{h}, \mathbf{k}) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$. Билинейной форме $B(\mathbf{h}, \mathbf{k})$ соответствует квадратическая форма

$$\Phi(\mathbf{h}) \equiv B(\mathbf{h}, \mathbf{h}) \equiv d^2f(x_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j,$$

причем матрица Гессе $(\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0))$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ квадратической формы $\Phi(\mathbf{h})$ – симметрическая, поскольку в силу теоремы Юнга $\mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) = \mathrm{D}_j \mathrm{D}_i f(x_0)$ $\forall i \neq j$.

Т е о р е м а (достаточное условие существования локального экстремума для дважды дифференцируемой функции). *Пусть* $f : M \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ *и существует шар* $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset M$ *такой, что* $f \in \mathcal{D}(\text{Ш}_\delta(x_0)) \wedge \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$. *Пусть* $df(x_0) = 0$ *(так что* $\mathrm{D}_i f(x_0) = 0$; $i = 1, 2, \ldots, n$). *Тогда:*

1) если квадратическая форма $\Phi(\mathbf{h}) \equiv d^2f(x_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h}) = \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \times \mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j$ *– положительно (отрицательно) определенная, то функция* $f(x)$ *имеет в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ *локальный минимум (локальный максимум);*

2) если квадратическая форма $\Phi(\mathbf{h}) \equiv d^2f(x_0)(\mathbf{h}, \mathbf{h})$ *– неопределенная форма, то функция* $f(x)$ *не имеет в точке* $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ *локального экстремума.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in \mathcal{D}(\text{Ш}_\delta(x_0))$ и $f \in \mathcal{D}^{(2)}(x_0)$, то к функции $f(x)$ в окрестности $\text{Ш}_\delta(x_0) \subset M$ применима теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, в силу которой имеем

$$f(x_0 + \mathbf{h}) = f(x_0) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(x_0) h_j + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j +$$

$$+ o(||\mathbf{h}||_n^2)\ (\mathbf{h} \to 0)\ \forall x_0 + \mathbf{h} \in \dot{\text{Ш}}_\delta(x_0)$$

или в силу условий теоремы $\mathrm{D}_j f(x_0) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ $\forall x_0 + \mathbf{h} \in \dot{\text{Ш}}_\delta(x_0)$ имеем представление

$$f(x_0 + \mathbf{h}) - f(x_0) = 1/2 \cdot \sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i \mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j + o(||\mathbf{h}||_n^2)\ (\mathbf{h} \to 0).$$

1) Пусть теперь $\Phi(\mathbf{h}) \equiv d^2 f(x_0)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j$ – положительно определенная квадратическая форма, тогда по лемме существует постоянная $c > 0$ такая, что $\forall \mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ имеет место

$$\sum_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0) h_i h_j \geq c \cdot ||\mathbf{h}||_n^2$$

(и, в частности, для $\mathbf{h} \in \mathbf{R}^n$ таких, что $x_0 + \mathbf{h} \in \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$). Но тогда $\forall x \in \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ имеем оценку $f(x) - f(x_0) \geq 1/2 \cdot (c + o(1))\ \rho^2(x, x_0)$ $(x \to x_0)$. Но по определению символа $o(1)$ $(x \to x_0)$ $\exists \delta_1 > 0$ такое, что $c + o(1) \geq c/2 > 0\ \forall x \in \dot{\mathrm{Ш}}_{\delta_1}(x_0) \subset \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$, и тогда $f(x) - f(x_0) \geq c\rho^2(x, x_0)/4 > 0\ \forall x \in \dot{\mathrm{Ш}}_{\delta_1}(x_0)$, т. е. $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ есть точка (даже строгого) локального минимума функции $f(x)$.

2) Пусть квадратическая форма $\Phi(\mathbf{h},\mathbf{h}) \equiv d^2 f(x_0)(\mathbf{h},\mathbf{h})$ – неопределенная форма. Тогда $\exists \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \in \mathbf{R}^n$ такие, что $||\mathbf{h}_l||_n > 0$ $(l = 1, 2)$ и $\Phi(\mathbf{h}_1) = c_1 > 0$, $\Phi(\mathbf{h}_2) = c_2 < 0$. Но тогда $\exists \delta_0 > 0$ такое, что $x_0 + t \cdot \mathbf{h}_l \in \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)\ \forall t \in (-\delta_0, \delta)$ $(l = 1, 2)$, откуда $f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}_l) - f(x_0) = t^2/2 \cdot \sum\limits_{i,j=1}^{n} \mathrm{D}_i\mathrm{D}_j f(x_0) h_i^{(l)} \cdot h_j^{(l)} + t^2 o_l(1)$ $(t \to 0)$, т. е. $f(x_0 + t\mathbf{h}_l) - f(x_0) = t^2(c_l + o_l(1))/2$ $(t \to 0)$. В силу определения символов $o_l(1)$ $(t \to 0)$ $\exists \delta_1 \in (0, \delta_0)$ такое, что $c_1 + o_1(1) \geq c_1/2 > 0$, $c_2 + o_2(1) \leq c_2/2 < 0\ \forall |t| < \delta_1$, и тогда $f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}_1) - f(x_0) > 0$, $f(x_0 + t \cdot \mathbf{h}_2) - f(x_0) < 0\ \forall x_0 + t \cdot \mathbf{h}_l \in \dot{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ $(l = 1, 2)$, т. е. точка $x_0 \in \overset{\circ}{M}$ не может быть точкой локального экстремума функции $f(x)$.

З а м е ч а н и е. Если квадратическая форма

$$\Phi(\mathbf{h}) \equiv d^2 f(x_0)(\mathbf{h},\mathbf{h})$$

является полуопределенной квадратической формой, то функция $f(x)$ в точке $x_0 \in \overset{\circ}{M}$, где $\mathrm{D}_i f(x_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, может иметь локальный экстремум, а может и не иметь его (это сомнительный случай, требующий дополнительного исследования).

П р и м е р. Исследовать на экстремум функцию $f(x, y) = x^2 + (y - x)^2$. Очевидно, имеем $\mathrm{D}_1 f(x, y) = 2x$, $\mathrm{D}_2 f(x, y) = 2(y - 1)$, $\mathrm{D}_1^2 f(x, y) = 2$, $\mathrm{D}_1\mathrm{D}_2 f(x, y) = \mathrm{D}_2\mathrm{D}_1 f(x, y) = 0$, $\mathrm{D}_2^2 f(x, y) = 2$. Тогда $\mathrm{D}_1 f(0, 1) = \mathrm{D}_2 f(0, 1) = 0$ и $d^2 f(0, 1)(\mathbf{h},\mathbf{h}) = 2(\mathbf{h}_1^2 + \mathbf{h}_2^2) > 0\ \forall ||\mathbf{h}||_2 > 0$ – положительно определенная квадратическая форма, т. е. точка $(0, 1)$ есть точка локального минимума $f(0, 1) = 0 = \min\limits_{\mathbf{R}^2} f(x, y)$ (это даже точка абсолютного минимума этой функции).

§ 8. Обратные функции

В §2 гл. 2 изучался вопрос о решении линейного уравнения вида $Ax = y$, где $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$.

Замечание. Пусть $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ и $A = (A_{ij})$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ – матрица морфизма A. В линейной алгебре было доказано утверждение $(\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)) \Leftrightarrow (\det A \neq 0)$.

Теперь рассмотрим вопрос о решении нелинейных уравнений вида $f(x) = y$, где $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

Теорема (достаточное условие существования гомеоморфизма). *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, G – открытое множество, $f \in C(G)$ и $\exists c > 0$ такое, что $||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \geq c \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n$ $\forall x_1, x_2 \in G$. Тогда отображение f осуществляет гомеоморфизм G на $f(G)$, так что существует обратная биекция $f^{-1} \in C(f(G))$, причем выполнена оценка Липшица $||\mathbf{f}^{-1}(y_1) - \mathbf{f}^{-1}(y_2)||_n \leq 1/c \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_n$ $\forall y_1, y_2 \in f(G)$.*

Доказательство. Поскольку $||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \geq c \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n$ $\forall x_1, x_2 \in G$, то $(f(x_1) = f(x_2)) \Leftrightarrow (x_1 = x_2)$, поэтому отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to f(G) \subset \mathbf{R}^n$ есть биекция и существует обратная биекция $f^{-1} : f(G) \to G$. Далее $\forall y_1, y_2 \in f(G)$ $\exists x_1, x_2 \in G$ такие, что $f(x_1) = y_1$ и $f(x_2) = y_2$, но тогда имеем оценки $||\mathbf{f}^{-1}(y_1) - \mathbf{f}^{-1}(y_2)||_n = ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \leq 1/c \cdot ||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n = 1/c \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_n$, т. е. $||\mathbf{f}^{-1}(y_1) - \mathbf{f}(y_2)||_n \leq 1/c \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_n$ $\forall y_1, y_2 \in f(G)$ и, в частности, $f^{-1} \in C(f(G))$. Но $f \in C(G)$, и поэтому отображение $f : G \to f(G)$ есть гомеоморфизм. Уточним теорему о принципе сжимающих отображений из §13 гл. 1 ч. III.

Теорема (о принципе сжимающих отображений). *Пусть отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ – сжимающее на замкнутом множестве $F \subset G$, причем $f(F) \subset F$. Тогда отображение f имеет единственную неподвижную точку в F.*

Доказательство. Применим метод последовательных приближений для решения уравнения $f(x) = x$, положив $x_0 \in F$ и $x_m = f(x_{m-1})$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$. Поскольку $f(F) \subset F$, то $x_m \in F$ $\forall m$. Но тогда, поскольку отображение f – сжимающее на $F \subset \mathbf{R}^n$, то последовательность (x_m) фундаментальна, и поэтому в полном пространстве $\mathbf{R}^n$ $\exists \lim\limits_{m \to +\infty} x_m = x \in \bar{F}$. Но множество F замкнуто, так что $x \in F$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в рекуррентном соотношении $x_m = f(x_{m-1})$ и учитывая, что $f \in C(F)$ (в силу того, что f – сжимающее на F), имеем $x = f(x)$, т. е. $x \in F$ есть неподвижная точка отображения f, единственная в силу сжимаемости f.

Замечание. Если условие $f(F) \subset F$ не выполнено, то отображение f, сжимающее на F, может не иметь в F неподвижной точки. Например, отображение $f : \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$, где $f(x) = 1 + x/2$ – сжимающее (с коэффициентом сжатия $1/2$) на отрезке $F = [0, 1]$, но не

имеет на этом отрезке неподвижной точки, поскольку $(f(x_0) = x_0) \Rightarrow (x_0 = 2\overline{\in}[0,1])$. (Заметим, что $f([0,1]) = [1,3/2] \not\subset [0,1]$.)

Т е о р е м а (о нелинейном возмущении). *Пусть* $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *и существует обратный морфизм* $A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ *(с нормой* $||A^{-1}|| = \alpha > 0$*). Пусть для отображения* $g : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *(где* G *– открытое множество) для внутренней точки* $x_0 \in G$ *существуют шар* $\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0) \subset G$ *и постоянная* $\beta > 0$ *(где* $0 < \alpha \cdot \beta < 1$*) такие, что имеет место оценка Липшица* $||\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2)||_n \leq \beta ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \ \forall x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0) \subset G$. *Тогда отображение* $f = A - g : \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ $(x \to Ax - g(x))$ *осуществляет гомеоморфизм* $\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ *на* $f(\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0))$*, причем:*

а) $||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \geq ((1/\alpha) - \beta) \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \ \forall x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$*;*

б) $\forall y \in \mathrm{Ш}_\sigma(f(x_0))$*, где* $\sigma = ((1/\alpha) - \beta) \cdot \delta > 0$*, уравнение* $f(x) = y$ *имеет единственное решение* $x \in \mathrm{Ш}_\delta(x_0)$*, т. е.* $\mathrm{Ш}_\sigma(f(x_0)) \subset f(\mathrm{Ш}_\delta(x_0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f(x) = Ax - g(x) \ \forall x \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$, то $Ax = \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)$, и поскольку $\exists A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, то $\mathbf{x} = A^{-1}(\mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x)) \ \forall x \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$. Но тогда, используя линейность морфизма A^{-1} и условие Липшица для отображения g, имеем $\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$

$$||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n = ||A^{-1}(\mathbf{f}(x_1) + \mathbf{g}(x_1)) - A^{-1}(\mathbf{f}(x_2) + \mathbf{g}(x_2))||_n =$$

$$= ||A^{-1}(\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)) + A^{-1}(\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2)||_n \leq$$

$$\leq ||A^{-1}|| \cdot (||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n + ||\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2)||_n) \leq$$

$$\leq \alpha \cdot ||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n + \alpha\beta \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n,$$

т. е. $(1 - \alpha\beta) \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \leq \alpha \cdot ||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n$, тем самым оценка а) доказана. Из оценки а) в силу теоремы (о достаточном условии существования гомеоморфизма) видим, что отображение $f = A - g$ осуществляет гомеоморфизм $\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ на $f(\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0))$. Для доказательства утверждения б) выберем любое (но фиксированное) $y \in \mathrm{Ш}_\sigma(f(x_0))$ и рассмотрим отображение $h : \mathrm{Ш}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ $(x \to h(x) = O + \mathbf{h}(x))$, положив $\mathbf{h}(x) = A^{-1}(\mathbf{g}(x) + \mathbf{y})$. Покажем, что тогда $(f(x) = y) \Leftrightarrow (x = h(x))$. В самом деле, поскольку $g = A - f$, то $\forall x \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ имеем $\mathbf{h}(x) = A^{-1}(Ax - \mathbf{f}(x) + \mathbf{y}) = \mathbf{x} + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x))$, т. е. $h(x) = x + A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x))$, откуда $(x = h(x)) \Leftrightarrow (A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x)) = 0)$ и (поскольку гомоморфизм A^{-1} обратен к A) $(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x) = 0) \Leftrightarrow (\mathbf{f}(x) = \mathbf{y}) \Leftrightarrow (f(x) = y)$.

Докажем, что функция h осуществляет сжимающее отображение замкнутого шара $\overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ в себя. Учитывая, что $||A^{-1}|| = \alpha$, имеем $\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathrm{Ш}}_\delta(x_0)$ оценки

$$||\mathbf{h}(x_1) - \mathbf{h}(x_2)||_n = ||A^{-1}(\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2))||_n \leq \alpha \cdot ||\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2)||_n \leq$$

$$\leq \alpha\beta \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n,$$

где $0 < \alpha\beta < 1$. Итак, h является сжимающим отображением на замкнутом шаре $\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \subset \mathbf{R}^n$. Докажем, что $h(\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)) \subset \text{Ш}_\delta(x_0)$. В самом деле, поскольку $\mathbf{h}(x_0) - \mathbf{x}_0 = A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x_0))$, то $\forall x \in \overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)$ имеем оценки

$$||\mathbf{h}(x) - \mathbf{x}_0||_n \le ||\mathbf{h}(x) - \mathbf{h}(x_0)||_n + ||\mathbf{h}(x_0) - \mathbf{x}_0||_n \le \alpha\beta \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_n +$$

$$+||A^{-1}(\mathbf{y} - \mathbf{f}(x_0))||_n \le \alpha\beta \cdot ||\mathbf{x} - \mathbf{x}_0||_n + \alpha \cdot ||\mathbf{y} - \mathbf{f}(x_0)||_n.$$

Но $||\mathbf{x}-\mathbf{x}_0||_n \le \delta$ и $(y \in \text{Ш}_\delta(x_0))) \Rightarrow (||\mathbf{y}-\mathbf{f}(x_0)||_n < \sigma)$, поэтому имеем строгое неравенство $||\mathbf{h}(x)-\mathbf{x}_0||_n < \alpha b\delta + \alpha\sigma = \alpha\beta\delta + \alpha((1/\alpha)-\beta)\delta = \delta$, т. е. $h(\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)) \subset \text{Ш}_\delta(x_0)$. Но тогда в силу уточненного принципа сжимающих отображений видим, что сжимающее отображение h должно иметь единственную неподвижную точку x в замкнутом шаре $\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)$, но, на самом деле, $x = h(x) \in \text{Ш}_\delta(x_0)$, так что $f(x) = y$. Итак, $\forall y \in \text{Ш}_\sigma(f(x_0))$ существует единственная $x \in \text{Ш}_\delta(x_0)$ такая, что $f(x) = y$, т. е. имеет место утверждение б) $\text{Ш}_\sigma(f(x_0)) \subset f(\text{Ш}_\delta(x_0))$.

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется локальным гомеоморфизмом в точке $x_0 \in G$, если существуют окрестности $U(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ и $V(f(x_0)) \subset f(G) \subset \mathbf{R}^n$ такие, что сужение $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ есть гомеоморфизм (так что $V(f(x_0)) = f(U(x_0))$).*

С л е д с т в и е (теорема о локальном гомеоморфизме). Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, где G – открытое множество и $x_0 \in G$. Пусть существует морфизм $A \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ такой, что для него существует обратный морфизм $A^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ с нормой $||A^{-1}|| = \alpha > 0$. Пусть существуют $\delta > 0$ и $\beta > 0$ (где $0 < \alpha\beta < 1$) такие, что $\forall x_1, x_2 \in \overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \subset G$ имеет место оценка $||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2) - A(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)||_n \le \beta \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n$. Тогда отображение f является локальным гомеоморфизмом в точке x_0, т. е. существуют окрестности $U(x_0) \subset G$ и $V(f(x_0)) \subset f(G)$ такие, что отображение $f : U(x_0) \to V(f(x_0)) \subset f(G)$ есть гомеоморфизм, при этом имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \ge ((1/\alpha - \beta) \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \, \forall x_1, x_2 \in U(x_0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Полагая $\mathbf{g} = \mathbf{f} - A : \overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \to \mathbf{R}^n$, видим, что $\forall x_1, x_2 \in \overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \subset G$ имеет место оценка Липшица $||\mathbf{g}(x_1) - \mathbf{g}(x_2)||_n \le \beta||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n$, где $0 < \alpha\beta < 1$, $\alpha = ||A^{-1}|| > 0$, но тогда в силу теоремы о нелинейном возмущении отображение f является гомеоморфизмом шара $\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ на $f(\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)) \subset \mathbf{R}^n$, причем существует открытый шар $\text{Ш}_\sigma(f(x_0)) \equiv V(f(x_0))$ такой, что $\text{Ш}_\sigma(f(x_0)) \subset f(\text{Ш}_\delta(x_0))$. Далее, поскольку при непрерывном отображении $f : \text{Ш}_\delta(x_0) \to f(\text{Ш}_\delta(x_0))$ «прообраз открытого множества – открыт», то множество $U(x_0) \equiv f^{-1}(V(f(x_0))) \subset \text{Ш}_\delta(x_0)$ является окрестностью точки $x_0 \in \text{Ш}_\delta(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$, и поэтому сужение $f : U(x_0) \to V(f(x_0) = f(U(x_0)) = f(f^{-1}(V(f(x_0)))$ (где

$U(x_0) \subset \text{Ш}_\delta(x_0)$, $V(f(x_0)) \subset f(\overline{\text{Ш}}_\delta(x_0)))$ есть гомеоморфизм, т. е. f локально гомеоморфно в точке $x_0 \in G$. Кроме того, в силу а) теоремы о нелинейном возмущении имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \geq ((1/\alpha) - \beta) \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \, \forall x_1, x_2 \in U(x_0).$$

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathfrak{G} \subset \mathbf{R}^n$ (где G и $\mathfrak{G} = f(G)$ – открытые множества) называется диффеоморфизмом (класса $C^{(1)}$), если f является гомеоморфизмом G на $\mathfrak{G}$, причем $f \in C^{(1)}(G)$ и $f^{-1} \in C^{(1)}(\mathfrak{G})$.*

О п р е д е л е н и е. *Отображение $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется локальным диффеоморфизмом (класса $C^{(1)}$) в точке $x_0 \in G$, если существуют окрестности $U(x_0) \subset G \subset \mathbf{R}^n$ и $V(f(x_0)) \subset f(G) \subset \mathbf{R}^n$ такие, что сужение $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ есть диффеоморфизм (класса $C^{(1)}$), так что, в частности, $V(f(x_0)) = f(U(x_0))$.*

Т е о р е м а (о локальном диффеоморфизме). *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ и $f \in C^{(1)}(G)$, где G – открытое множество. Пусть $x_0 \in G$ и $\det \mathrm{D}f(x_0) \neq 0$. Тогда отображение f является локальным диффеоморфизмом в точке x_0, т. е. существуют окрестности $U(x_0) \subset G$ и $V(f(x_0)) = f(U(x_0))$ такие, что сужение $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ есть диффеоморфизм (класса $C^{(1)}$), причем $f \in C^{(1)}(U(x_0))$*

$$f^{-1} \in C^{(1)}(V(f(x_0))), \, \mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}(y = f(x)) \, \forall x \in U(x_0),$$

$$det \, \mathrm{D}f(x) \cdot det \, \mathrm{D}f^{-1}(y) = 1 \, (y = f(x)) \, \forall x \in U(x_0)$$

$$\left(\text{или } \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} f(x)) = 1 \, \forall x \in U(x_0)\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\det \mathrm{D}f(x_0) \neq 0$, то для морфизма $\mathrm{D}f(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ существует обратный морфизм $(\mathrm{D}f(x_0))^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$. Пусть $||\mathrm{D}f(x_0))^{-1}|| = \alpha_0 > 0$. Поскольку $f \in C^{(1)}(G)$, то в силу теоремы из §5 этой главы для $\beta_0 > 0$ (такого, что $0 < \beta_0 < 1/\alpha$) существует шар $\overline{\text{Ш}}_{\delta_0}(x_0) \subset G$ такой, что $\forall x_1, x_2 \in \overline{\text{Ш}}_{\delta_0}(x_0)$ имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2) - \mathrm{D}f(x_0)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)||_n \leq \beta_0 \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n.$$

Но тогда в силу теоремы о локальном гомеоморфизме существуют окрестности $U^{(1)}(x_0) \subset \overline{\text{Ш}}_{\delta_0}(x_0) \subset G$ и $V^{(1)}(f(x_0)) \subset f(G)$ такие, что сужение $f : U^{(1)}(x_0) \to V^{(1)}(f(x_0)) = f(U^{(1)}(x_0))$ есть гомеоморфизм, являющийся, в частности (поскольку $f^{-1} \in C(V^{(1)}(f(x_0))$ и $f \in C(U^{(1)}(x_0))$), открытым отображением, причем имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(x_1) - \mathbf{f}(x_2)||_n \geq ((1/\alpha_0) - \beta_)) \cdot ||\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2||_n \, \forall x_1, x_2 \in U^{(1)}(x_0).$$

Поскольку $(\mathrm{D}f \in C(G)) \Rightarrow (\mathrm{D}f \in C(U^{(1)}(x_0))$ и морфизм $\mathrm{D}f(x_0)$ имеет обратный $(\mathrm{D}f(x_0))^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, то по теореме о нелинейном возмущении из §2 этой главы существуют шар $\text{Ш}_{\delta_1}(x_0) \subset U^{(1)}(x_0)$ и постоянная $\alpha > 0$ такие, что $\forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}(x_0)$ морфизм $\mathrm{D}f(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$ имеет обратный $(\mathrm{D}f(x))^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, причем $||(\mathrm{D}f(x))^{-1}|| \leq \alpha$, и, в частности, имеет место оценка $||(\mathrm{D}f(x_1))^{-1} - (\mathrm{D}f(x_2))^{-1}|| = ||(\mathrm{D}f(x_2))^{-1}(\mathrm{D}f(x_2) - \mathrm{D}f(x_1))(\mathrm{D}f(x_1))^{-1}|| \leq \alpha^2 ||\mathrm{D}f(x_2) - \mathrm{D}f(x_1)||$ $\forall x_1, x_2 \in \text{Ш}_{\delta_1}(x_0)$. Но $\mathrm{D}f \in C(G)$, и поэтому из полученной оценки вытекает, что $(\mathrm{D}f)^{-1} \in C(\text{Ш}_{\delta_1}(x_0))$. Положим

$$U(x_0) = \text{Ш}_{\delta_1}(x_0) \subset U^{(1)}(x_0).$$

Напомним, что гомеоморфизм $f : U(x_0) \to V^{(1)}(f(x_0))$ является открытым отображением, поэтому множество $V(f(x_0)) = f(U(x_0))$ является окрестностью точки $f(x_0)$. Итак, существуют окрестности $U(x_0) \subset U^{(1)}(x_0)$ и $V(f(x_0)) \subset V^{(1)}(f(x_0))$ такие, что сужение $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ осуществляет гомеоморфизм $U(x_0)$ на $V(f(x_0))$, для которого $f \in C^{(1)}(U(x_0))$ и $\forall x \in U(x_0)$ существуют морфизм $\mathrm{D}f(x) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, а также обратный морфизм $(\mathrm{D}f(x))^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^n)$, причем $\mathrm{D}f \in C(U(x_0))$, $(\mathrm{D}f)^{-1} \in C(U(x_0))$, $||\mathrm{D}f(x))^{-1}|| \leq \alpha$ и $\forall x$, $x+\mathbf{h} \in U(x_0)$ имеет место оценка $||\mathbf{f}(x+\mathbf{h})-\mathbf{f}(x)||_n \geq ((1/\alpha_0)-\beta_0)||\mathbf{h}||_n$. Докажем, что $f^{-1} \in \mathcal{D}(y)$ $\forall y \in V(f(x_0))$, причем для $y = f(x)$ имеет место равенство $\mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}$. Пусть $y \in V(f(x_0))$ – любое, но фиксированное, тогда $\forall y + \mathbf{k} \in V(f(x_0))$ в силу биективности отображения $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ $\exists x$, $x + \mathbf{h} \in U(x_0)$ такие, что $y = f(x)$ и $y + \mathbf{k} = f(x + \mathbf{h})$, откуда $x = f^{-1}(y)$, $x + \mathbf{h} = f^{-1}(y + \mathbf{k})$ и $\mathbf{k} = \mathbf{f}(x+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(x)$, причем $||\mathbf{h}||_n \leq ||\mathbf{k}||_n/(1/\alpha_0) - \beta_0)$, т. е. $(||\mathbf{k}||_n \to 0) \Rightarrow (||\mathbf{h}||_n \to 0)$. Поскольку $f \in \mathcal{D}(x)$, то $\forall x + \mathbf{h} \in U(x_0) = O(x)$ имеет место представление $\mathbf{f}(x + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x) - \mathrm{D}f(x)\mathbf{h} = \mathbf{r}(\mathbf{h}) \cdot ||\mathbf{h}||_n$, где $\lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_n = 0$. Но тогда $\forall y, y + \mathbf{k} \in V(f(x_0))$ имеем

$$||\mathbf{f}^{-1}(y + \mathbf{k}) - \mathbf{f}^{-1}(y) - (\mathrm{D}f(x))^{-1}\mathbf{k}||_n =$$

$$= ||(\mathrm{D}f(x))^{-1}(-\mathbf{k} + \mathrm{D}\mathbf{f}(x)(\mathbf{f}^{-1}(y + \mathbf{k}) - \mathbf{f}^{-1}(y)))||_n \leq$$

$$\leq ||(\mathrm{D}f(x))^{-1}|| \cdot ||\mathbf{f}(x + \mathbf{h}) - \mathbf{f}(x) - \mathrm{D}f(x)\mathbf{h}||_n \leq \alpha \cdot ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_n \cdot ||\mathbf{h}||_n \leq$$

$$\leq (\alpha/((1/\alpha_0) - \beta_0)) \cdot ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_n \cdot |\mathbf{k}||_n.$$

Но $\lim\limits_{\mathbf{k}\to 0} ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_n = \lim\limits_{\mathbf{h}\to 0} ||\mathbf{r}(\mathbf{h})||_n = 0$, поэтому

$$\exists \lim_{\mathbf{k}\to 0} (1/||\mathbf{k}||_n) \cdot ||\mathbf{f}^{-1}(y + \mathbf{k}) - \mathbf{f}^{-1}(y) - (\mathrm{D}f(x))^{-1}\mathbf{k}||_n = 0,$$

т. е. $f^{-1} \in \mathcal{D}(y)$, где $y = f(x)$. В силу единственности производной имеем равенства $\mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}$, т. е. $\mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1} \circ f^{-1}(y)$ (где $y = f(x)$), но $f \in C(U(x_0))$ и $f^{-1} \in C(V(f(x_0)))$, поэтому

$((\mathrm{D}f(x))^{-1} \in C(U(x_0))) \Rightarrow$ (при $x = f^{-1}(y)$) $(\mathrm{D}f^{-1} \in C(V(f(x_0))))$, т. е. $f^{-1} \in C^{(1)}(V(f(x_0)))$, и поскольку

$$f \in C^{(1)}(U(x_0)),$$

то гомеоморфизм $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}$. Наконец, поскольку

$$(\mathrm{D}f^{-1})(f(x)) = (\mathrm{D}f(x))^{-1} \, \forall x \in U(x_0),$$

то при $y = f(x)$ имеем равенство для якобианов

$$\det \mathrm{D}f(x) \cdot \det \mathrm{D}f^{-1}(y) = 1 \, \forall x \in U(x_0)$$

или

$$\frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) \cdot \frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}(f(x)) = 1 \, \forall x \in U(x_0).$$

Замечание. Теорему о локальном диффеоморфизме обычно называют теоремой об обратной функции. Отметим попутно, что метод, использованный при доказательстве теоремы о локальном диффеоморфизме, позволяет доказать следующую теорему об обратной функции.

Теорема (об обратной функции). *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f \in \mathcal{D}(G)$, $x_0 \in G$ *и* $\mathrm{D}f \in C(x_0)$, *причем* $\det \mathrm{D}f(x_0) \neq 0$. *Тогда отображение* f *является локальным гомеоморфизмом в точке* x_0, *т. е. существуют окрестности* $U(x_0) \subset G$ *и* $V(f(x_0)) \subset f(G)$ *такие, что сужение* $f : U(x_0) \to V(f(x_0))$ *является гомеоморфизмом и для обратной биекции* $f^{-1} : V(f(x_0)) \to U(x_0)$ *имеем* $f^{-1} \in \mathcal{D}(V(f(x_0)))$, *причем* $\mathrm{D}f^{-1}(y) = (\mathrm{D}f(x))^{-1}$, *где* $y = f(x)$ *и* $\mathrm{D}f^{-1} \in C(y_0)$. (Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.)

Замечание. Условие $\det \mathrm{D}f(x_0) \neq 0$, фигурирующее в теоремах об обратных функциях, является лишь достаточным условием для существования обратной функции f^{-1}. Обратная функция f^{-1} в окрестности точки $y_0 = f(x_0) \in f(G)$ может существовать и в случае $\det \mathrm{D}f(x_0) = 0$. Например, для функции $f : x \to x^3$ имеем $\mathrm{D}f(0) = 0$, но обратная функция $f^{-1} : y \to \sqrt[3]{y}$ существует.

Замечание. Если якобиан $\det \mathrm{D}f(x_0) = 0$, то обратная функция f^{-1}, если она и существует, не может быть дифференцируемой в точке $y_0 = f(x_0)$. В самом деле, если бы $f^{-1} \in \mathcal{D}(y_0)$, то из теоремы об обратной биекции из § 4 этой главы имели бы равенство для якобианов $\det \mathrm{D}f(x_0) \cdot \det \mathrm{D}f^{-1}(y_0) = 1$, противоречащее условию $\det \mathrm{D}f(x_0) = 0$.

Следствие. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathcal{G} = f(G) \subset \mathbf{R}^n$ есть диффеоморфизм класса $C^{(1)}$, тогда $\det \mathrm{D}f(x) \neq 0 \, \forall x \in G$.

В самом деле, если бы $\exists x_0 \in G$ такая, что $\det \mathrm{D}f(x_0) = 0$, то в силу предыдущего замечания имели бы $f^{-1} \in \mathrm{D}(f(x_0))$, что противоречит условию $f^{-1} \in C^{(1)}(\mathcal{G})$ из определения диффеоморфизма.

Следствие (из теоремы о локальном диффеоморфизме). Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathfrak{G} = f(G) \subset \mathbf{R}^n$, $f \in C^{(1)}(G)$, где G – открытое множество, $\det \mathrm{D}f(x) \neq 0 \ \forall x \in G$. Тогда, если f биективно на G, то отображение f осуществляет диффеоморфизм (класса $C^{(1)}$) G на $\mathfrak{G} = f(G)$.

§ 9. Неявные функции

Пусть $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ (где $f : (x, y) \to f(x, y)$, $x \in G_1 \subset \mathbf{R}^n$, $y \in G_2 \subset \mathbf{R}^m$ $f(x, y) \in \mathbf{R}^m$), G_1, G_2 и $G_1 \times G_2$ – открытые множества в $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^{n+m}$ соответственно. Пусть уравнение $f(x_0, y) = 0$ имеет решение $y = y_0$, т. е. $f(x_0, y_0) = 0$. Исследуем вопрос о решении уравнения $f(x, y) = 0$ в окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 \in G_2$.

Определение. *Пусть* $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$, *где* $G_1 \subset \mathbf{R}^n$, $G_2 \subset \mathbf{R}^p$ – *открытые множества*, $x_0 \in G_1$, $y_0 \in G_2$, $(x_0, y_0) \in G$, $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$. *Пусть* $g : G_2 \subset \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$, *где* $g(y) = f(x_0, y)$. *Тогда частной производной* $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ *отображения* f *в точке* $(x_0, y_0) \in G$ *называется морфизм* $\mathrm{D}g(y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^m)$, *где* $\mathrm{D}g(y_0)$ *есть производная отображения* g *в точке* $y_0 \in G_2$.

Замечание. Если $f \in \mathcal{D}((x_0, y_0))$, то, очевидно, существуют $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^m)$.

Замечание. Пусть $f(x, y) = (f_1(x, y), \dots, f_m(x, y))$ и существует частная производная $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^m)$, тогда морфизму $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ соответствует $m \times p$ матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_i} f_i(x_0, y_0) \right)$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, p)$. Если при этом $p = m$, то частной производной $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ соответствует квадратная $m \times m$ матрица Якоби $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(x_0, y_0) \right)$ $(i, j = 1, 2, \dots, m)$ с якобианом

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y_1} f_1(x_0, y_0) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial y_m} f_1(x_0, y_0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial}{\partial y_1} f_m(x_0, y_0) & \dots & \dfrac{\partial}{\partial y_m} f_m(x_0, y_0) \end{vmatrix},$$

причем условие $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(y_1, \dots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0$ означает, что морфизм $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ имеет обратный морфизм

$\left(\dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m,\mathbf{R}^m)$, т. е. морфизм $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)$ является изоморфизмом $\mathbf{R}^m$ на $\mathbf{R}^m$.

Т е о р е м а (о неявной функции в случае $n \geq 1$, $m = 1$). *Пусть* $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^{n+1}_{x,y} \to \mathbf{R}^1$, $f \in C(G)$, *где* G_1, G_2 *и* G – *открытые множества,* $(x_0,y_0) \in G$, $f(x_0,y_0) = 0$ *и* $\forall (x,y) \in G = G_1 \times G_2$ $\exists \dfrac{\partial}{\partial y}f(x,y)$, *причем* $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C((x_0,y_0))$ *и* $\dfrac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0) \neq 0$. *Тогда существуют окрестности* $U(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ *и* $V(y_0) = (y_0-\delta, y_0+\delta) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^1$ *такие, что* $\forall x \in U(x_0)$ *уравнение* $f(x_1,\ldots,x_n;y) = 0$ *имеет единственное решение* $y = h(x_1,\ldots,x_n) \in V(y_0)$ *такое, что* $h(x_0) = y_0$, $f(x,h(x)) = 0$ $\forall x \in U(x_0)$, *и для функции* $h : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to V(y_0) \subset \mathbf{R}^1$ *имеем* $h \in C(U(x_0))$. *Если при этом* $\exists \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1)$, *то* $h \in \mathcal{D}(x_0)$ *и*

$$\mathrm{D}h(x_0) = -\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1),$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}h(x_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0,y_0)\,(j = 1,2,\ldots,n).$$

Если, наконец, $\forall (x,y) \in G$ *существует* $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^1)$ *и* $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, *то* $h \in C^{(1)}(U(x_0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, для определенности, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 2\alpha_0 > 0$. Поскольку $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C((x_0,y_0))$, то в силу локальных свойств непрерывной функции существуют окрестность $U^{(1)}(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ и $\delta > 0$ такие, что $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} \geq \alpha_0 > 0$ $\forall x \in U^{(1)}(x_0) \subset G_1$ и $\forall y \in [y_0-\delta, y_0+\delta] \subset G_2$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y) \geq \alpha_0 > 0\,\forall y \in [y_0-\delta, y_0+\delta],$$

то функция (от y) $f(x,y) \uparrow\uparrow$ на $[y_0-\delta, y_0+\delta]$ и, учитывая условие $f(x_0,y_0) = 0$, имеем $f(x_0,y_0-\delta) < 0$, $f(x_0,y_0+\delta) > 0$. Но $f \in C(G)$, так что, вновь используя локальные свойства непрерывной функции $f(x,y)$, видим, что существует окрестность $U(x_0) \subset U^{(1)}(x_0) \subset G_1$ такая, что $f(x,y_0-\delta) < 0$, $f(x,y_0+\delta) > 0$ $\forall x \in U(x_0) \subset G_1$. Но тогда при фиксированном $x \in U(x_0)$ функция $g(y) \equiv f(x,y)$ такова,

что $g \in C([y_0-\delta, y_0+\delta])$, $g(y) \uparrow\uparrow$ на $[y_0-\delta, y_0+\delta]$ и $g(y_0-\delta) < 0$, $g(y_0+\delta) > 0$. Тогда по теореме Больцано о промежуточных значениях непрерывной (числовой) функции $\exists y = h(x) \in (y_0-\delta, y_0+\delta)$ такое, что $g(y) = 0$. В силу строгой монотонности функции $g(y)$ это значение $y = h(x)$ единственно, так что, в частности, при $x = x_0$ имеем $y = y_0$ (поскольку $g(y_0) = f(x_0, y_0) = 0$). Итак, доказано, что существуют окрестности $U(x_0) \subset G_1$ и $V(y_0) = (y_0-\delta, y_0+\delta) \subset G_2$ такие, что уравнение $f(x, y) = 0\ \forall x \in U(x_0)$ имеет единственное решение $y = h(x) \in V(y_0)$ такое, что $h(x_0) = y_0$ и $f(x, h(x)) = 0\ \forall x \in U(x_0)$, где $h : U(x_0) \to V(y_0)$, причем $h(x_0) = y_0$.

1) Докажем, что $h \in C(U(x_0))$. Пусть $x, x+\Delta\mathbf{x} \in U(x_0)$, где положено $\Delta\mathbf{x} = \sum\limits_{j=1}^{n} \Delta x_j \cdot \mathbf{e}_j$. Поскольку

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq \alpha_0 > 0\, \forall (x, y) \in U(x_0) \times V(y_0),$$

то, применяя теорему о среднем к числовой функции $g(y) \equiv f(x+\Delta\mathbf{x}, y)$ на отрезке $[h(x), h(x+\Delta\mathbf{x})]$, имеем представление

$$f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x+\Delta\mathbf{x})) - f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y} f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x) + \vartheta \Delta h(x)) \cdot \Delta h(x)$$

(где $\Delta h(x) = h(x+\Delta\mathbf{x}) - h(x)$, $0 < \vartheta < 1$), откуда получаем оценку снизу

$$|f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x+\Delta\mathbf{x})) - f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x))| \geq \alpha_0 |\Delta h(x)|,$$

что в силу равенства $f(x+\forall\mathbf{x}, h(x+\Delta\mathbf{x})) = 0$ имеем $\forall x, x+\Delta\mathbf{x} \in U(x_0)$ оценку сверху

$$|h(x+\Delta\mathbf{x}) - h(x)| \leq (1/\alpha_0) \cdot |f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x))|. \tag{9.1}$$

Но $f \in C(G)$, так что $\exists \lim\limits_{\|\Delta\mathbf{x}\|_n \to 0} f(x+\Delta\mathbf{x}, h(x)) = f(x, h(x)) = 0$ и из (9.1) тогда следует, что $\exists \lim\limits_{\|\Delta\mathbf{x}\|_n \to 0} h(x+\Delta\mathbf{x}) = h(x)$, т. е. $h \in C(x)$ $\forall x \in U(x_0)$, и поэтому $h \in C(U(x_0))$.

2) Пусть теперь $\exists \dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$. Докажем, что тогда $h \in \mathcal{D}(x_0)$, причем

$$\mathrm{D}h(x_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$$

и, в частности,

$$\frac{\partial h(x_0)}{\partial x_j} = -\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_j} \Big/ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Замечая, что

$$h(x_0) = y_0,\ f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0 + \Delta\mathbf{x})) = f(x_0, y_0) = 0,$$

и полагая $\Delta h(x_0) = h(x_0 + \Delta\mathbf{x}) - h(x_0)$, имеем $\forall x_0 + \Delta\mathbf{x} \in U(x_0) \subset G_1$ (где $\Delta\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$) оценки

$$\left| h(x_0 + \Delta\mathbf{x}) - h(x_0) - \left(-\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right)^{-1} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j \right| =$$

$$= \left| \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)^{-1} \right| \cdot \left| -\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial y} \cdot \Delta h(x_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta\mathbf{x} \right| =$$

$$= (1/2\alpha_0) \left| \left[f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, y_0) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta\mathbf{x} \right]_1 + \right.$$

$$+ [f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0 + \Delta\mathbf{x})) - f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0)) -$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \cdot \Delta h(x_0) \right]_2 \Big| \leq (1/2\alpha_0)(I_1 + I_2).$$

Поскольку $\exists \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$, то имеем $I_1 = o_1(||\Delta\mathbf{x}||_n)$ $(||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0)$ и, в частности, $f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0)) - f(x_0, h(x_0)) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta\mathbf{x} + o_1(||\Delta\mathbf{x}||_n)$ $(||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0)$, откуда

$$|\Delta h(x_0) \leq (1/\alpha_0)|f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0))| =$$

$$= (1/\alpha_0)|f(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0)) - f(x_0, h(x_0))| =$$

$$= (1/\alpha_0) \left| \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta\mathbf{x} + o_1(||\Delta\mathbf{x}||_n) \right| = O(||\Delta\mathbf{x}||_n)\ (||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0).$$

Поскольку $\forall (x, y) \in U(x_0) \times V(y_0)\ \exists \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C((x_0, y_0))$, то по теореме Лагранжа о конечных приращениях (для числовой функции многих переменных) $\exists \vartheta \in (0, 1)$ такое, что

$$I_2 = \left| \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0 + \Delta\mathbf{x}, h(x_0) + \vartheta h(x_0)) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, h(x_0)) \right] \Delta h(x_0) \right| =$$

$$= o_2(|\Delta h(x_0)|) = o_2(O(||\Delta\mathbf{x}||_n)) = o_3(||\Delta\mathbf{x}||_n)(||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0).$$

Но тогда из нашего представления имеем

$$I_1 + I_2 = o_1(||\Delta\mathbf{x}||_n) + o_3(||\Delta\mathbf{x}||_n) = o_4(||\Delta\mathbf{x}||_n)(||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0),$$

т. е. $\forall x + \Delta\mathbf{x} \in \dot{U}(x_o)$ получено представление

$$h(x_0 + \Delta\mathbf{x}) - h(x_0) - \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta\mathbf{x} =$$

$$= o(||\Delta\mathbf{x}||_n)(||\Delta\mathbf{x}||_n \to 0),$$

означающее, что $h \in \mathcal{D}(x_0)$, причем

$$\mathrm{D}h(x_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1).$$

3) Пусть теперь $\forall (x, y) \in G$ существуют морфизм $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$ и $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$. Докажем, что тогда $h \in C^{(1)}(U(x_0))$. Заметим, что $\forall x, x + \Delta\mathbf{x} \in U(x_0)$, имеем $f(x, h(x)) = f(x + \Delta\mathbf{x}, h(x + \Delta\mathbf{x})) = 0$. Далее, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y} \geq \alpha_0 > 0$ и $|\Delta h(x)| \leq (1/\alpha_0)|f(x + \Delta\mathbf{x}, h(x))|$, причем $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C((x, y))$ $(y = h(x))$ и, как было показано выше (в 1)), $h \in C(U(x_0))$. Но тогда, как показано в 2) (при $x_0 \equiv x$), имеем $h \in \mathcal{D}(x)$ $\forall x \in U(x_0)$, причем

$$\mathrm{D}h(x) = \left(-\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^1)$$

$$(y = h(x),\ x \in U(x_0)).$$

Но тогда (поскольку $y = h(x)$, $h \in C(U(x_0))$) имеем $\mathrm{D}h \in C(U(x_0))$, т. е. $h \in C^{(1)}(U(x_0))$. Тем самым теорема о неявной функции случае $n \geq 1$, $m = 1$ доказана полностью.

Т е о р е м а (о неявной функции в случае $n \geq 1$ и $m \geq 2$). *Пусть* $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^n_x \to \mathbf{R}^m_y \to \mathbf{R}^m$, *где* G, G_1 *и* G_2 – *открытые множества,* $f \in C^{(1)}(G)$, $(x_0, y_0) \in G$, $f(x_0, y_0) = 0$ *и*

$$\det \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \equiv \frac{\partial (f_1, \ldots, f_m)}{\partial (y_1 \ldots, y_m)}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Тогда существуют окрестности $U(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ *и* $V(y_0) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^m$ *такие, что* $\forall x = (x_1, \ldots, x_n) \subset U(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ *система* m *уравнений с* $(n + m)$ *переменными*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0\ (i = 1, 2, \ldots, m)$$

имеет единственное решение $y = h(x) \subset V(y_0)$ *такое, что* $h(x_0) = y_0$, $f_i(x, h(x)) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $\forall x \in U(x_0)$, *причем* $h \in C^{(1)}(U(x_0))$ *и*

$$\mathrm{D}h(x) = -\left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$$

при $y = h(x)$.

Доказательство. Доказательство проведем по индукции (по m, где $m \geq 2$), следуя схеме Юнга, изложенной в [5]. Предполагая, что теорема верна для системы из $m-1$ уравнений, рассмотрим якобиан

$$\mathfrak{J}(x,y) = \frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(y_1,\dots,y_m)}(x,y) \equiv \det\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1} & \dots & \dfrac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}(x,y).$$

Пусть $\mathfrak{J}_{11}, \mathfrak{J}_{21}, \dots, \mathfrak{J}_{m1}$ – алгебраические дополнения элементов 1-го столбца определителя $\mathfrak{J}$, так что $\mathfrak{J} = \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\partial f_i}{\partial y_1}\mathfrak{J}_{i1}$. Поскольку по условию $\mathfrak{J}(x_0,y_0) \neq 0$, то хотя бы одно из алгебраических дополнений $\mathfrak{J}_{i1}(x_0,y_0)$ $(i = 1,2,\dots,m)$ отлично от нуля. Пусть, для определенности, $\mathfrak{J}_{11}(x_0,y_0) \neq 0$. Поскольку $\mathfrak{J}_{11} \in C(G)$, то существуют окрестности $U^{(1)}(x_0) \subset G_1$ и $V^{(1)} \subset G_2$ такие, что

$$\mathfrak{J}_{11}(x,y) \neq 0 \, \forall x \in U^{(1)}(x_0),\ \forall y \in V^{(1)}(y_0).$$

Рассмотрим систему $m-1$ уравнений $f_i(x,y_1,y') = 0$ $(i = 2,3,\dots,m)$, где положено $y' = (y_1,\dots,y_m)$. Поскольку

$$\mathfrak{J}_{11}(x_0,y_0) = \frac{\partial(f_2,\dots,f_m)}{\partial(y_2,\dots,y_m)}(x_0,y_1^0,y_0') \neq 0,$$

то по предположению индукции для этой системы уравнений верна теорема о неявной функции, в силу которой существуют окрестности $U^{(2)}(x_0) \subset U^{(1)}(x_0) \subset G_1$,

$$(y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2) \times V^{(2)}(y_0') \subset G_2 \subset R^{1+(m-1)}_{y_1,y'}$$

и существует отображение $g : U^{(2)}(x_0) \times (y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2) \subset \mathbf{R}^{n+1}_{x,y_1} \to V^{(2)}(y_0') \subset \mathbf{R}^{m-1}_{y'}$ такое, что $g \in C^{(1)}(U^{(2)}(x_0) \times (y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2))$, $g(x_0,y_1^0) = y_0'$, причем

$$f_i(x,y_1,g(x,y_1)) = 0 \ (i = 2,3,\dots,m). \tag{9.2}$$

Рассмотрим теперь функцию $f_1(x,y_1,y')$ и докажем, что для одного уравнения

$$f_1(x,y_1,g(x,y_1)) \equiv \Phi(x,y_1) = 0$$

выполнены условия теоремы о неявной функции (в случае $m = 1$), доказанной ранее. Отметим равенство

$$\Phi(x_0, y_1^0) = f_1(x_0, y_1^0, g(x_0, y_1^0)) = f_1(x_0, y_0) = 0$$

и заметим, что поскольку $f_1 \in C^{(1)}(G)$ и $g \in C^{(1)}(U^{(2)}(x_0) \times (y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2))$, то в силу теоремы о производной сложной функции имеем

$$\Phi \in C^{(1)}(U^{(2)}(x_0) \times (y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2)).$$

Проверим, что $\dfrac{\partial}{\partial y_1}\Phi(x_0, y_1^0) \neq 0$. В самом деле, поскольку $\Phi(x, y_1) \equiv f_1(x, y_1, g(x, y_1))$, то

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial f_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial}{\partial y_1} g_j \tag{9.3}$$

и, дифференцируя по y_1 тождества (9.2), имеем

$$0 = \frac{\partial f_i}{\partial y_1} + \sum_{j=2}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial g_j}{\partial y_1} \, (i = 2, \ldots, m). \tag{9.4}$$

Умножая (9.3) на алгебраическое дополнение $\mathfrak{J}_1$, а (9.4) на $\mathfrak{J}_{i1}$ и складывая, получаем равенство

$$\mathfrak{J}_{11} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \mathfrak{J}_{i1} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_j}{\partial y_1} \cdot \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \mathfrak{J}_{i1} \right].$$

Но из алгебры известно, что сумма произведений элементов данного столбца определителя $\mathfrak{J} = \det\left(\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j}\right)$ на соответствующие алгебраические дополнения $\mathfrak{J}_{ik}$ (элемента $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$) вычисляется по формулам

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \mathfrak{J}_{ik} = \mathfrak{J} \cdot \delta_{jk}, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_1} \cdot \mathfrak{J}_{i1} = \mathfrak{J} \text{ и } \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \cdot \mathfrak{J}_{i1} = 0$$

при $j = 2, 3, \ldots, m$, откуда имеем равенство

$$\mathfrak{J}_{11}(x_0, y_0) \cdot \frac{\partial}{\partial y_1}\Phi(x_0, y_0) = \mathfrak{J}(x_0, y_0).$$

Поскольку $\mathfrak{J}_{11}(x_0, y_0) \neq 0$, $\mathfrak{J}(x_0, y_0) \neq 0$, то доказано неравенство $\dfrac{\partial}{\partial y_1}\Phi(x_0, y_1^0) \neq 0$, позволяющее применить ранее доказанную теорему

о неявной функции к одному уравнению $\Phi(x, y_1) = 0$, в силу которой существуют окрестности $U(x_0) \subset U^{(2)}(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$, $(y_1^0 - \delta, y_1^0 + \delta) \subset (y_1^0 - \delta_2, y_1^0 + \delta_2)$ и отображение $\varphi : U(x_0) \subset G_1 \to (y_1^0 - \delta, y_1^0 + \delta)$ такое, что $\varphi \in C^{(1)}(U(x_0))$, $\varphi(x_0) = y_1^0$ $(\Phi(x_0, y_1^0) = 0)$, причем

$$\Phi(x, \varphi(x)) = 0 \, \forall x \in U(x_0). \tag{9.5}$$

Но тогда, вводя отображение $h : U(x_0) \to V(y_0) = (y_1^0 - \delta, y_1 + \delta) \times V^{(2)}(y_0') \subset G_2$, где $h(x) = (\varphi(x), g(x, \varphi(x)))$ (так что $h_1(x) = \varphi(x)$, $h_j(x) = g_j(x, \varphi(x))$ $(j = 2, 3, \ldots, m)$, в силу непрерывной дифференцируемости функций φ и g имеем по теореме о производной сложной функции $h \in C^{(1)}(U(x_0))$, причем $h(x_0) = (\varphi(x_0), g(x_0, \varphi(x_0))) = (y_1^0, y_0') = y_0$, а также (вспоминая (9.2), (9.3)) имеем $\forall x \in U(x_0) \subset G_1$

$$f_1(x, h(x)) \equiv f_1(x, \varphi(x), g(x, \varphi(x))) \equiv \Phi(x, \varphi(x)) = 0,$$

$$f_j(x, h(x)) \equiv f_j(x, \varphi(x), g(x, \varphi(x))) = 0 \, (j = 1, 2, 3, \ldots, m),$$

т. е. $f(x, h(x)) = 0 \, \forall x \in U(x_0)$, $h(x_0) = y_0$, $h \in C^{(1)}(U(x_0))$, чем доказана теорема о существовании неявной функции для системы $f(x, y) = 0$.

Докажем единственность решения $y = h(x)$. Допустим от противного, что в окрестности $U(x_0)$ существуют две не тождественно равные функции H, $h \in C^{(1)}(U(x_0))$ такие, что $H(x_0) = h(x_0) = y_0$;

$$H(x), h(x) \in V(y_0), f(x, H(x)) = f(x, h(x)) = 0 \, \forall x \in U(x_0).$$

Поскольку $f \in C^{(1)}(G)$, то, считая окрестности $U(x_0) \in G_1$ и $V(y_0) \subset G_2$ выпуклыми, можно применить теорему о среднем в интегральной форме, в силу которой имеем $\forall x \in U(x_0)$

$$0 = f(x, H(x)) - f(x, h(x)) =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)))(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)) \, d\lambda,$$

или в координатной форме $\forall x \in U(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$

$$\sum_{k=1}^{m} (H_k(x) - h_k(x)) \cdot \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x))) d\lambda = 0. \tag{9.6}$$

Таким образом, функция $\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)$ при любом фиксированном $x \in U(x_0)$ является решением однородной алгебраической системы (9.6). Поскольку $H(x_0) = h(x_0) = y_0$ и $H, h \in C(U(x_0))$, то имеем

$$\exists \lim_{x \to x_0} [h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x))] = y_0 \, \forall \lambda \in [0, 1]. \tag{9.7}$$

Поскольку $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k} \in C(U(x_0) \times V(y_0))$; $h, H \in C(U(x_0))$, то, используя выпуклость окрестности $V(y_0)$, в силу (9.7) видим, что $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Ш_\delta(x_0) \subset U(x_0)$ такой, что

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x))) - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_0, y_0)\right| <$$

$$< \varepsilon \, \forall x \in Ш_\delta(x_0) \, (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

откуда

$$\left|\int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)))d\lambda - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_0, y_0)\right| \equiv$$

$$\equiv \left|\int_0^1 \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_k}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x))) - \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_0, y_0)\right] d\lambda\right| < \varepsilon,$$

т. е.

$$\exists \lim_{x \to x_0} \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)))d\lambda =$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_0, y_0)d\lambda = \frac{\partial f_i}{\partial y_k}(x_0, y_0) \, (i, k = 1, 2, \ldots, m),$$

так что

$$\exists \lim_{x \to x_0} \det \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)))d\lambda =$$

$$= \det \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0.$$

Но тогда окрестность $U(x_0) \subset G_1$ можно считать столь малой, что для определителя системы (9.6) имеет место

$$\det \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} f(x, h(x) + \lambda(\mathbf{H}(x) - \mathbf{h}(x)))d\lambda \neq 0,$$

$\forall x \in U(x_0) \subset G_1$ и поэтому однородная линейная система (9.6) при любом фиксированном $x \in U(x_0)$ может иметь только нулевое решение, так что $H(x) \equiv h(x)$ в $U(x_0) \subset G_1$. Противоречие, доказывающее единственность неявной функции $y = h(x)$.

Замечание (о вычислении частных производных неявной функции). Для вычисления частных производных $\dfrac{\partial}{\partial x_j} h_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ функции $h \in C^{(1)}(U(x_0))$ продифференцируем по x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ тождества $f_i(x, h(x)) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, что дает

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_k} \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_j} \; (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n),$$

и поскольку существуют гомоморфизмы $\dfrac{\partial f}{\partial x} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$, $\mathrm{D}h \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, то имеем равенства

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, h(x)) + \frac{\partial}{\partial y} f(x, h(x)) \circ \mathrm{D}h(x) = 0.$$

Вспоминая, что в силу $\det \dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) \neq 0 \; \exists \left(\dfrac{\partial}{\partial y} f \right)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$, имеем при $y = h(x)$

$$\mathrm{D}h(x) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^{-1} \circ \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \in C(U(x_0))$$

и, в частности, для $h \in C^{(1)}(Ux_0))$ имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_j} h_k = -\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_{k-1}, x_j, y_{k+1}, \ldots, y_n)} \Big/ \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots n).$$

Замечание. Сравнение условий (гладкости) двух теорем о неявной функции, доказанных выше, показывает, что требование (в случае $n \geq 1$ и $m \geq 2$) $f \in C^{(1)}(G)$ является более жестким, чем требования $f \in C(G)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$ (в случае $n \geq 1$ и $m = 1$). Ниже будет приведена основная теорема о неявной функции (в случае $n \geq 1$ и $m \geq 1$) с условиями гладкости $f \in C(G)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y} \in C(G)$, метод доказательства которой сходен с проведенным в теореме о локальном диффеоморфизме из § 8. Отметим, впрочем, что, как показывает лекционная практика, эта современная методика воспринимается студентами–первокурсниками как более трудная в сравнении с классическим методом Юнга.

Предварительно докажем теорему.

Т е о р е м а. *Пусть* $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^m$, *где* $G_1 \subset \mathbf{R}^n$, $G_2 \subset \mathbf{R}^p$ *и* $G \subset \mathbf{R}^{n+p}$ *– открытые множества* $(x_0, y_0) \in G$ $(x_0 \in G_1,\ y_0 \in G_2)$, *и* $\forall (x, y) \in W((x_0, y_0)) \subset G$ *существует морфизм* $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^p, \mathbf{R}^m)$, *причем* $\dfrac{\partial}{\partial y} \in C((x_0, y_0))$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$ *такие, что имеет место оценка*

$$||\mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2) - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)||_m <$$

$$< \varepsilon ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_p \, \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1 \text{ и } \forall y_1, y_2 \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset G_2,$$

где $\text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \times \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset W((x_0, y_0)) \subset G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\dfrac{\partial}{\partial y} f \in C((x_0, y_0))$, то $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$ такие, что

$$\text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \times \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset W((x_0, y_0)) \text{ и}$$

$$\left| \frac{\partial}{\partial y_j} f_i(x, y) - \frac{\partial}{\partial y_j} f_i(x_0, y_0) \right| < \varepsilon / \sqrt{mp} \, \forall (x, y) \in$$

$$\in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \times \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \, (i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n).$$

Для фиксированного $x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0)$ определим функцию $g : \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \to \mathbf{R}^m$, положив $g(y) = f(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\mathbf{y}$ так, что

$$g_i(y) = f_i(x, y) - \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial}{\partial y_k} f_i(x_0, y_0) y_k \, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

откуда $\dfrac{\partial}{\partial y_j} g_i(y) = \dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(x, y) - \dfrac{\partial}{\partial y_j} f_i(x_0, y_0)$. Тогда имеем оценку $\sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{p} \left(\dfrac{\partial}{\partial y_j} g_i(y) \right)^2 < \varepsilon^2 \ \forall y \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0)$ и по теореме о среднем из § 5 этой главы имеем оценку $||\mathbf{g}(y_1) - \mathbf{g}(y_2)||_m \le M(g)||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_p < \varepsilon \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_p \, \forall y_1, y_2 \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0)$, т. е. $||\mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2) - \dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)||_m < \varepsilon \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_p \, \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1, \forall y_1, y_2 \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset G_2$.

О с н о в н а я т е о р е м а (о неявной функции (см. [7] ч. II 5.2.4, с. 128)). *Пусть* $f : G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^{n+m} \to \mathbf{R}^m$, $f \in C(G)$ *(где* $G_1 \subset \mathbf{R}^n$, $G_2 \subset \mathbf{R}^m$ *и* $G \subset \mathbf{R}^{n+m}$ *– открытые множества). Пусть* $(x_0, y_0) \in G$ $(x_0 \in G_1 \subset \mathbf{R}^n,\ y_0 \in G_2 \subset \mathbf{R}^m)$ $f(x_0, y_0) = 0$ *и* $\forall (x, y) \in G$ *существует морфизм* $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$, *причем*

$\frac{\partial}{\partial y} f \in C((x_0, y_0))$ *и* $\det \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$. *Тогда существуют окрестности* $U(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ *и* $V(y_0) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^m$ *такие, что* $\forall x \in U(x_0)$ *уравнение* $f(x, y) = 0$ *имеет единственное решение* $y = h(x) \in V(y_0)$ *такое, что* $h(x_0) = y_0$, $f(x, h(x)) = 0$ $\forall x \in U(x_0)$, *и для отображения* $h : U(x_0) \to V(y_0)$ *имеем* $h \in C(U(x_0))$. *Если, кроме того, существует морфизм* $\frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$, *то* $h \in \mathcal{D}(x_0)$ *и*

$$\mathrm{D}h(x_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m).$$

Наконец, если $\forall (x, y) \in G$ *существует* $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ *и* $\frac{\partial}{\partial x} f$, $\frac{\partial}{\partial y} f \in C(G)$, *то* $h \in C^{(1)}(U(x_0))$.

Доказательство. 1) Поскольку $\det \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$, то для морфизма $\frac{\partial}{\partial y} f(x_1, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ существует обратный морфизм $\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$. Пусть $\left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \right\| = \alpha_0 > 0$. Поскольку $\frac{\partial}{\partial y} \in C((x_0, y_0))$, то в силу предыдущей теоремы для $\beta_0 > 0$ такого, что $0 < \beta_0 < 1/\alpha_0$ существуют $\delta_i > 0$ $(i = 1, 2)$, для которых имеет место оценка

$$\left\| \mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2) - \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2) \right\|_m \leq \beta_0 \cdot \|\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2\|_m, \quad (9.8)$$

$\forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ и $\forall y_1, y_2 \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^m$, причем $\text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \times \text{Ш}_{\delta_2}^{(p)}(y_0) \subset G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^{n+m}$. Для фиксированного $x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1$ определим отображение $g_x : \text{Ш}_{\delta_2}^{(m)}(y_0) \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, положив $g_x(y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\mathrm{y} - \mathbf{f}(x, y) + f(x, y_0)$ $\forall y \in \text{Ш}_{\delta_2}^{(m)}(y_0) \subset \mathbf{R}^m$. Но тогда, полагая $F_x(y) = \mathbf{f}(x, y) - f(x, y_0)$, имеем $F_x = A - g_x : \text{Ш}_{\delta_2}^{(m)}(y_0) \subset G_2 \to \mathbf{R}^m$ $\forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1$ (причем $A = \frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)$ и $\|A^{-1}\| = \alpha_0 > 0$). Заметим, что $F_x(y_0) = 0$. Из оценки (9.8) для нелинейного возмущения g_x имеем оценку

$$\|g_x(y_1) - g_x(y_2)\|_m = \|\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)(\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2) -$$

$$-(\mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2))\|_m < \beta_0 \|\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_2\|_m,$$

где $0 < \alpha_0 \cdot \beta_0 < 1$. Замечая, что $f(x_0, y_0) = 0$ и $(f \in C(G)) \Rightarrow (f \in C((x_0, y_0)))$, видим, что $\delta_1 > 0$ можно выбрать столь малым, что имеет место оценка

$$||\mathbf{f}(x, y_0)||_m = ||\mathbf{f}(x, y_0) - \mathbf{f}(x_0, y_0)||_m < \sigma = ((1/\alpha_0) - \beta_0) \cdot \delta_2 > 0,$$

т. е. $f(x, y_0) \in \text{Ш}_\sigma^{(m)}(0)\ \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0)$. Но тогда в силу теоремы о нелинейном возмущении, примененной к отображению $F_x = A - g_x$, видим, что отображение $F_x = A - g_x : \text{Ш}_{\delta_2}^{(m)}(y_0) \subset G_2 \to \mathbf{R}^m\ \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1$ осуществляет гомеоморфизм окрестности $V(y_0) \equiv \text{Ш}_{\delta_2}^{(m)}(y_0) \subset G_2$ на $F_x(V(y_0)) \subset \mathbf{R}^m$, причем:

а) $||\mathbf{F}_x(y_1) - \mathbf{F}_x(y_2)||_m \equiv ||\mathbf{f}(x, y_1) - \mathbf{f}(x, y_2)||_m \geq ((1/\alpha_0) - \beta_0) \times ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_m\ \forall y_1, y_2 \in \text{Ш}_\delta^{(m)}(y_0) \subset G_2, \forall x \in \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1$;

б) $\forall z \in \text{Ш}_\sigma^{(m)}(F_x(y_0)) \equiv \text{Ш}_\sigma^{(m)}(0) \subset \mathbf{R}^m$, где $\sigma = ((1/\alpha_0) - \beta_0) \cdot \delta_2 > 0$, уравнение $F_x(y) = z$ имеет единственное решение в $V(y_0) \subset G_2\ \forall x \in U(x_0) \equiv \text{Ш}_{\delta_1}^{(n)}(x_0) \subset G_1$, и тогда, полагая $z = -f(x, y_0) \in \text{Ш}_\sigma^{(m)}(0)$, видим, что уравнение $F_x(y) = -f(x, y_0)$ имеет единственное решение $\forall x \in U(x_0) \subset G_1$. Но $(F_x(y) = -f(x, y_0)) \Leftrightarrow (f(x, y) = 0)$. Таким образом, в силу б) доказано, что существуют окрестности $U(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n$ и $V(y_0) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^m$ такие, что $\forall x \in U(x_0) \subset G_1$ существует единственное решение $y = h(x) \in V(y_0) \subset G_2$ уравнения $f(x, y) = 0$, так что $f(x, h(x)) = 0\ \forall x \in U(x_0)$ и, в частности, при $x = x_0$ имеем $f(x_0, h(x_0)) = 0$, но $f(x_0, y_0) = 0$, т. е. в силу единственности (решения) $h(x_0) = y_0$. Вводя отображение $h : U(x_0) \subset G_1 \subset \mathbf{R}^n \to Y(y_0) \subset G_2 \subset \mathbf{R}^m$, где $y = h(x)$, $h(x_0) = y_0$, $f(x, h(x)) = 0$, докажем, что $h \in C(U(x_0))$.

Пусть $x, x + \Delta\mathbf{x} \in U(x_0) \subset G_1$, тогда, полагая $y_1 = h(x + \Delta\mathbf{x})$ и $y_2 = h(x)$, имеем из оценки а) $||\mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, y_1) - \mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, y_2)||_m \geq ((1/\alpha_0) - \beta_0) \cdot ||\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2||_m$ оценку (учитывая, что $f(x + \Delta\mathbf{x}, h(x + \Delta\mathbf{x}) = 0$ $||\mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, h(x + \Delta\mathbf{x})) - \mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, h(x))||_m \geq ((1/\alpha_0) - \beta_0)||\mathbf{h}(x + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{h}(x)||_m$, откуда, учитывая равенство $f(x, h(x)) = 0$, получаем оценку

в) $||\mathbf{h}(x + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{h}(x)||_m \leq \alpha_0/(1 - \alpha_0\beta_0) \cdot ||\mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, h(x)) - \mathbf{f}(x, h(x))||_m$. Но $(f \in C(G)) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} ||\mathbf{f}(x + \Delta\mathbf{x}, h(x)) - \mathbf{f}(x, h(x))||_m = 0) \Rightarrow (\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} ||\mathbf{h}(x + \Delta\mathbf{x}) - \mathbf{h}(x)||_m = 0) \Rightarrow (h \in C(x)\ \forall x \in U(x_0)) \Rightarrow (h \in C(U(x_0)))$. Теорема о существовании и единственности неявной функции $y = h(x)$, определяемой уравнением $f(x, y) = 0$, доказана.

2) Пусть существует морфизм $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Докажем, что $h \in \mathcal{D}(x_0)$ и $\mathrm{D}h(x_0) = -\left(\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0)\right)^{-1} \circ \dfrac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$. Замечая, что $f(x_0, y_0) = 0$, $h(x_0) = y_0$,

$\left\|\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)^{-1}\right\| = \alpha_0 > 0$, имеем $\forall x_0+\Delta\mathbf{x}\in U(x_0)\subset G_1$ ($\Delta\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n$) оценки

$$\left\|\mathbf{h}(x_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{h}(x_0)-\left(-\partial\frac{\partial}{y}f(x_0,y_0)\right)^{-1}\circ\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}\right\|_m =$$

$$=\left\|-\left(\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)\right)^{-1}\left[-\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(\mathbf{h}(x_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{h}(x_0))-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}\right]\Big\|_m \le \alpha_0\,\|[\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0+\Delta\mathbf{x}))-$$

$$-\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0)))-\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(\mathbf{h}(x_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{h}(x_0))\Big]+$$

$$+\left[\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0))-\mathbf{f}(x_0,h(x_0))-\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}\right]\Big\|_m \le$$

$$\le\alpha_0(I_1(\Delta\mathbf{x})+I_2(\Delta\mathbf{x})),$$

где $I_1(\Delta\mathbf{x})=\|\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0+\Delta\mathbf{x}))-\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0))-\frac{\partial}{\partial y}f(x_0,y_0)(\mathbf{h}(x_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{h}(x_0))\|_m$, $I_2(\Delta\mathbf{x})=\left\|\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0))-f(x_0,h(x_0))-\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}\right\|_m$. Но в силу предположения 2) $\exists\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\in\mathfrak{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R}^m)$, поэтому имеем $\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0))-\mathbf{f}(x_0,h(x_0))=\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}+\gamma(\Delta\mathbf{x})\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n$, где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\|\gamma(\Delta\mathbf{x})\|_m=0$. Пусть $\varepsilon>0$ – любое, но фиксированное, тогда $\exists\delta_0(\varepsilon)>0$ такое, что в силу оценки (9.8) (где $\beta_0>0$ заменено на $\varepsilon>0$ и $y_1=h(x_0+\Delta\mathbf{x})$, $y_2=h(x_0)\in\text{Ш}^{(m)}_{\delta_0}(y_0)\subset V(y_0))$ $\forall\|\Delta\mathbf{x}\|_n<\delta_0$ имеем, учитывая оценку в), $0\le I_1(\Delta\mathbf{x})\le\varepsilon\|\mathbf{h}(x_0+\Delta\mathbf{x})-\mathbf{h}(x)\|_m\le\varepsilon\alpha_0/(1-\alpha_0\beta_0)\cdot\|\mathbf{f}(x_0+\Delta\mathbf{x},h(x_0))-\mathbf{f}(x_0,h(x_0))\|_m=\varepsilon\alpha_0/(1-\alpha_0\beta_0)\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\Delta\mathbf{x}+\gamma(\Delta\mathbf{x})\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n\right\|$. Поскольку $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\|\gamma(\Delta\mathbf{x})\|_m=0$, то можно считать $\delta_0(\varepsilon)>0$ столь малым, что $\|\gamma(\Delta\mathbf{x})\|_m<\varepsilon$ $\forall\|\Delta\mathbf{x}\|_n<\delta_0(\varepsilon)$. Но тогда $\forall\|\Delta\mathbf{x}\|_n<\delta_0(\varepsilon)$ имеем оценки $0\le I_1(\Delta\mathbf{x})\le\varepsilon\alpha_0/(1-\alpha_0\beta_0)\left(\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\right\|+\varepsilon\right)\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n$ и $0\le I_2(\Delta\mathbf{x})\le\|\gamma(\Delta\mathbf{x})\|_m\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n<\varepsilon\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n$. Итак, $\forall\|\Delta\mathbf{x}\|_n<\delta_0(\varepsilon)$ имеем оценку $I_1(\Delta\mathbf{x})+I_2(\Delta\mathbf{x})\le\varepsilon(\alpha_0/(1-\alpha_0\beta_0)\cdot\left\|\frac{\partial}{\partial x}f(x_0,y_0)\right\|+\varepsilon+1)\cdot\|\Delta\mathbf{x}\|_n$, т. е.

$$\exists \lim_{\Delta x \to 0} \|\mathbf{h}(x_0 + \Delta \mathbf{x}) - \mathbf{h}(x_0) - \left[- \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)^{-1} \circ \right.$$

$$\left. \circ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \right] \Delta \mathbf{x} \Big\|_m \Big/ \|\Delta \mathbf{x}\|_n = 0.$$

Но это и означает, что $h \in \mathcal{D}(x_0)$, причем в силу единственности производной имеем равенство

$$\mathrm{D}h(x_0) = - \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x} f(x_0, y_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

чем утверждение 2) также доказано.

3) Пусть $\forall (x, y) \in G$ существует морфизм

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

причем $\dfrac{\partial}{\partial x} f$, $\dfrac{\partial}{\partial y} f \in C(G)$. Тогда, поскольку $\det \dfrac{\partial}{\partial y} f \leq 0$, то в силу теоремы о нелинейном возмущении из §2 этой главы существуют окрестность $W((x_0, y_0)) \subset G$ и постоянная $\alpha > 0$ такие, что $\forall (x, y) \in W((x_0, y_0))$ существует обратный морфизм

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m),$$

причем

$$\left\| \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^{-1} \right\| < \alpha \text{ и } \left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)^{-1} \in C(W((x_0, y_0))).$$

Но тогда из рассуждений, проведенных в 1) и 2), вытекает, что неявная функция $h : U(x_0) \subset G_1 \to V(y_0) \subset G_2$ (определяемая уравнением $f(x, y) = 0$) такова, что при $U(x_0) \times V(y_0) \subset W((x_0, y_0))$, $\forall x \in U(x_0)$ (при $y = h(x)$)

$$\exists \mathrm{D}h(x) = - \left(\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m),$$

причем поскольку

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)^{-1}, \frac{\partial}{\partial x} f \in C(W((x_0, y_0))) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} f \right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x} f \in C(W((x_0, y_0))) \right),$$

то $\mathrm{D}h \in C(U(x_0))$, т. е. $h \in C^{(1)}(U(x_0))$, чем утверждение 3) доказано. Отметим важные частные случаи теоремы о неявной функции.

Следствие 1. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $(x_0, y_0) \in G$, причем $f(x_0, y_0) = 0$, $f \in C^{(1)}(G)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существуют окрестности $U(x_0) \subset \mathbf{R}^1$ и $V(y_0) \subset \mathbf{R}^1$ такие, что $W((x_0, y_0)) = U(x_0) \times V(y_0) \subset G$, и существует единственная неявная функция $h : U(x_0) \to V(y_0)$, $h \in C(U(x_0))$, являющаяся решением уравнения $f(x, y) = 0$ в окрестности W, т. е. $f(x, h(x)) = 0 \ \forall x \in U(x_0)$, причем $h(x_0) = y_0$ и (считая, что $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) \neq 0 \ \forall (x, y) \in W((x_0, y_0))$) $h'(x) = -\mathrm{D}_1 f(x, h(x)) / \mathrm{D}_2 f(x, h(x)) \ \forall x \in U(x_0)$.

Пример. Рассмотрим $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, тогда $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y$. Пусть $f(x_0, y_i) = 0$, причем $y_i \neq 0$ $(i = 1, 2)$. Тогда $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_i) \neq 0$ и по теореме о неявной функции существуют (рис. 53) окрестности $W_i = U \times V_i$, в которых уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ однозначно разрешимо, т. е. $\exists y = h_i(x)$, $x \in U$, причем $f(x, h_i(x)) = 0 \ \forall x \in U$, $h_i(x) \in V_i$.

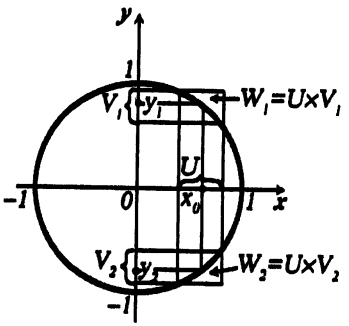


Рис. 53

Очевидно, $h_i(x) = (-1)^{i+1}(1 - x^2)^{1/2}$ $\forall x \in U$ $(i = 1, 2)$. При $x_0 = -1$ или $x_0 = 1$ теорема о неявной функции неприменима, поскольку $(f(\pm 1, y_0) = 0) \Rightarrow (y_0 = 0) \Rightarrow \dfrac{\partial}{\partial y} f(\pm 1, 0) = 0)$, и, в самом деле, для точек $(\pm 1, 0)$ не существует окрестности W_i, в которой уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ было бы однозначно разрешимо. Итак, уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ даже при выполнении условия $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$ разрешимо, вообще говоря, не однозначно, но при выполнении всех условий теоремы о неявной функции можно указать окрестности W_1 и W_2, в каждой из которых это уравнение разрешимо однозначно.

Следствие 2. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^1$, $(x_0, y_0) \in G$, $f(x_0, y_0) = 0$, $f \in C^{(1)}(G)$ и $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x_0, y_0) \neq 0$, где $x_0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда существуют окрестности $U^{(n)}(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ и $V^{(1)}(y_0) \subset \mathbf{R}^1$ та-

кие, что $W^{(n+1)}((x_0, y_0)) = U^{(n)}(x_0) \times V^{(1)}(y_0) \subset G$, и существует единственная неявная функция $h : U^{(n)}(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to V^{(1)}(y_0) \subset \mathbf{R}^1$, $h \in C^{(1)}(U^{(n)}(x_0))$, являющаяся решением уравнения $f(x, y) = 0$ в окрестности $W^{(n+1)}((x_0, y_0))$, т. е. $f(x_1, \ldots, x_n; h(x_1, \ldots, x_n)) = 0$ $\forall x \in U^{(n)}(x_0)$, причем $h(x_0) = y_0$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h(x) = -\frac{\partial}{\partial x_i} f(x, h(x)) \Big/ \frac{\partial}{\partial y} f(x, h(x))$$

$$\forall x \in U^{(n)}(x_0)\,(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Следствие 3 (теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнения). Пусть $f_i : G \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ $(i = 1, 2)$, $(x_0, y_0, z_0) \in G$, $f_i(x_0, y_0, z_0) = 0$, $f_i \in C^{(1)}(G)$ $(i = 1, 2)$,

$$\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$$

Тогда существуют окрестности $U(x_0 (\subset \mathbf{R}^1, V_1(y_0) \subset \mathbf{R}^1, V_2(z_0) \subset \mathbf{R}^1$ такие, что $W^{(3)}((x_0, y_0, z_0)) = U(x_0) \times V_1(y_0) \times V_3(z_0) \subset G$, и существует единственная пара функций

$$h_i : U(x_0) \subset \mathbf{R}^1 \to V_i,\ h_i \in C^{(1)}(U(x_0))\,(i = 1, 2),$$

являющихся решением системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y, z) = 0 \\ f_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

в окрестности $W^{(3)}((x_0, y_0, z_0))$, т. е.

$$\begin{cases} f_1(x, h_1(x), h_2(x)) = 0 \\ f_2(x, h_1(x), h_2(x)) = 0\ \forall x \in U(x_0), \end{cases}$$

причем

$$h_1'(x) = -\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, z)} \Big/ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)},$$

$$h_2'(x) = -\frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, x)} \Big/ \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y, z)}, \ .$$

Для проверки последних формул продифференцируем, пользуясь цепным правилом, тождества

$$f_i(x, h_1(x), h_2(x)) = 0,\ x \in U(x_0)\,(t = 1, 2),$$

тогда

$$\mathrm{D}_1 f_1 + \mathrm{D}_2 f_1 \cdot h_1' + \mathrm{D}_3 f_1 \cdot h_2' = 0,$$

$$D_1 f_2 + D_2 f_2 \cdot h_1' + D_3 f_2 \cdot h_2' = 0,$$

откуда в силу правила Крамера и вытекают формулы для $h_i'(x)$.

Замечание. Основная теорема о неявной функции является, очевидно, теоремой о существовании системы неявных функций

$$y_i = h_i(x_1, \dots, x_n)\ (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in U^{(n)}(x_0),\ y = (y_1, \dots, y_m) \in V^{(m)}(y_0),$$

являющихся единственным решением системы уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0\ (i = 1, 2, \dots, m)$$

в окрестности

$$W^{(n+m)}((x_0, y_0)) = U^{(n)}(x_0) \times V^{(m)}(y_0) \subset G = G_1 \times G_2 \subset \mathbf{R}^{n+m}.$$

§ 10. Условный экстремум функции многих переменных

Пусть $\varphi : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ $(m < n)$ – открытое множество.

Определение. *Множество* $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ *называется* $(n-m)$ *- мерным многообразием класса* $C^{(k)}$ $(k = 1, 2, \dots, +\infty)$ *в точке* $x_0 \in M$, *если существует окрестность* $U(x_0) \subset G$ *такая, что* $\varphi \in C^{(k)}(U(x_0))$ *и ранг матрицы Якоби* $(D_j \varphi_i(x_0))$ $(j = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m)$ *равен* m.

Замечание. Далее будет доказана теорема о ранге, в силу которой существует окрестность $V^{(m)}(0) \subset \varphi(U^{(n)}(x_0)) \subset \mathbf{R}^m$.

Определение. *Множество* $M \subset \mathbf{R}^n$ *называется* $(n-m)$*-мерным многообразием класса* $C^{(k)}$, *если* M *является* $(n-m)$*-мерным многообразием класса* $C^{(k)}$ $\forall x \in M$.

Теорема (о существовании касательной плоскости). *Пусть* $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = c\}$ *есть* $(n-m)$*-мерное многообразие класса* $C^{(1)}$ *и* $x_0 \in M$. *Тогда* $D\varphi(x_0)(x - x_0) = 0$ *есть уравнение касательной* $(n-m)$*-мерной аффинной плоскости к многообразию* M *в точке* $x_0 \in M$.

Доказательство. Поскольку $x_0 \in M$ и $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = c\}$ есть $(n-m)$-мерное многообразие класса $C^{(1)}$ в точке $x_0 \in M$, то матрица Якоби $(D_j \varphi_i(x_0))$ $(j = 1, 2, \dots, n; i = 1, 2, \dots, m)$ имеет ранг m. Пусть, для определенности,

$$\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \dots, x_m)}(x_0) \neq 0\ (\varphi \in C^{(1)}(G))$$

и положено $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n)$. Тогда в силу теоремы о неявной функции, примененной к уравнению $\varphi(x', x'') - c = 0$ (где $\varphi(x'_0, x''_0) - c = 0$), видим, что существуют окрестности $U^{(n-m)}(x''_0) \subset \mathbf{R}^{n-m}_{x''}$ и $V^{(m)}(x'_0) \subset \mathbf{R}^m_{x'}$ и отображение $h : U^{(n-m)}(x''_0) \to V^{(m)}(x'_0)$ такие, что в окрестности $W^{(n)}(x_0) = U^{(n-m)}(x''_0) \times V^{(m)}(x'_0)$ существует единственное решение $x' = h(x'')$ уравнения $\varphi(x', x'') - c = 0$, так что $\varphi(h(x''), x'') - c = 0$ $\forall x'' \in U^{(n-m)}(x''_0)$, причем $h(x''_0) = x'_0$, $h \in C^{(1)}(U^{(n-m)}(x''_0))$,

$$\mathrm{D}h(x''_0) = -\left(\frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x''}\varphi(x_0).$$

Таким образом, многообразие M допускает в окрестности $W^{(n)}(x_0)$ представление $M \cap W^{(n)}(x_0) \equiv \Gamma = \{(x', x'') \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^{n-m} = \mathbf{R}^n | x' = h(x''), x'' \in U^{(n-m)}(x''_0)\}$. Но график $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ имеет в точке $x_0 = (h(x''_0), x''_0) \in \Gamma$ $(n-m)$-мерную аффинную касательную плоскость с уравнением $\mathrm{x}' - \mathrm{x}'_0 = \mathrm{D}h(x''_0)(x'' - x''_0)$, которую и естественно назвать аффинной касательной $(n-m)$-мерной плоскостью к многообразию M в точке $x_0 \in M$. Но тогда имеем

$$\mathrm{x}' - \mathrm{x}'_0 = -\left(\frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x_0)\right)^{-1} \circ \frac{\partial}{\partial x''}\varphi(x_0)(\mathrm{x}'' - \mathrm{x}''_0),$$

и поскольку гомоморфизм $\dfrac{\partial}{\partial x'}\varphi(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ имеет обратный $\left(\dfrac{\partial}{\partial x'}\varphi(x_0)\right)^{-1} \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^m)$ (т. е. осуществляет изоморфизм $\mathbf{R}^m$ на $\mathbf{R}^m$), то имеем

$$\frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x_0)(\mathrm{x}' - \mathrm{x}'_0) + \frac{\partial}{\partial x''}\varphi(x_0)(\mathrm{x}'' - \mathrm{x}''_0) = 0,$$

что эквивалентно (проверить самим) уравнению

$$\mathrm{D}\varphi(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0.$$

Замечание. Если $m = 1$, то многообразие $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | f(x) = f(x_0)\}$ является поверхностью уровня для числовой функции $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и тогда уравнение касательной гиперплоскости к $(n-1)$-мерному многообразию M класса $C^{(1)}$ в точке $x_0 \in M$ имеет вид

$$(\mathrm{D}f(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0) \Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)(x_j - x_j^0) = 0\right),$$

так что, как это следует из аналитической геометрии, вектор-градиент

$$\operatorname{grad} f(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)\mathbf{e}_j$$

является нормалью в точке $x_0 \in M$ к касательной гиперплоскости.

З а м е ч а н и е (о замене переменных в представлении для многообразия). Пусть $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ – $(n-m)$-мерное многообразие класса $C^{(1)}$. Тогда $\varphi \in C^{(1)}(G)$ и матрица Якоби $(\mathrm{D}_j\varphi_i(x_0))$ $(j = 1, 2, \ldots, n; i = 1, 2, \ldots, m)$ имеет ранг m $\forall x_0 \in G$, поэтому для фиксированной точки $x_0 \in M$ имеем при выборе надлежащей нумерации координатных осей $\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x_0) \neq 0$. Но поскольку $\mathrm{D}_j\varphi_i \in C(G)$ $\forall i, j$, то существует окрестность $U^{(n)}(x_0) \subset G$ такая, что

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x) \neq 0 \, \forall x \in U^{(n)}(x_0),$$

и тогда, в частности, линейные формы

$$d\varphi(x_0) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j\varphi_i(x_0)dx_j \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) \, (i = 1, 2, \ldots, m)$$

линейно независимы. (Отметим попутно, что имеет место и обратное утверждение: если в точке $x_0 \in M$ линейные формы $d\varphi(x_0)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ линейно независимы, то при $m < n$ множество $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ будет $(n-m)$-мерным многообразием класса $C^{(1)}$ в точке $x_0 \in M$.) Введем обозначения $x' = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{R}^m$, $x'' = (x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-m}$, $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbf{R}^m$ и в окрестности $W((0, x_0)) = V^{(m)}(0) \times U^{(n)}(x_0) \subset \mathbf{R}^{m+1}_{y,x}$ (где в силу «теоремы о ранге» из [8] т. 2, ч. VI, гл. 2 § 3) существует окрестность $V^{(m)}_{y_0} = V^{(m)}_0 \subset \varphi(U^{(n)}(x_0))$ рассмотрим уравнение $y = \varphi(x', x'')$ или (в координатной форме) систему m уравнений с $n+m$ переменными

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_m; x_{m+1}, \ldots, x_n) \, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

для которой при $x_0 \in M$ имеем $\varphi(x_0) \equiv \varphi(x'_0, x''_0) = 0$ $(y_0 = 0)$. Поскольку

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x) = \det \frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x) \neq o \, \forall x \in U^{(n)}(x_0),$$

то в силу теоремы о неявной функции, примененной к уравнению $\varphi(x', y'') - y = 0$ (где $\varphi(x'_0, x''_0) - 0 = 0$), видим, что существуют окрестности $U'_0 \equiv U^{(m)}(x'_0) \subset \mathbf{R}^m_{x'}$, $U''_0 \equiv U^{(n-m)}(x''_0) \subset \mathbf{R}^{n-m}_{x''}$,

$V_0 \equiv V^{(m)}(0) \subset \mathbf{R}^m_y$, $U_0 = U_0' \times U_0'' \subset U^{(n)}(x_0) \subset \mathbf{R}^n$ и отображение $h : V_0 \times U_0'' \subset \mathbf{R}^n \to U_0' \subset \mathbf{R}^m$ такие, что уравнение $\varphi(x', x'') - y = 0$ $\forall (y, x'') \in V_0 \times U_0''$ имеет единственное решение $x' = h(y, x'') \in U_0'$ такое, что $h \in C^{(1)}(V_0 \times U_0'')$, $\varphi(h(y, x''), x'') - y = 0$ $\forall (y, x'') \in V_0 \times U_0'' \subset \mathbf{R}^n$, причем $(h(0, x_0'') = x_0') \Rightarrow (\varphi(h(0, x_0''), x_0'') = \varphi(x_0', x_0'') = 0) \Rightarrow (y_0 = 0)$. Тем самым доказана возможность перехода в окрестности $W_0 = V_0 \times U_0' \times U_0'' \subset \mathbf{R}^{n+m}_{y,x',x''}$ от переменных (x', x'') к новым переменным (y, x'') по формулам $(x' = h(y, x'')) \Leftrightarrow (y = \varphi(x', x''))$, причем многообразия M имеем (при $U = U_0' \times U_0'' \subset G$) представления $M \cap U = \{(x', x'') \in U_0' \times U_0'' | \varphi(x', x'') = 0\} \equiv \{(y, x'') \in V_0 \times U_0'' | \varphi(h(y, x''), x'') = 0\} \equiv \{(y, x'') \in V_0 \times U_0'' | y = 0\}$ (так как $\varphi(h(y, x''), x'') = y$). Многообразие M в новых координатах (y, x'') имеет в окрестности $V_0 \times U_0''$ точки $(0, x_0'') \in M$ простое уравнение $y = 0$.

Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\varphi : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ $(1 \leq m < n)$ – открытое множество, и множество $M = \{x \in G | \varphi(x) = 0\}$ является $(n - m)$-мерным многообразием класса $C^{(1)}$.

О п р е д е л е н и е. *Точка $x_0 \in M$ называется точкой условного локального минимума (максимума) функции f на множестве M, если существует шар $\text{Ш}_\delta^{(n)}(x_0) \subset G$ такой, что $f(x) \geq f(x_0) (f(x) \leq f(x_0))$ $\forall x \in \text{Ш}_\delta^{(n)}(x_0) \cap M$.*

З а м е ч а н и е. Если существует шар $\text{Ш}_\delta^{(n)}(x_0) \subset G$ такой, что $f(x) > f(x_0)$ $(f(x) < f(x_1))$ $\forall x \in \text{Ш}_\delta^{(n)}(x_0) \cap M$, то точка $x_0 \in M$ называется точкой строгого локального условного минимума (максимума) функции f на множестве M. Отметим при этом, что если точка $x_0 \in M$ является точкой локального условного минимума или максимума функции f на множестве M, то $x_0 \in M$ называется точкой локального условного экстремума функции f на множестве M.

Т е о р е м а (необходимое условие существования локального условного экстремума). *Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\varphi : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ (при $1 \leq m \leq n$) – открытое множество. Пусть множество $M = \{x \in G | \varphi(x) = 0\} \subset \mathbf{R}^n$ является $(n - m)$-мерным многообразием класса $C^{(1)}$ в точке $x_0 \in M$, причем x_0 – точка локального условного экстремума функции f на множестве M. Пусть $f \in C^{(1)}(G)$. Тогда существуют постоянные $\lambda_i \in \mathbf{R}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ такие, что $df(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i d\varphi_i(x_0)$, или в координатной форме*

$$\mathrm{D}_j f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_j \mathrm{D}_j \varphi_i(x_0) \, (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Числа λ_i называются множителями Лагранжа, соответствующими точке локального условного экстремума $x_0 \in M$.

Доказательство. Поскольку $M-(n-m)$-мерное многообразие в точке $x_0 \in M$, то линейные формы

$$d\varphi_i(x_0) \in \mathfrak{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})\,(i = 1, 2, \ldots, m)$$

линейно независимы и существует окрестность $U \equiv U^{(n)}(x_0) \subset G$ такая, что в ней (при надлежащей нумерации координатных осей) имеем

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x) = \det \frac{\partial}{\partial x'}\varphi(x) \neq 0\, \forall x \in U.$$

Но тогда, как было замечено ранее, в окрестности $W^{(m+n)}((0, x_0)) = V^{(m)}(0) \times U_0' \times U_0'' \subset \mathbf{R}_y^m \times \mathbf{R}_{x'}^m \times \mathbf{R}_{x''}^{n-m}$ можно совершить замену переменных $(x', x'') \to (y, x'')$ по формулам $(x' = h(y, x'')) \Leftrightarrow y = \varphi(x', x''))$, причем $h : V_0 \times U_0'' \subset \mathbf{R}^n \to U_0' \subset \mathbf{R}^m$, $h \in C^{(1)}(V_0 \times U_0'')$ и $\varphi(h(y, x''), x'') = y\ \forall (y, x'') \in V_0 \times U_0''$, $h(0, x_0'') = x_0'$. В новых координатах (y, x'') имеем представление $M \cap U = \{(y, x'') \in V_0 \times U_0'' \subset G | y = 0\}$. Подставляя $x' = h(y, x'')$ в функцию $f(x', x'')$, получаем равенство $f(h(y, x''), x'') \equiv F(y_1, \ldots y_m; x_{m+1}, \ldots, x_n)$, причем поскольку $f \in C^{(1)}(G)$ и $h \in C^{(1)}(V_0 \times U_0'')$, то $F \in C^{(1)}(V_0 \times U_0'')$. Заметим, что если точка $x_0 \in M$ была точкой локального условного экстремума функции $f(x)$ на множестве M, то точка $(0, x_0'') \in M$ является точкой локального экстремума функции $F(y, x'')$ на множестве

$$M \cap U = \{(y, x'') \in V_0 \times U_0'' | y = 0\}.$$

Таким образом, функция $F(y, x'')$ при $(y, x'') \in M$ имеет вид $F(0, x'')$ и имеет локальный экстремум в точке $(0, x_0'')$. Но тогда в силу необходимого условия существования локального экстремума у дифференцируемой функции имеем $\dfrac{\partial}{\partial x_k}F(0, x_0'') = 0$ $(k = m+1, \ldots, n)$. Вычислим дифференциал функции $F(y, x'')$ в точке $(0, x_0'') \in M$

$$\mathrm{D}F\big|_{(y,x'')=(0,x_0'')} = \sum_{i=1}^{m} \mathrm{D}_i F(0, x_0'')dy_i + \sum_{k=m+1}^{n} \mathrm{D}_k F(0, x_0'')dx_k$$

и, полагая $\lambda_i = \mathrm{D}_i F(0, x_0'')$, имеем (учитывая, что $\mathrm{D}_k F(0, x_0'') = 0$ при $k = m+1, \ldots, n$) $dF(0, x_0'') = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i dy_i$. Вспоминая, что $F(y, x'') = f(h(y, x''), x'') \equiv (f \circ h)(y, x'')$, перейдем к старым переменным (x', x'') с помощью замены $(y = \varphi(x', x'')) \Leftrightarrow (h(y, x'') = x')$. Тогда $(F \circ \varphi)(x) \equiv F(\varphi(x', x''), x'') = f(h(y, x''), x'') = f(x', x'')$, т. е. $(F \circ \varphi)(x) = f(x)$, но тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала имеем (при $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$) $dF \circ \varphi|_{x=x_0} = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i d\varphi_i(x_0)$, где

$d\varphi_i(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{D}_k\varphi_i(x_0)dx_k$, т. е. $df(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i d\varphi = (x_0)$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е (о геометрическом смысле необходимого условия существования условного экстремума). Пусть $(n-m)$-мерное многообразие $M \subset \mathbf{R}^n$ класса $C^{(1)}$ определяется уравнениями $\varphi_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ $(1 \leq m < n)$. Тогда уравнения $\mathrm{D}\varphi_i(x)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ или

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j\varphi_i(x_0)(x_j - x_j^0)\,(i = 1, 2, \ldots, m) \tag{10.1}$$

являются уравнениями касательной аффинной $(n-m)$-мерной плоскости к многообразию M в точке $x_0 \in M$. С другой стороны, уравнение $f(x) = f(x_0)$ определяет гиперповерхность в $\mathbf{R}^n$, для которой уравнение $\mathrm{D}f(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0$ или (в координатной форме)

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{D}_j f(x_0)(x_j - x_j^0) = 0 \tag{10.2}$$

является уравнением касательной гиперплоскости к этой гиперповерхности в точке x_0. Соотношение $\mathrm{D}f(x_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{D}\varphi_i(x_0)$ означает, что гиперплоскость (10.2) содержит $(n-m)$-мерную плоскость (10.1) (так как $\left(\mathrm{D}f(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) \equiv \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{D}\varphi_i(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0\right) \Rightarrow$ $(\mathrm{D}f(x_0)(\mathrm{x} - \mathrm{x}_0) = 0)$.

З а м е ч а н и е. Пусть $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ и $\varphi : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, где $G \subset \mathbf{R}^n$ (при $m < n$) – открытое множество. Пусть множество $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ является $(n-m)$-мерным многообразием класса $C^{(1)}$. Рассмотрим отображение $F : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, где $F(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$, причем $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ – некоторые постоянные. Тогда для любой точки x_0 локального условного экстремума функции f на множестве M имеем $dF(x_0) = 0$ при некотором выборе постоянных (Лагранжа) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$. Тем самым задача об отыскании точек условного экстремума $x_0 \in M$ сводится к решению следующей системы $n + m$ уравнений с $n + m$ неизвестными: $x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m$: $\mathrm{D}_k F(x) \equiv \mathrm{D}_k f(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{D}_k \varphi_i(x) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, $\dfrac{\partial F(x)}{\partial \lambda_j} = \varphi_i(x) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

З а м е ч а н и е. Если $f, \varphi \in C^{(2)}(G)$, то можно показать (проделайте это самостоятельно), что для отыскания локального условного

экстремума функции $f(x)$ на $(n-m)$-мерном многообразии $M = \{x \in G \subset \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ класса $C^{(2)}$ нужно исследовать на обычный локальный экстремум функцию Лагранжа $F(x) = f(x) - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x)$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – найденные ранее множители Лагранжа. Рассматривая (в соответствии с достаточным признаком существования локального экстремума для дважды дифференцируемой функции) второй дифференциал функции Лагранжа $d^2F(x_0) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} F(x_0) dx_i\, dx_j$, нужно заметить, что из уравнений $\varphi_i(x) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, определяющих $(n-m)$-мерное многообразие M, следует, что при $x = x_0$ должны выполняться соотношения $d\varphi_i(x_0) = 0$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(x_0) dx_j = 0 \, (i = 1, 2, \ldots, m),$$

и в силу условия $\dfrac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_m)}(x_0) \neq 0$ можно выразить dx_i (при $i = 1, 2, \ldots, m$) линейно через «независимые» дифференциалы $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$. Найденные дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_m$ нужно подставить в $d^2F(x_0)$ и исследовать полученную квадратическую форму от $dx_{m+1}, \ldots, dx_n$ как обычно.

Пример. Пусть $\Phi(\mathbf{x}) \equiv \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ $(a_{ij} = a_{ji}\ \forall i \neq j)$ – квадратическая форма (в $\mathbf{R}^n$) и $M = \{x \in \mathbf{R}^n | \varphi(x) = 0\}$ (где $\varphi(x) \equiv \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - 1$) – $(n-1)$-мерное многообразие (единичная сфера) класса $C^{(2)}$. Найдем точки $x^{(1)}, x^{(2)} \in M$ такие, что $\Phi(\mathbf{x}^{(1)}) = \min\limits_{\|\mathbf{x}\|_n = 1} \Phi(\mathbf{x})$ и $\Phi(\mathbf{x}^{(2)}) = \max\limits_{\|\mathbf{x}\|_n = 1} \Phi(\mathbf{x})$, т. е. найдем точки $x^{(1)}$, $x^{(2)} \in M$ локального условного минимума и максимума квадратической формы Φ на единичной сфере M. Составим функцию Лагранжа $F(x) = \Phi(x) - \lambda\varphi(x)$, для которой имеем $(1/2)\dfrac{\partial}{\partial x_j} F(x) = a_{j1}x_1 + \ldots + (a_{jj} - \lambda)x_j + \ldots + a_{jn}x_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Использование необходимых условий существования локального условного экстремума дает систему $(n+1)$ уравнений для определения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и λ

$$(1/2)\frac{\partial}{\partial x_j} F(x) = 0 \, (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{10.3}$$

$$\|\mathbf{x}\|_n^2 \equiv \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1. \tag{10.4}$$

Система (10.3) является однородной линейной системой n уравнений для определения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которая имеет нетривиальное решение, если для ее определителя выполнено условие

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

В алгебре показывается, что уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ имеет только действительные корни (собственные значения квадратической формы Φ) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$. Каждому из собственных значений λ_k соответствует точка $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)}) \in M$, являющаяся решением системы (10.3), (10.4), при этом только в точке $x_n^{(k)} \in M$ возможно достижение локального условного экстремума функцией Φ на M. Пусть точке $x^{(k)} \in M$ соответствует собственное значение λ_k, тогда из (10.3), (10.4) имеем

$$(1/2)\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)} \frac{\partial}{\partial x_j} F(x^{(k)}) \equiv \Phi(\mathbf{x}^{(k)}) - \lambda_k ||\mathbf{x}^{(k)}||_n^2 = 0,$$

т. е. $\Phi(\mathbf{x}^{(k)}) = \lambda_k$ (так как $x^{(k)} \in M \Rightarrow ||\mathbf{x}^{(k)}||_n^2 = 1$), откуда попутно получаем формулы для вычисления наименьшего и наибольшего собственных значений для квадратической формы Φ

$$\lambda_1 = \min_{||\mathbf{x}||_n = 1} \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(1)}), \quad \lambda_n = \max_{||\mathbf{x}||_n = 1} \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}^{(n)}).$$

§ 11. Зависимые функции

О п р е д е л е н и е . *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *(где* $m \leq n$*)* $(f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ *и* $f \in C^{(1)}(G)$ *(где* G *– открытое множество в* $\mathbf{R}^n$*). Скажем, что числовая функция* f_m *зависима от числовых функций* $f_1, f_2, \ldots, f_{m-1}$ *на открытом множестве* $G \subset \mathbf{R}^n$*, если существует функция* $\Phi : \mathfrak{G} \subset \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}$, $\Phi \in C^{(1)}(\mathfrak{G})$ *(где* $\mathfrak{G}$ *– открытое множество в* $\mathbf{R}^{m-1}$ *и* $\mathfrak{G} \supset f_1(G) \times \ldots \times f_{m-1}(G)$*), причем* $f_m(x) = \Phi(f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x))$ $\forall x \in G$*. Система функций* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *называется в этом случае зависимой на множестве* $G \subset R^n$.

Т е о р е м а 1 (необходимое условие зависимости функций). *Если система функций* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *зависима на множестве* $G \subset \mathbf{R}^n$*, то ранг матрицы Якоби* $(\mathrm{D}_j f_i(x))$ $(i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n)$ $(2 \leq m \leq n)$ *меньше* m.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f_m(x)$ зависима от функций $f_1(x), \ldots, f_{m-1}(x)$ на множестве $G \subset \mathbf{R}^n$. Тогда существует

числовая функция $\Phi \in C^{(1)}(\mathfrak{G})$, $\Phi : \mathfrak{G} \subset \mathbf{R}^{m-1} \to \mathbf{R}$ такая, что $f_m(x) = \Phi(f_1(x), f_2(x), \dots, f_{m-1}(x))$ $\forall x \in G$. Но тогда $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f_m(x) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} \mathrm{D}_k \Phi \cdot \mathrm{D}_j f_k(x)$ $(j = 1, 2, \dots, n)$, что означает, что m-я строка матрицы Якоби $(\mathrm{D}_j f_i(x))$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ есть линейная комбинация $m - 1$ первых ее строк, так что ранг матрицы Якоби не может быть равен m, а потому меньше m.

Т е о р е м а 2. *Пусть* $f : G \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ $(2 \leq m \leq n)$, $f \in C^{(1)}(G)$ *(где* $G \subset \mathbf{R}^n$ *- открытое множество) и ранг матрицы Якоби* $(\mathrm{D}_j f_i(x))$ $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ *для системы* $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ $\forall x \in G$ *равен* p, *причем* $1 \leq p < m$ *и*

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда существует окрестность $U(x_0) \subset G$ *такая, что система* $f_1, \dots, f_p$ *не является зависимой на* $U(x_0)$ *и в то же время функция* f_j *при любом* $j = p+1, \dots, m$ *зависима от функций* $f_1, f_2, \dots, f_p$ *на* $U(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $f \in C^{(1)}(G)$ и

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x_0) \neq 0,$$

то в силу локальных свойств непрерывных функций существует окрестность $O^{(n)}(x_0) \subset G$ такая, что

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x_0) \neq 0 \, \forall x \in O^{(n)}(x_0),$$

но тогда в силу теоремы 1 система $f_1, \dots, f_p$ не является зависимой в окрестности $O^{(n)}(x_0) \subset G$. Введем обозначения $x = (x', x'') \in \mathbf{R}^n$, где $x' = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{R}^p$, $x'' = (x_{p+1}, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n-p}$, $y = (y_1, \dots, y_p) \in \mathbf{R}^p$ и $x_0 = (x_0', x_0'')$, $y_0 = (f_1(x_0), \dots, f_p(x_0))$. Рассмотрим систему p уравнений $y_i - f_i(x', x'') = 0$ $(i = 1, 2, \dots, p)$ в окрестности $O^{(p)}(y_0) \times O^{(n)}(x_0) \subset \mathbf{R}^{p+n}$. Поскольку $f_1, \dots, f_p \in C^{(1)}(G)$ и $\dfrac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x_0) \neq 0$, то существует окрестность $U(x_0) \subset O^{(n)}(x_0) \subset G$ такая, что

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_p)}{\partial(x_1, \dots, x_p)}(x) \neq 0, \; \forall x \in U(x_0).$$

Положим $F_p = (f_1, \dots, f_p) : U(x_0) \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$, тогда в силу теоремы о ранге (из ч. VI, т. II) существует окрестность $V^{(p)}(y_0) \subset F_p(U(x_0)) \subset \mathbf{R}^p$. Тогда $y_0 = F_p(x_0)$ и к уравнению $y_i - f_i(x', x'') = 0$ $(i = 1, 2, \dots, p)$, рассматриваемому в окрестности $V^{(p)}(y_0) \times U(x_0) \subset \mathbf{R}^{p+n}$, применима

теорема о неявной функции, в силу которой существуют окрестности $U_0' \equiv U^{(p)}(x_0') \subset \mathbf{R}^p$, $U_0'' \equiv U^{(n-p)}(x_0'') \subset \mathbf{R}^{n-p}$ и $V_0 \equiv V_0^{(p)}(y_0) \subset \mathbf{R}^p$ такие, что $U_0' \times U_0'' \subset U(x_0)$, $V_0 \subset O^{(p)}(y_0)$ и в окрестности $W_0 = V_0 \times U_0' \times U_0'' \subset \mathbf{R}_y^p \times \mathbf{R}_{x'}^p \times \mathbf{R}_{x''}^{n-p}$ существует единственное решение $h : V_0 \times U_0'' \subset \mathbf{R}^n \to U_0 \subset \mathbf{R}^p$ нашего уравнения такое, что $h \in C^{(1)}(V_0 \times U_0'')$, $h(y_0, x_0'') = x_0'$ и

$$y_i = f_i(h(y, x''), x'') \,\forall (y, x'') \in V_0 \times U_0'' \,(i = 1, 2, \ldots, p). \tag{11.1}$$

Рассмотрим $\forall t \geq 1$ функцию $f_{p+l}(x', x'')$ и сделаем в ней замену $x' = h(y, x'')$. Тогда получим (при $l = 1, 2, \ldots, m-p$) функцию $\Phi(y, x'') \equiv f_{p+l}(h(y, x''), x'')$. Докажем, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_l(y, x'') = 0 \,(j = p+1, \ldots, n; l = 1, 2, \ldots, m-p).$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_l(y, x'') = \sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_k f_{p+l} \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} h_k + \mathrm{D}_j f_{p+l} \,(j = p+1, \ldots, n).$$

Дифференцируя тождества (11.1) по x_j (при $j = p+1, \ldots, n$), получаем соотношения

$$\sum_{k=1}^{p} \mathrm{D}_k f_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} h_k + \mathrm{D}_j f_i = 0 \,(i = 1, 2, \ldots, p). \tag{11.2}$$

Следуя С. М. Никольскому [6], введем при фиксированном $j = p+1, \ldots, n$ векторы

$$\mathbf{a}^{(i)} = (\mathrm{D}_1 f_i, \ldots, \mathrm{D}_p f_i, \mathrm{D}_j f_i), \; \mathbf{b} = \left(\frac{\partial h_1}{\partial x_j}, \ldots, \frac{\partial h_p}{\partial x_j}, 1\right).$$

Тогда из (11.2) имеем

$$\left(\mathbf{a}^{(i)}, \mathbf{b}\right) = 0 \,(i = 1, 2, \ldots, p). \tag{11.3}$$

По условию теоремы имеем

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_p, f_{p+l})}{\partial(x_1, \ldots, x_p, x_j)}(x) = 0 \;\forall x \in G,$$

но тогда последняя строка этого определителя есть линейная комбинация предыдущих p строк, т. е. $\mathbf{a}^{(p+l)} = \sum\limits_{s=1}^{p} \mu_s \mathbf{a}^{(s)}$, и поэтому в силу (11.3) имеем

$$(\mathbf{a}^{(p+l)}, \mathbf{b}) = \sum_{s=1}^{p} \mu_s (\mathbf{a}^{(s)}, \mathbf{b}) = 0.$$

Но легко видеть, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi_l(y, x'') \equiv (\mathbf{a}^{(p+l)}, \mathbf{b}).$$

Таким образом, доказано, что $\dfrac{\partial}{\partial x_j}\Phi_l(y, x'') = 0$ $(j = p+1, \dots, n)$. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях к числовой функции $\Phi_l(y, x'')$, имеем $\forall x'' \in U_0''(x_0'')$ (при $\xi'' \in [x_0'', x'']$) $\Phi_l(y, x'') - \Phi_l(y, x_0'') = \sum\limits_{j=p+1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\Phi(y, \xi'')(x_j - x_j^0) = 0$. Тем самым доказано, что функция $\Phi_l(y, x'') \equiv \Phi_l(y)$ не зависит от x''. Но тогда при любом $l = 1, 2, \dots, m-p$ имеем равенства $f_{p+l}(h(y, x''), x'') \equiv \Phi_l(y)$, откуда, учитывая равенства $y_i = f_i(x)$ (при $i = 1, 2, \dots, p$), имеем

$$f_{p+l}(x_1, \dots, x_n) = f_{p+l}(x', x'') = f_{p+l}(h(y, x''), x'') \equiv$$

$$\equiv \Phi_l(y_1, \dots, y_p) = \Phi_l(f_1(x), \dots, f_p(x)) \, \forall x \in U^{(n)}(x_0) = U_0' \times U_0'',$$

т. е.

$$f_{p+l}(x) = \Phi_l(f_1(x), \dots, f_p(x)) \, \forall x \in U^{(n)}(x_0),$$

откуда и следует, что функция $f_{p+l}(x)$ (при $p + l = p+1, \dots, m$) зависима от системы функций $f_1(x), \dots, f_p(x)$ на $U^{(n)}(x_0) \subset G$.

§ 12. Разбиение единицы

О п р е д е л е н и е. *Семейство множеств $\{B_\alpha\}$ пространства $\mathbf{R}^n$ называется локально-конечным, если $\forall x \in \mathbf{R}^n$ существует окрестность $Ш_\rho(x)$ такая, что $Ш_\rho(x) \cap B_\alpha = \varnothing$ для всех индексов α, кроме конечного их числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m(x)}$.*

П р и м е р ы: 1) система $\{B_n\}$, где $B_n = [-n, n]$ $(n = 1, 2, \dots)$, не является локально-конечной;

2) система $\{B_n\}$, где $B_n = [n, n+1]$, локально-конечна при $n = 0, 1, 2, \dots$, так как $\forall x_0 > 0$ имеем $n_0 < x_0 \le n_0 + 1$ и $Ш_1(x_0) \cap B_n \ne \varnothing$ только при $n = n_0 - 1, n_0, n_0 + 1$.

З а м е ч а н и е. Если система множеств $\{B_\alpha\}$ локально-конечна в $\mathbf{R}^n$, то для любого компактного множества $K \subset \mathbf{R}^n$ существует не более конечного числа индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ таких, что $K \cap B_\alpha = \varnothing$ при $\alpha \ne \alpha_i$ $(i = 1, 2, \dots, m)$. В самом деле, поскольку система $\{B_\alpha\}$ локально-конечна в $\mathbf{R}^n$, то $\forall x_0 \in K$ $\exists Ш_{\rho_0}(x_0)$, такой, что $Ш_{\rho_0}(x_0) \cap B_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \ne \alpha_1, \dots, \alpha_{m(x_0)}$ и тогда $K \subset \bigcup\limits_{x_0 \in K} Ш_{\rho_0}(x_0)$. В силу компактности множества K существует конечное подпокрытие $\{Ш_{\rho_l}(x_l);\ l = 1, 2, \dots, M\}$ такое, что $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{M} Ш_{\rho_l}(x_l)$, и поэтому $K \cap B_\alpha = \varnothing$ $\forall \alpha \ne \alpha_i$, где $i = 1, 2, \dots, L = \max\limits_{l=1,2,\dots,M} m(x_l)$.

Замечание. Если $\{F_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ – локально-конечная система замкнутых множеств $(\overline{F}_n = F_n \ \forall n \in \mathbf{N})$, то множество $F = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} F_n$ также замкнуто $(\overline{F} = F)$. В самом деле, пусть $x_0 \in \overline{F}$, тогда $\text{Ш}_{\rho_0}(x_0) \cap F \neq \varnothing$ $(\forall \rho_0 > 0)$, и поскольку система $\{F_m\}$ локально-конечна, то существуют $m_0 \in \mathbf{N}$ и шар $\text{Ш}_{\rho_1}(x_0)$ такие, что $\text{Ш}_{\rho_1}(x_0) \cap F_k = \varnothing \ \forall k > m_0$. Но $x_0 \in \overline{F}$, поэтому $x_0 \in \overline{\bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m}$. Поскольку множество $F_m = \overline{F}_m$ замкнуто, то множество $\bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m$ также замкнуто, т. е. $\overline{\bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m} = \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m$. Таким образом, $x_0 \in \bigcup\limits_{m=1}^{m_0} F_m \subset \bigcup\limits_{m=1}^{+\infty} F_m = F$, т. е. $x_0 \in F$, так что множество $F = \overline{F}$ замкнуто.

Определение. *Пусть* $f : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ *(где* Ω *– открытое множество). Носителем* $(\operatorname{supp} f)$ *функции* $f(x)$ *называется замыкание множества всех точек* $x \in \Omega$, *для которых* $f(x) \neq 0$, *т. е.* $\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \Omega | f(x) \neq 0\}}$. *Функция* $f \in C(\Omega)$ *называется при этом финитной, если* $\operatorname{supp} f$ *– компактное множество.*

Примеры: 1) для функции $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1, \\ 1 - |x|, & |x| < 1 \end{cases}$ имеем $\{x \in \mathbf{R}^n | f(x) \neq 0\} = (-1, 1)$; $\operatorname{supp} f = [-1, 1]$, т. е. f финитна;

2) $\mathcal{D}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{Q}. \end{cases}$ Тогда $\{x \in \mathbf{R} | \mathcal{D}(x) \neq 0\} = C\mathbf{Q}$ и $\operatorname{supp} \mathcal{D} = (-\infty, +\infty)$ не компактен, т. е. $\mathcal{D}(x)$ не является финитной.

Определение. *Пусть множество* $A \subset \mathbf{R}^n$ *и* $\{\Omega_\alpha\}$ *– открытое покрытие* A *(т. е.* $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$, *где* Ω_α *– открытое* $\forall \alpha$*). Разбиением единицы класса* $C^{(k)}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, +\infty)$ *для множества* A, *подчиненным этому покрытию, называется система функций* $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, $e_i \in C^{(k)}(\Omega)$ *(где* $\Omega \supset A$ *– некоторое открытое множество) такая, что:*

1) $0 \leq e_i(x) \leq 1 \ \forall x \in \Omega$ *и* $\forall i$, *причем* $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x) = 1 \ \forall x \in A$;

2) $\forall i$ *носитель* $(\operatorname{supp} e_i)$ *функции* $e_i(x)$ *является компактным множеством, причем семейство* $\{\operatorname{supp} e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *образует локально-конечное покрытие множества* A *(т. е.* $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp} e_i$*), так что каждая точка* $x_0 \in A$ *имеет окрестность* $\text{Ш}_\rho(x_0)$, *в которой лишь конечное число функций* $e_i(x)$ *не равно тождественно нулю;*

3) $\forall i$ $\exists \alpha$ *такое, что* $\operatorname{supp} e_i \subset \Omega_\alpha$.

Замечание. В определении разбиения единицы фигурирует

ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x)$ $\forall x \in A$ и возникает вопрос о сходимости этого ряда. Однако в силу локальной конечности покрытия множества A системой $\{\operatorname{supp} e_i\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ любая точка $x_0 \in A$ (и даже некоторая ее окрестность в силу свойства 2)) может принадлежать лишь конечному числу (носителей) $\operatorname{supp} e_{i_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, m(x_0))$, а потому лишь конечное число функций $e_{i_k}(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, m(x_0))$ из системы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ отлично от нуля в точке x_0, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x_0) = \sum\limits_{k=1}^{m(x_0)} e_{ik}(x_0) = 1$ для любой точки $x_0 \in A$ содержит лишь конечное число отличных от нуля членов, а потому всегда сходится.

Л е м м а 1. *Для любого открытого множества $G \subset \mathbf{R}^n$ и для любого компактного множества $K \subset G$ существует функция $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ такая, что* $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \in \mathbf{R}^n \setminus G, \end{cases}$ $0 \le \varphi(x) \le 1$ $\forall x \in \mathbf{R}^n$, *причем носитель* $\operatorname{supp} \varphi$ *компактен и* $K \subset \operatorname{supp} \varphi \subset G$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала частный случай, когда $G \equiv \text{Ш}_R(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, \|x\|_n < R\}$ и $K \equiv \overline{\text{Ш}}_r(0) = \{x \in \mathbf{R}^n \,|\, \|x\|_n \le r\}$, причем $0 < r < R < +\infty$. Пусть $0 < r < R_0 < R < +\infty$. Построим вспомогательные функции

$$g(t) = \begin{cases} \exp\{-1/(t - r^2)\} \cdot \exp\{-1/(R_0^2 - t)\}, & r^2 \le t \le R_0^2 < R^2, \\ 0, & t \in (=\infty, +\infty) \setminus [r^2, R_0^2] \end{cases}$$

и

$$h(t) = \int\limits_t^{R_0^2} g(\tau)d\tau \Big/ \int\limits_{r^2}^{R_0^2} g(\tau)d\tau \,, \; t \in (-\infty, +\infty).$$

Очевидно, $h \in C^{(\infty)}((-\infty, +\infty))$, причем

$$h(t) = \begin{cases} 1, & -\infty < t \le r^2, \\ 0, & R_0^2 \le t < +\infty, \end{cases} \quad 0 \le h(t) \le 1 \, \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда для нашего частного случая двух концентрических шаров имеем

$$\varphi(x) \equiv h(\|\mathbf{x}\|_n^2) = \begin{cases} 1, & x \in K, \\ 0, & x \overline{\in} G, \end{cases} \quad 0 \le \varphi(t) \le 1 \, \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

$$K \subset \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\text{Ш}}_{R_0}(0) \subset \text{Ш}_R(0),$$

причем носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset G \equiv \text{Ш}_R(0)$ компактен (как замкнутое и ограниченное в $\mathbf{R}^n$ множество). Отметим, что функция $\|\mathbf{x}\|_n^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$ бесконечно дифференцируема, поэтому $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$.

Пусть теперь $K \subset G \subset \mathbf{R}^n$, где K – любое компактное множество, а G – любое открытое множество. Тогда $\forall x \in K \subset G$ существует открытый шар $\text{Ш}_{\rho(x)}(x)$ такой, что $\text{Ш}_{\rho(x)}(x) \subset \overline{\text{Ш}}_{\rho(x)}(x)) \subset G$, причем

$G \supset \bigcup\limits_{x \in K} Ш_{\rho(x)}(x) \supset K$. В силу компактности множества K существует открытое подпокрытие $\{Ш_{r_i}(x_i)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ множества K такое, что $G \supset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Ш}_{r_i}(x_i) \supset \bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{r_i}(x_i) \supset K$. Положим $K_i = \overline{Ш}_{r_i}(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где, очевидно, $0 < r_i < \rho(x_i, \partial G)$. Выберем $R_i > 0$ так, чтобы $0 < r_i < R_i < \rho(x_i, \partial G)$. Тогда

$$G \supset \overline{Ш}_{R_i}(x_i) \supset Ш_{R_i}(x_i) \supset K_i \, (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Для пары концентрических шаров $\{K_i, Ш_{R_i}(x_i)\}$ построим функцию

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, \, x \in K_i, \\ 0, \, x \in \overline{Ш}_{R_i}(x_i), \, \varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n), \end{cases}$$

$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1 \; \forall x \in \mathbf{R}^n, \; K_i \subset \operatorname{supp} \varphi_i \subset Ш_{R_i}(x_i) \subset G \, (i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда искомая функция $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = 1 - \prod_{i=1}^{m} (1 - (\varphi_i(x)) = \begin{cases} 1, \, x \in K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Ш}_{r_i}(x_i), \\ 0, \, x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i), \end{cases}$$

так как $(x \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i)) \Rightarrow (x \in C \bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i) = \bigcap\limits_{i=1}^{m} C Ш_{R_i}(x_i)) \Rightarrow (x \in C Ш_{R_i}(x_i) \; \forall i = 1, \ldots, m)$,

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \, \forall x \in \mathbf{R}^n, \, \varphi \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n),$$

причем $\operatorname{supp} \varphi \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i) \subset G$, т. е. $K \subset \operatorname{supp} \varphi \subset \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Ш}_{R_i}(x_i) \subset G$, так как $\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbf{R}^n | \varphi(x) \neq 0\}} \subset \overline{\bigcup\limits_{i=1}^{m} Ш_{R_i}(x_i)} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{Ш}_{R_i}(x_i)$, носитель $\operatorname{supp} \varphi \subset G$ компактен (как замкнутое и ограниченное в $\mathbf{R}^n$ множество) и $K \subset \operatorname{supp} \varphi \subset G$.

С л е д с т в и е. Пусть $f : (a_1, b_1) \to \mathbf{R}$, $f \in C^{(k)}((a_1, b_1))$ и $-\infty < a_1 < \alpha < a < b < \beta < b_1 < +\infty$, так что $[a, b] \subset (\alpha, \beta) \subset [\alpha, \beta] \subset (a_1, b_1)$. Тогда $\exists \psi \in C^{(\infty)}((-\infty, +\infty))$ такая, что

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \, x \in [a, b], \\ 0, \, x \overline{\in} (\alpha, \beta), \, 0 \leq \psi(x) \leq 1 \, \forall x \in (-\infty, +\infty), \end{cases}$$

$[a, b] \subset \operatorname{supp} \varphi \subset (\alpha, \beta)$, причем для финитной функции $F(x) = f(x) \cdot \psi(x)$ имеем $F \in C^{(k)}((-\infty, +\infty))$,

$$\mathrm{D}^l F(x) = \begin{cases} \mathrm{D}^l f(x), \, x \in [a, b], \\ 0, \, x \overline{\in} (\alpha, \beta), \end{cases}$$

$$\operatorname{supp} \mathrm{D}^l F \subset (\alpha, \beta)\ (l = 0, 1, 2, \ldots, k).$$

Теорема (о существовании разбиения единицы). *Пусть множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и $\{\Omega_\alpha\}$ - любое открытое покрытие множества A. Тогда существует разбиение единицы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ для множества A (класса $C^{(\infty)}$), подчиненное этому покрытию.*

Доказательство теоремы основано на следующей лемме:

Лемма 2. *Пусть множество $A \subset \mathbf{R}^n$ и $\{\Omega_\alpha\}$ - открытое покрытие множества A. Пусть существует не более чем счетное локально-конечное открытое покрытие $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ множества A такое, что: 1) для любого i существует компактное множество $K_i \subset U_i$; 2) $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} U_i \supset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} K_i \supset A$; 3) $\forall i\ \exists \alpha$ такое, что $K_i \subset U_i \subset \Omega_\alpha$. Тогда существует разбиение единицы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ для множества A (класса $C^{(\infty)}$), подчиненное покрытию $\{\Omega_\alpha\}$, причем $K_i \subset \operatorname{supp} e_i \subset U_i$, $\forall i$.*

Доказательство. Для любой пары (K_i, U_i) в силу леммы 1 существует функция $\varphi_i \in C^{(\infty)}(\mathbf{R}^n)$ такая, что

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, & x \in K_i, \\ 0, & x \overline{\in} U_i, \end{cases} \quad 0 \le \varphi_i(x) \le 1\ \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

$K_i \subset \operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$, причем носитель $\operatorname{supp} \varphi_i$ компактен. Поскольку $\varphi_i \in C(K_i)$ и $\varphi_i(x) = 1\ \forall x \in K_i$, то в силу локальных свойств непрерывных функций $\forall x_0 \in K_i \subset U_i$ существует окрестность $O(x_0) \subset U_i$ такая, что $\varphi_i(x) > 0\ \forall x \in O(x_0)$. Но тогда множество $V_i = \bigcup\limits_{x_0 \in K_i} O(x_0)$ открыто, $K_i \subset V_i \subset U_i$ и, очевидно, $\varphi_i(x) > 0\ \forall x \in V_i$. Положим $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} V_i$. Тогда множество Ω открыто и $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} K_i \subset \Omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp} \varphi_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} U_i$, причем в силу локальной конечности покрытия $\{U_i\}$ системы $\{K_i\}$, $\{V_i\}$ и $\{\operatorname{supp} e_i\}$ также локально конечны. Рассмотрим функцию $\varphi(x) - \sum\limits_{i=1}^{+\infty} \varphi_i(x)\ \forall x \in \Omega$. В силу локальной конечности покрытия $\{\operatorname{supp} \varphi_i\}$ $\operatorname{supp} \varphi_i\ \forall x_0 \in \Omega$ существует шар $\mathrm{Ш}_{\rho_0}(x_0)$ такой, что $\mathrm{Ш}_{\rho_0}(x_0) \cap \operatorname{supp} \varphi_{i_k} \neq \varnothing$ лишь при $k = 1, 2, \ldots, m(x_0)$, так что $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{m(x_0)} \varphi_{i_k}(x) \ge 0\ \forall x \in \mathrm{Ш}_{\rho_0}(x_0)$, т. е. функция $\varphi(x)$ определена в некотором шаре $\mathrm{Ш}_{\rho_0}(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \Omega$ и, в частности, $\forall x_0 \in A$, причем $\mathrm{Ш}_{\rho_0}(x_0) \cap V_j = \varnothing$, если $j \neq i_k$ при $k = 1, 2, \ldots, m(x_0)$. Далее, если $x_0 \in \Omega$, то из того что $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} V_i$, вытекает существование k_0 $(1 \le k_0 \le m(x_0))$ такого, что $x_0 \in V_{i_{k_0}}$, и поэтому $(\varphi_{i_{k_0}}(x_0) > 0)$

$\Rightarrow (\varphi(x_0) > 0\ \forall x_0 \in \Omega)$. Но тогда на открытом множестве $\Omega \supset A$ для любого i определена функция $e_i(x) = \varphi_i(x)/\varphi(x) \in C^{(\infty)}(\Omega)$, причем $0 < e_i(x) \leq 1\ \forall x \in \Omega$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x) = 1\ \forall x \in \Omega$ (и, в частности, $\forall x \in A$). Очевидно, носитель $\operatorname{supp} e_i = \operatorname{supp} \varphi_i \subset U_i$ компактен, причем $K_i \subset \operatorname{supp} \varphi_i \equiv \operatorname{supp} e_i \subset U_i$, а система множеств $\{\operatorname{supp} e_i\}$, как и система $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, локально-конечна, причем $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} K_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp} e_i$. Система функций $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и есть искомое разбиение единицы для множества A, подчиненное его открытому покрытию $\{\Omega_\alpha\}$.

Продолжая доказательство теоремы о существовании разбиения единицы, рассмотрим 4 случая:

1) $A = K$, где K компактно в $\mathbf{R}^n$;

2) $A = \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} K_l$, где K_l компактно и $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1}\ \forall l$;

3) $A = G$, где G – открытое множество из $\mathbf{R}^n$;

4) A – любое множество из $\mathbf{R}^n$.

Итак, 1) пусть множество $A = K \subset \mathbf{R}^n$ компактно. По условию $\{\Omega_\alpha\}$ – открытое покрытие множества K. В силу компактности K можно выделить конечное подпокрытие $\{\Omega_{\alpha_l}\}$ $(l = 1, 2, \ldots, m)$ такое, что $K \subset \bigcup\limits_{l=1}^{m} \Omega_{\alpha_l}$. Положим $U_i = \Omega_{\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$. Рассмотрим компактное множество $W_1 = K \setminus \bigcup\limits_{i=2}^{m} U_i \subset U_1$. Тогда $\rho(W_1, \partial U_1) \geq 2\rho_1 > 0$. Воспользуемся следующим определением.

О п р е д е л е н и е. *Открытой окрестностью $O(B)$ множества $B \subset \mathbf{R}^n$ называется любое открытое множество, содержащее B. В частности, δ-окрестность множества B называется множество* $O_\delta(B) \overset{def}{=} \bigcup\limits_{x \in B} Ш_\delta(x)$. Рассмотрим множества

$$\overset{\circ}{K}_1 = O_{\rho_1}(W_1) \subset K_1 = \overline{O}_{\rho_1}(W_1) \subset U_1.$$

Поскольку компактное множество W_1 ограничено, то и ее ρ_1-окрестность ограничена. Тогда множество K_1 компактно и

$$K \subset \overset{\circ}{K}_1 \cup \bigcup_{i=2}^{m} U_i \subset K_1 \cup \bigcup_{i=2}^{m} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i.$$

При $l \geq 2$ положим $W_l = K \setminus \left(\bigcup\limits_{i=1}^{l-1} \overset{\circ}{K}_i \cup \bigcup\limits_{i=l+1}^{m} U_i \right) \subset U_i$. В силу компактности множества W_l имеем $\rho(W_l, \partial U_i) \geq 2\rho_l > 0$. Положим теперь

$\overset{\circ}{K}_l = O_{\rho_l}(W_l) \subset K + l = \overline{O}_{\rho_l}(W_l) \subset U_l$, где $K_l \subset U_l$ и K_l компактно, причем

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{l} \overset{\circ}{K}_i \cup \bigcup_{i=l+1}^{m} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{l} K_i \cup \bigcup_{i=l+1}^{m} U_i \subset \bigcup_{i=1}^{m} U_i.$$

Но тогда при $l = m$ имеем $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overset{\circ}{K}_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$, где $\overset{\circ}{K}_i \subset K_i \subset U_i$, причем K_i компактно при $i = 1, 2, \ldots, m$. Итак, для любого компактного множества $A = K \subset \mathbf{R}^n$ такого, что $K \subset \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$, построено (по индукции) конечное (а потому и локально-конечное) открытое покрытие $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, такое, что:

1) для любого i существует компактное множество K_i такое, что $K_i \subset U_i$;

2) $K \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overset{\circ}{K}_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} K_i \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m} U_i$;

3) $\forall i\ \exists \alpha = \alpha_i$ такое, что $K_i \subset U_i = \Omega_{\alpha_i} = \Omega_\alpha$. В силу леммы 2 для компактного множества $A = K$ существует разбиение единицы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ класса $C^{(\infty)}$, подчиненное открытому покрытию $\{\Omega_\alpha\}$, причем $\operatorname{supp} e_i \subset U_i\ \forall i$. Разбор случая 1) закончен.

Случай 2). Пусть $A = \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} K_l$, где K_l компактно, причем $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1}$ $\forall l$. Пусть $A \subset \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$ (где множества Ω_α открыты). Положим $C_2 = K_2 = K_1 \cup K_2$, $C_l = K_l \setminus \overset{\circ}{K}_{l-1}$ при $l \geq 3$. Тогда C_l компактно $\forall l \geq 2$ и $A = \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} K_l = \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} C_l \subset \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$, причем (рис. 54) $C_l \cap C_{s+2} = \varnothing\ \forall s \geq 2$. Положим $\omega_\alpha^{(2)} = \Omega_\alpha \cap \overset{\circ}{K}_3$ и введем открытый слой $\omega_\alpha^{(l)} = \Omega_\alpha \cap (\overset{\circ}{K}_{l+1} \setminus K_{l-2})$ при $l = 3, 4, \ldots$. Тогда $C_l \subset \bigcup\limits_{\alpha} \omega_\alpha^{(l)}\ \forall l \geq 2$, т. е. $\{\omega_\alpha^{(l)}\}$ – открытое покрытие множества C_l. В силу рассмотренного выше случая 1) для компактного множества C_l существует открытое покрытие $\{U_{l,i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l))$, подчиненное открытому покрытию $\{\omega_\alpha^{(l)}\}$ и удовлетворяющее условиям леммы 2. Более того, открытое покрытие $\{U_{l,i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l))$ компактного множества C_l обладает свойствами: а) для любых l, i существует компактное множество $C_{l,i} \subset U_{l,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l))$; б) $C_l \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m(l)} C_{l,i} \subset \bigcup\limits_{i=1}^{m(l)} U_{l,i}$; в) $\forall l, i\ \exists \omega_\alpha^{(l)}$ такое, что $U_{l,i} \subset \omega_\alpha^{(l)}$. Поскольку $\omega_\alpha^{(l)} \subset \overset{\circ}{K}_{l+1} \setminus K_{l-2}$, то (рис. 55) $U_{l,i} \cap U_{s+2,j} = \varnothing$ $\forall s > l$ и $\forall i$. Очевидно, $A = \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} C_l \subset \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{m(l)} U_{l,i}$. Поэтому $\{U_{l,i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l); l = 2, 3, \ldots)$ есть не более чем счетное открытое

покрытие множества A, подчиненное открытому покрытию $\{\Omega_\alpha\}$. Докажем, что система $\{U_{l,i}\}$ локально-конечна. В самом деле, $\forall x_0 \in A$ $\exists l_0$ такое, что $x_0 \in C_{l_0}$, т. е. $x_0 \in U_{l_0,i_0}$. Но тогда $\forall s > l_0$ и $\forall j$ имеем $U_{s_0,i_0} \cap U_{s+2,j} = \varnothing$, т. е. любая точка $x_0 \in A$ обладает окрестностью U_{l_0,i_0}, пересекающейся не более чем с конечным числом множеств $U_{l,i}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l); l \leq l_0 + 2)$, т. е. открытое покрытие $\{U_{l,i}\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m(l); l = 1, 2, \ldots)$ множества $A = \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} C_l$ счетно, локально-конечно и обладает свойствами: а) и г) $A \subset \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{m(l)} C_{l,i} \subset \bigcup\limits_{l=2}^{+\infty} \bigcup\limits_{i=1}^{m(l)} U_{l,i}$; д) $\forall U_{l,i}$ $\exists \Omega_\alpha$ такое, что $U_{l,i} \subset \omega_\alpha^{(l)} \subset \Omega_\alpha$. Таким образом, открытое покрытие $\{U_{l,i}\}$ локально-конечно и удовлетворяет всем условиям леммы 2. Разбор случая 2) закончен.

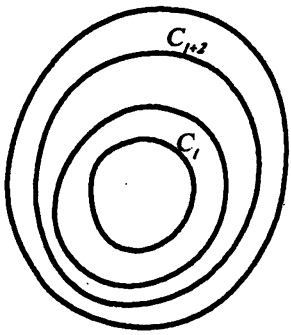


Рис. 54

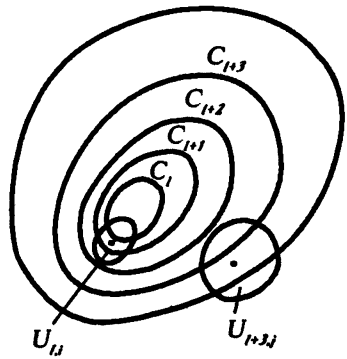


Рис. 55

Случай 3). Пусть $A = G$ – открытое множество из $\mathbf{R}^n$. Тогда $G = \bigcup\limits_{l=1}^{+\infty} K_i$, где $K_l = \{x \in G \,|\, \|x\|_n \leq l, \rho(x, \partial G) \geq 1/l\}$. Очевидно, множества K_l компактны и $K_l \subset \overset{\circ}{K}_{l+1}$ $\forall l$. Тем самым показано, что для открытого множества $A = G$ имеет место разобранный выше случай 2).

Случай 4). Пусть, наконец, $A \subset \mathbf{R}^n$ – произвольное множество и $\{\Omega_\alpha\}$ – его открытое покрытие. Тогда множество $G = \bigcup\limits_{\alpha} \Omega_\alpha$ открыто и $G \supset A$. В силу рассмотрений, проведенных при работе случая 3), для открытого множества G существует разбиение единицы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, подчиненное открытому покрытию $\{\Omega_\alpha\}$. Но система $\{e_i(x)\}$ будет, очевидно, разбиением единицы и для множества $A \subset G$. Теорема о существовании единицы доказана полностью.

З а м е ч а н и е. Если $K \subset A \subset \mathbf{R}^n$ и множество K компактно, а $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ – разбиение единицы для множества A, подчинен-

ное локально-конечному открытому покрытию $\{U_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ (так что $\operatorname{supp} e_i \subset U_i\ \forall i$), то лишь конечное число функций $e_i(x)$ не равно нулю $\forall x \in K$, т. е. $K \cap \operatorname{supp} e_i \neq \varnothing$ лишь для $i = i_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, причем $\sum\limits_{k=1}^{m} e_{i_k}(x) = 1\ \forall x \in K$.

В самом деле, поскольку система $\{\operatorname{supp} e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, образующая покрытие K, локально-конечна, то, как было замечено ранее, в силу компактности K существует не более конечного числа индексов $i_{k_1}, \ldots, i_{k_m}$ таких, что $K \cap \operatorname{supp} e_i = \varnothing\ \forall i \neq i_k$, и тогда равенство $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x) = 1\ \forall x \in K \subset A$ дает $\sum\limits_{k=1}^{m} e_{i_k}(x) = 1\ \forall x \in K$.

Т е о р е м а. *Пусть G и $\mathfrak{G}$ – открытые множества из $\mathbf{R}^n$ и отображение $\varphi : G \subset \mathbf{R}_t^n \to \mathfrak{G} = \varphi(G) \subset \mathbf{R}_x^n$ является диффеоморфизмом класса $C^{(1)}$. Пусть $\mathfrak{G} = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} U_i$, где $\{U_i\}$ – открытое покрытие множества $\mathfrak{G}$ и $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ – разбиение единицы для $\mathfrak{G}$ класса $C^{(k)}$ $(k \geq 1)$, подчиненное этому покрытию, причем $\operatorname{supp} e_i \subset U_i\ \forall i$. Тогда $G = \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} V_i$, где $\{V_i \equiv \varphi^{-1}(U_i)\}$ – открытое покрытие множества G и система $\{(e_i \circ \varphi)(t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ является разбиением единицы для G класса $C^{(1)}$, подчиненным открытому покрытию $\{V_i\}$, причем $\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi) \subset V_i\ \forall i$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку отображение $\varphi : G \subset \mathbf{R}_t^n \to \mathfrak{G} \subset \mathbf{R}_x^n$ есть диффеоморфизм класса $C^{(1)}$, то это отображение биективно, так что существует обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathfrak{G} \to G = \varphi^{-1}(\mathfrak{G})$, причем $\varphi \in C^{(1)}(G)$, $\varphi^{-1} \in C^{(1)}(\mathfrak{G})$. Множество V_i как прообраз открытого множества $U_i = \varphi(V_i)$ при непрерывном отображении φ является открытым множеством $\forall i$. Докажем, что система $\{(e_i \circ \varphi)(t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ есть разбиение единицы (класса $C^{(1)}$) для G, подчиненное открытому покрытию $\{V_i\}$.

1) Очевидно, $0 \leq e_i(\varphi(t)) \leq 1\ \forall t \in G$ и $\forall i$, причем если $x = \varphi(t) \in \mathfrak{G}$, то $t = \varphi^{-1}(x) \in G$ и $\forall t \in G$ имеем $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(\varphi(t)) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} e_i(x) = 1$ (т. е. $G \subset \bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)$) в силу свойства 1) определения разбиения единицы $\{e_i(x)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ для $\mathfrak{G}$, при этом поскольку $\varphi \in C^{(1)}(G)$ и $e_i \in C^{(k)}(\mathfrak{G})$ $(k \geq 1)$, то $e_i \circ \varphi \in C^{(1)}(G)$.

2) $\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi) \subset V_i\ \forall i$, причем носитель $\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)$ компактен $\forall i$. В самом деле, поскольку носитель $\operatorname{supp} e_i = \mathfrak{K} \subset U_i$ компактен в $\mathbf{R}^n$ и $\varphi^{-1} \in C(\mathfrak{K}_i)$, то множество $K_i = \varphi^{-1}(\mathfrak{K}_i)$ как непрерывный образ компактного множества компактен в $\mathbf{R}^n$, и в силу биективности отображения φ^{-1} имеем $(\mathfrak{K}_i \subset U_i) \Rightarrow (K_i \subset V_i)$. Пусть теперь $t_0 \overline{\in} K_i$, но $t_0 \in V_i$, тогда $x_0 = \varphi(t_0) \overline{\in} \mathfrak{K}_i = \operatorname{supp} e_i$, $x_0 \in U_i$ в си-

лу биективности отображения φ, и поэтому существует окрестность $O(x_0) \subset U_i$ такая, что $O(x_0) \cap \mathfrak{R}_i = \varnothing$, и тогда $\forall x \in O(x_0)$ имеем $e_i(x) = 0$, т. е. $e_i(\varphi(t)) = 0 \ \forall t \in W(t_0) = \varphi^{-1}(O(x_0))$, и тогда $t_0 \overline{\in} \operatorname{supp} e_i \circ \varphi = \overline{\{t \in G | (e_i \circ \varphi)(t) \neq 0\}}$. (Если бы $t_0 \in \operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)$, то в любой окрестности $W(t_0)$ должно было бы существовать $t_1 \in W(t_0)$ такое, что $(e_i \circ \varphi)(t_1) \neq 0$.) В силу биективности φ и φ^{-1} имеем $W(t_0) \subset V_i$. Но $W(t_0) \cap K_i = \varnothing$ (так как $(O(x_0) \cap \mathfrak{R}_i = \varnothing) \Rightarrow (\varphi^{-1}(O(x_0) \cap \mathfrak{R}_i) = \varphi^{-1}(O(x_0)) \cap \varphi^{-1}(\mathfrak{R}_i) = \varnothing)$ и поскольку $t_0 \overline{\in} \operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)$, то $\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi) \subset K_i \subset V_i$. Множество $\operatorname{supp} e_i \circ \varphi$ замкнуто, а в силу ограниченности K_i и ограничено, т. е. компактно (в $\mathbf{R}^n$).

3) Из свойства 1) следует, что $G \subset \bigcup_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)$. Докажем, что покрытие $\{\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)\}$ локально-конечно. В самом деле, пусть $t_0 \in G$ – любая точка, тогда $x_0 = \varphi(t_0) \in \mathfrak{G} = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \operatorname{supp} e_i$ и в силу локальной конечности системы $\{\operatorname{supp} e_i\}$ существует окрестность $O(x_0) \subset \mathfrak{G}$ такая, что $e_i(x) = 0 \ \forall x \in O(x_0)$ при $i = i_1, \ldots, i_{m(x_0)}$. Но тогда $(e_i \circ \varphi)(t) = 0 \ \forall t \in W(t_0) = \varphi^{-1}(O(x_0))$ (где $t = \varphi^{-1}(x)$) при $i \neq i_1, i_2, \ldots, i_{m(x_0)}$, причем $W(t_0) \subset G$ есть окрестность точки $t_0 \in G$. Таким образом, система $\{\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi)\}$ локально-конечна и $\{(e_i \circ \varphi)(t)\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ есть разбиение единицы (класса $C^{(1)}$) для G, подчиненное открытому покрытию $\{V_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$, причем $\operatorname{supp}(e_i \circ \varphi) \subset V_i$ $\forall i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Картан А. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.

2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1966.

3. Шварц Л. Анализ. Т. I. М.: Мир, 1972.

4. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986.

5. Валле-Пуссен Ж.-Ж. Курс анализа бесконечно малых. П.: Н.К., 1922. Т. I.

6. Никольский С. М. Курс математического анализа. Т. I. М.: Наука, 1973.

7. Ортега Дж., Рейнболдт В. Интегральные методы решения уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

8. Камынин Л. И. Курс математического анализа. Т. 2. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. 624 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

ЧАСТЬ I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО 5

Глава 1. Основные понятия математического анализа . . . 5

§1. Некоторые понятия теории множеств и математической логики. 5

Законы алгебры множеств (7–11). Свойства декартовых произведений (12). Некоторые понятия математической логики (12, 13, 14).

§2. Понятия отображения функции 14

Основные соотношения для образов и полных прообразов (18, 19).

§3. Счетные и несчетные множества 22

Теорема о мощности подмножеств счетного множества (23). Теорема о счетности объединения счетного множества счетных множеств (23). Теорема Кантора о существовании несчетного множества (24).

Глава 2. Поле действительных чисел 25

§1. Поле, упорядоченное поле, полное упорядоченное поле 25

Принцип минимума (в $\mathbf{N}$) (25). Принцип математической индукции (25). Определение поля (26). Определение упорядоченного поля (27). Теорема Архимеда для поля рациональных чисел (30). Определение полного упорядоченного поля (31). Теорема о неполноте поля рациональных чисел (32). Теорема о неограниченности сверху множества $\mathbf{N}$ в $\mathbf{R}$ (33). Теорема Архимеда в поле действительных чисел (34). Теорема о принципе минимума для $\mathbf{N}$ (34). Теорема о плотности $\mathbf{Q}$ в $\mathbf{R}$ (34).

§2. Принципы полноты поля $\mathbf{R}$ 35

Принцип полноты Вейерштрасса (35). Принцип полноты Дедекинда (35). Принцип полноты Кантора (36). Теорема о справедливости принципа Вейерштрасса в архимедовом упорядоченном поле с принципом Кантора (36).

§3. Мощности множеств $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ 38

Теорема о счетности множества рациональных чисел (38). Теорема о несчетности множества действительных чисел (38).

Глава 3. Теория пределов 39

§1. Топология числовой прямой 39

§2. Понятие предела функции в точке 48

§3. Теоремы о пределах функций и последовательностей 51

Теорема о единственности предела (52). Теорема 1 о знаке для функции, имеющей предел (52). Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел (53). Теорема об ограниченности финально ограниченной последовательности (53). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности (53). Теорема 2 о переходе к пределу в неравенстве (53). Теорема о представлении функции, имеющей предел (54). Теорема о пределе суммы функций (55). Теорема о пределе произведения локально ограниченной функции на функцию бесконечно малую (55). Теорема о пределе произведения функций (56). Теорема о пределе частного двух функций (58). Теорема о предельном переходе в неравенстве для функций, имеющих пределы (58).

§4. Признаки существования предела функции в точке и предела числовой последовательности 59
Критерий сходимости монотонной последовательности (59). Формула бинома Ньютона (60). Число «e» (61). Теорема об оценочном признаке существования предела функции в точке (61). Оценочный признак сходимости числовой последовательности (62). Теорема о пределе отношения синуса бесконечно малого аргумента к аргументу (62). Теорема о связи бесконечно большой и бесконечно малой функций (63). Теорема о связи бесконечно малой и бесконечно большой функций (63). Критерий существования предела функции в точке (64). Теорема о существовании односторонних пределов у монотонной функции (65). Теорема о пределе композиции двух функций (67).

§5. Предел по Коши и предел по Гейне функции в точке 68
Теорема об эквивалентности определений предела по Коши и по Гейне (69). Число «e» (69).

§6. Дополнения к принципам полноты поля $\mathbf{R}$ 71
Теорема Вейерштрасса о сходимости монотонной ограниченной последовательности (71). Теорема Кантора о стягивающейся системе отрезков (71). Теорема Больцано-Вейерштрасса (для множеств) (72). Теорема Больцано-Вейерштрасса (для числовых последовательностей) (72). Лемма Бореля-Лебега (о компактности отрезка) (73).

§7. Критерии существования предела последовательности, предела функции в точке 74
Критерий существования предела числовой последовательности (74). Теорема о свойствах множества точек сгущения ограниченной последовательности (75). Критерий Коши существования предела у числовой последовательности (77). Критерий Коши существования предела функции в точке (78).

§8. Сравнение асимптотического поведения функций 79
Теорема о свойствах символа O большого (80). Теорема умножения для отношения подобия (81). Теорема о свойствах символа o маленького (81). Теорема умножения для эквивалентных функций (84). Теорема о знаке для эквивалентных функций (84). Теорема о пределе частного для эквивалентных функций (84). Таблица разложений простейших элементарных функций (85).

§9. Предел числовой функции по базе 86
Теорема о пределе суммы (87). Теорема о локальной ограниченности функции, имеющей предел по базе (88). Теорема о существовании верхнего и нижнего предела функции по базису фильтра (88). Критерий Коши существования предела числовой функции по базису фильтра (89). Теорема о пределах функции по эквивалентным базисам (91).

Глава 4. Непрерывные функции 93
§1. Непрерывность функции в точке. Точки разрыва функции . . 93
Предельный критерий непрерывности функции в точке (94). Критерий непрерывности Бэра (97). Критерий непрерывности монотонной функции (98). Теорема о мощности множества точек разрыва монотонной функции (98).
§2. Локальные свойства функций, непрерывных в точке 98
Теорема о сохранении знака (98). Теорема о локальной ограниченности функции, непрерывной в точке (98). Теорема о непрерывности линейной функции (99). Теорема о непрерывности суммы непрерывных функций (99). Теорема о непрерывности произведения непрерывных функций (99). Теорема о непрерывности частного двух непрерывных функций (100). Теорема о непрерывности композиции двух непрерывных функций (100).
§3. Глобальные свойства числовых непрерывных функций 101
Теорема о непрерывности сужения непрерывной функции (101). Теорема о структуре связного числового множества (101). Теорема о нуле непрерывной функции (102). Теорема Больцано о промежуточных значениях непрерывной функции (103). Теорема о сохранении связности при непрерывном отображении (104). Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке (104). Теорема Вейерштрасса о достижении функцией, непрерывной на отрезке, своих точных верхней и нижней граней (105). Теорема о свойстве Дарбу для непрерывной функции (105). Критерий непрерывности монотонной функции (106). Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке (107). Теорема о существовании и непрерывности обратной функции для строго монотонной непрерывной функции (109). Теорема об общем виде гомеоморфизма (110).
§4. Элементарные функции и их непрерывность 112
Теорема о степенной функции с натуральным показателем (112). Теорема о степенной функции с отрицательным натуральным показателем (112). Теорема о показательной функции на множестве $\mathbf{Q}$ (114). Теорема о показательной функции, определенной на $\mathbf{R}$ (115). Теорема о степенной функции с действительным показателем (118). Теорема об обратных тригонометрических функциях (119).

Глава 5. Дифференцируемые функции (одной переменной). 122

§1. Дифференцируемость функции в точке 122
Теорема единственности дифференциала (124). Теорема о непрерывности дифференцируемой функции (124).

§2. Производная функции в точке 124
Критерий дифференцируемости функции в точке (125). Критерий существования производной (126).

§3. Касательная к графику функции 127
Теорема о касательной как предельном положении секущей (128).

§4. Правила дифференцирования 129
Теорема о производной суммы, произведения, частного (129). Теорема о дифференцируемости композиции дифференцируемых функций (130). Теорема о производной обратной функции (131).

§5. Производные элементарных функций 132

§6. Производные и дифференциалы высших порядков 133
Формула Лейбница (134).

§7. Теоремы о конечных приращениях 137
Теорема Ферма (138). Теорема Ролля (139). Теорема Лагранжа о конечных приращениях (141). Теорема (обобщенная теорема Ролля) (141). Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа) (143). Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) (144). Таблица основных асимптотических разложений для простейших элементарных функций (145). Теорема Коши о конечных приращениях (146).

§8. Правила Лопиталя раскрытия неопределенностей 147
Теорема 1 (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида 0/0) (147). Теорема 2 (правило Лопиталя раскрытия неопределенности вида ∞/∞) (148).

§9. Свойства производных дифференцируемых функций 155
Достаточное условие строгой монотонности функции в точке (156). Теорема Дарбу о промежуточных значениях производной (156). Теорема о пределе производной (157). Теорема о разрывах производной (158).

§10. Формула Тейлора 158
Теорема (формула Тейлора для многочлена) (158). Теорема единственности многочлена Тейлора (159). Теорема (о формуле Тейлора) (161).

Глава 6. Исследование функций с помощью производных . 163

§1. Условия монотонности функции 163
Теорема 1 (критерий монотонности функции) (163). Теорема 2 (достаточное условие строгой монотонности функции) (164). Теорема 3 (критерий строгой монотонности функции, имеющей производную) (164).

§2. Экстремумы функции 165

Необходимый признак существования локального экстремума для дифференцируемой функции (165). Теорема (достаточный признак существования локального экстремума) (165). Следствие 1 (достаточный признак существования локального экстремума – по знаку 1-й производной) (166). Следствие 2 (достаточное условие существования локального экстремума – по монотонности 1-й производной) (167). Следствие 3 (достаточное условие существования локального экстремума – по знаку 2-й производной) (168). Теорема (достаточное условие существования локального экстремума и монотонности в точке по производным высшего порядка) (168).

§3. Направление выпуклости 170
Точки перегиба. Теорема (критерий выпуклости дифференцируемой функции в точке и критерий существования точки перегиба графика дифференцируемой функции) (171). Теорема 1 (достаточный признак выпуклости функции в точке и существования точки перегиба у ее графика – по 1-й производной) (171). Следствие (необходимое условие существования точки перегиба) (172). Теорема 2 (достаточный признак выпуклости функции в точке и существования точки перегиба у ее графика по производным высшего порядка) (172). Следствие 1 (достаточный признак существования точки перегиба у графика функции – по 3-й производной) (173). Следствие 2 (достаточный признак строгой выпуклости функции в точке – по 2-й производной) (173). Теорема (достаточный признак выпуклости функции на интервале) (177). Теорема (критерий выпуклости вниз для дифференцируемой функции) (177). Следствие (критерий выпуклости вниз для дважды дифференцируемой функции) (178). Теорема (неравенство Йенсена) (179).

§4. Условия постоянства функции. Первообразные функции 180
Критерий постоянства для дифференцируемой функции (180). Теорема об общем виде точной первообразной (180). Теорема (достаточное условие постоянства функции) (182). Теорема об общем виде первообразной (182).

§5. Центр кривизны, радиус кривизны и кривизна графика функции 183
Теорема (формулы для вычисления координат центра кривизны) (184). Кривизна и эволюта параболы (186).

Литература 188

ЧАСТЬ II. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО 189

Глава 1. Неопределенный интеграл 189

§1. Неопределенный интеграл 189

§2. Основные свойства неопределенного интеграла 192

Теорема о связи дифференцирования и интегрирования (192). Теорема о линейности операции интегрирования (192). Теорема об интегрировании по частям (193). Теорема 1 о замене переменной в неопределенном интеграле (193). Теорема 2 о замене переменной в неопределенном интеграле (194).

§3. Таблица основных неопределенных интегралов 194

Глава 2. Определенный интеграл Римана 196

§1. Определение интеграла Римана 196
Теорема единственности интеграла Римана (197). Теорема о необходимом условии интегрируемости по Риману (198).

§2. Суммы Дарбу и критерий Дарбу интегрируемости по Риману. 199
Теорема о формулах Дарбу (200). Теорема 1 о свойствах сумм Дарбу (201). Теорема 2 о свойствах сумм Дарбу (202). Теорема о предельном критерии интегрируемости по Риману (202). Теорема о критерии Дарбу интегрируемости по Риману (203). Теорема о критерии интегрируемости по Риману (204).

§3. Множества из $\mathbf{R}$ меры нуль и длины нуль 205
Теорема о мере подмножества множества меры нуль (205). Теорема о мере счетного множества множеств меры нуль (205). Теорема о длине отрезка (206). Теорема о компактности замкнутого ограниченного числового множества (207). Теорема о длине компактного множества меры нуль (208). Теорема о компактности границы ограниченного множества (208).

§4. Критерий Лебега интегрируемости по Риману 209
Теорема о критерии непрерывности Бэра (210). Теорема Кантора для разрывных функций (210). Теорема о колебаниях функции (210). Теорема о критерии Лебега интегрируемости по Риману (211).

§5. Классы функций, интегрируемых по Риману 214
Теорема 1 об интегрируемости ограниченной функции со счетным множеством точек разрыва (214). Следствие 1 об интегрируемости непрерывной функции (214). Следствие 2 об интегрируемости монотонной функции (214). Теорема о критерии измеримости по Жордану (215). Теорема об эквивалентности двух определений множества длины нуль (216). Теорема о свойствах множеств, измеримых по Жордану (217). Теорема – множества, измеримые по Жордану, образуют алгебру (218).

§6. Свойства интеграла Римана 218
Теорема 1 (об интегрируемости суммы) (218). Теорема 2 (об интегрируемости произведения) (220). Теорема 3 (об интегрируемости частного) (220). Теорема 5 (об аддитивности интеграла) (221). Теорема 6 (об интегрируемости по подотрезку) (222). Теорема 7 (об оценках интеграла) (222). Теорема 8 (об оценке интеграла) (222). Следствие (об интегрировании неравенств) (223). Следствие (о монотонности «меры Жордана») (223).

Теорема 9 (о множестве точек непрерывности интегрируемой функции) (223). Теорема 10 (о положительности интеграла от положительной функции (224). Теорема 11 (224). Теорема 12 (224). Теорема (1-я обобщенная теорема о среднем) (226). 1-я теорема о среднем (227). Теорема о непрерывности интеграла Римана как функции верхнего предела (228). Лемма (тождество Абеля) (228). Следствие (к тождеству Абеля) (229). 2-я интегральная теорема о среднем (230). Теорема о дифференцируемости интеграла Римана по верхнему пределу (233). Теорема о существовании точной примитивной у непрерывной функции (234). Теорема (о существовании первообразной у кусочно-непрерывной функции) (234). Теорема (формула Ньютона-Лейбница для кусочно-непрерывной функции) (234). Теорема (формула Ньютона-Лейбница (236). Теорема 1 (о замене переменной в интеграле Римана) (237). Теорема 2 (о замене переменной в интеграле Римана) (238). Теорема о среднем в интегральной форме (240). Теорема 1 (об интегрировании по частям) (241). Теорема 2 (об интегрировании по частям) (242). 2-я теорема о среднем (243). Теорема об интеграле Римана как линейном функционале (245).

§7. Понятие о мере множеств. Длина числового множества как мера. Площадь криволинейной трапеции 245
Площадь криволинейной трапеции (246).

§8. Замечания о некоторых геометрических и механических приложениях определенного интеграла Римана 248
Объем тела вращения (248). Масса и центр тяжести неоднородного тела (249). Работа переменной силы (249).

§9. Формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. 250
Теорема о формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме (250).

ЧАСТЬ III. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ 254

Глава 1. Непрерывные отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ 254

§1. Линейные, евклидовые, нормированные и метрические пространства 254
Теорема (неравенство Коши-Буняковского) (256). Теорема (неравенство Минковского) (256).

§2. Дифференцирование и интегрирование (векторных) функций одного действительного переменного 258
Теорема 1 (об интегрировании суммы) (259). Теорема 2 (формула Ньютона-Лейбница) (259). Теорема 3 об оценке нормы интеграла от (векторной) функции через интеграл от нормы этой функции (259).

§3. Векторные функции ограниченной вариации 261
Теорема о полной вариации суммы и произведения функций (262). Теорема Жордана (263). Теорема 1 (о свойствах

векторной функции ограниченной вариации) (264). Теорема 2 (об аддитивности полной вариации) (265). Теорема 3 (266).

§4. Пути и кривые в $\mathbf{R}^n$ 267

§5. Длина кривой в $\mathbf{R}^n$ 272

Теорема (критерий спрямляемости замкнутого пути) (272). Теорема (об инвариантности длины для эквивалентных путей) (273). Натуральная параметризация кривой (274).

§6. Касательная к кривой в $\mathbf{R}^n$ 275

Теорема о локальной взаимноднозначности (276). Замечание о вычислении площади поверхности вращения (278).

§7. Топология метрического пространства 279

Теорема об эквивалентных нормах (285). Теорема об эквивалентности норм $\|\|_1$, $\|\|_2$ и $\|\|_\infty$ в $\mathbf{R}^n$ (286).

§8. Пределы в метрическом пространстве 287

Теорема (об ограниченности сходящейся последовательности) (287). Теорема о подпоследовательности последовательности Коши (288). Теорема о сходимости последовательности Коши, имеющей точку сгущения (288). Теорема о пределе последовательности в пространствах с эквивалентными нормами (289). Теорема (о полноте $\mathbf{R}^n$) (290). Теорема об эквивалентности определений предела отображения по Коши и по Гейне (291). Теорема о единственности предела (291). Теорема (критерий существования предела у векторной функции) (292). Теорема о пределах (292). Теорема (достаточное условие существования повторного предела (294).

§9. Непрерывные отображения в метрических пространствах . . . 295

Теорема (предельный критерий непрерывности отображения в точке) (296). Теорема (критерий непрерывности отображения, определенного на открытом множестве) (297).

§10. Компактность в метрических пространствах 298

Теорема (о компактности объединения конечного числа компактных множеств) (299). Теорема Кантора (300). Теорема о секвенциальной компактности компактного множества (300). Теорема о полной ограниченности секвенциально компактного множества (302). Теорема о замкнутости секвециально компактного множества (302). Теорема о представлении замкнутого вполне ограниченного множества в метрическом пространстве (303). Теорема о компактности секвенциально компактного множества в метрическом пространстве (303). Теорема Больцано-Вейерштрасса (304). Теорема (критерий компактности в полном метрическом пространстве) (305). Теорема (критерий существования предела последовательности в декартовом произведении метрических пространств) (306). Теорема Бореля-Лебега (308). Следствие (критерий компактности в $\mathbf{R}^n$) (309).

§11. Связность в метрических пространствах 309

Теорема о сохранении связности при непрерывном отображении (310). Теорема об эквивалентности топологической связности и линейной связности на числовой прямой (311). Теорема Больцано о промежуточных значениях непрерывной числовой функции (311). Теорема о связности линейно связного множества (312). Теорема (критерий связности открытого множества в $\mathbf{R}^n$) (313).

§12. Непрерывные отображения на компактных множествах 315

Теорема о сохранении компактности при непрерывном отображении (315). Теорема Вейерштрасса (316). Замечание о положительно определенной квадратической форме (316). Теорема о расстоянии точки до замкнутого множества (317). Теорема о расстоянии между замкнутым и компактным множествами (318). Теорема Кантора о равномерной непрерывности (318).

§13. Сжимающие отображения в метрических пространствах . . . 319

Теорема о принципе сжимающих отображений (320).

Глава 2. Дифференцируемые отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ . . . 321

§1. Частные производные функций многих переменных 321

Теорема о линейности частного дифференцирования (324). Теорема о частных производных композиции (324). Теорема Шварца (достаточное условие равенства смешанных частных производных второго порядка) (325).

§2. Некоторые сведения из линейной алгебры 327

Теорема о равномерной непрерывности линейного отображения (329). Теорема о норме линейных отображений (330). Теорема об однозначной разрешимости линейного уравнения (331). Лемма Неймана (331). Теорема (о линейном возмущении) (332). Теорема (о нелинейном возмущении) (333).

§3. Понятие дифференцируемости отображения из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ . . . 333

Теорема о единственности производной (336). Теорема (о непрерывности дифференцируемой функции) (336). Теорема (о существовании производной вдоль любого вектора у дифференцируемой функции) (337). Следствие (необходимое условие дифференцируемости функции в точке) (337). Теорема (о представлении производной дифференцируемой функции в координатной форме) (337). Теорема (критерий дифференцируемости векторной функции в точке) (339). Теорема (достаточное условие дифференцируемости функции в точке) (340). Теорема Юнга (достаточное условие равенства вторых смешанных частных производных у функции многих переменных) (340). Теорема (критерий непрерывной дифференцируемости функции на открытом множестве) (342). Уравнение касательной гиперплоскости к графику функции (344). Градиент функции (345). О производной Гато (346).

§4. Теорема о производной сложной функции и ее следствия . . . 351

Теорема (о производной сложной функции) (351). Следствие 1 (цепное правило вычисления частных производных сложной функции) (354). Следствие 2 (теорема о полной производной сложной функции) (354). Теорема о линейности дифференцирования (355). Замечание (об инвариантности формы первого дифференциала) (356). Теорема (об обратной биекции) (357).

§5. Теорема о среднем для отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$ 358
Теорема (о среднем для числовой функции многих переменных) (358). Теорема (о среднем для отображений из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^m$) (359). Теорема (об оценке) (361).

§6. Формула Тейлора для (векторных) функций 362
Теорема (формулы Тейлора для числовой функции многих переменных) (365). Теорема (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано) (368). Теорема (формулы Тейлора для векторных функций) (369). Следствие (теорема о среднем для векторной функции в интегральной форме) (370). Следствие (формулы Тейлора для векторной функции одного переменного) (371). Лемма (критерий постоянства дифференцируемой функции на открытом связном множестве) (371).

§7. Локальные экстремумы числовой функции многих переменных. 372
Теорема (необходимое условие существования локального экстремума для дифференцируемой функции) (372). Лемма (о положительно определенной квадратической форме) (373). Теорема (достаточное условие существования локального экстремума для дважды дифференцируемой функции) (375).

§8. Обратные функции 377
Теорема (достаточное условие существования гомеоморфизма) (377). Теорема (об уточненном принципе сжимающих отображений) (377). Теорема (о нелинейном возмущении) (378). Следствие (теорема о локальном гомеоморфизме) (379). Теорема (о локальном диффеоморфизме) (380). Теорема об обратной функции (382). Следствие (382).

§9. Неявные функции 383
Теорема (о неявной функции в случае $n \geq 1$ и $m = 1$) (384). Теорема (о неявной функции в случае $n \geq 1$ и $m \geq 2$) (387). Замечание (о вычислении частных производных неявной функции) (392). Теорема (об оценке) (393). Основная теорема о неявной функции (393). Следствие 1 (398). Следствие 2 (398). Следствие 3 (теорема о неявных функциях, определяемых системой уравнений) (399).

§10. Условный экстремум функции многих переменных 400
Теорема (о существовании касательной плоскости) (400). Теорема 1 (иеобходимое условие существования локального условного экстремума) (403). Замечание (о геометрическом смысле необходимого условия существования условного экстремума) (405). Замечание (о собственных значениях квадратической формы) (405).

§11. Зависимые функции 407
Теорема 1 (необходимое условие зависимости функций) (407). Теорема 2 (достаточное условие зависимости функций) (408).

§12. Разбиение единицы 410
Лемма 1 (412). Теорема (о существовании разбиения единицы) (414). Лемма 2 (414). Теорема (о разбиении единицы, индуцированном диффеоморфизмом) (418).

Литература 420

Учебное издание

КАМЫНИН Леонид Иванович

КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Том 1

Зав. редакцией *Г. С. Савельева*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *Н. И. Смирнова*
Корректоры: *Н. И. Коновалова, В. В. Конкина, Г. В. Сибирцева*

Изд. лиц. № 040414 от 18.04.97.
Подписано в печать 14.12.2001. Формат 60x90 $^{1}/_{16}$. Бумага офс. № 1.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 27,0. Уч. изд.л. 27,5. Тираж 3000 экз.
Заказ 8 Изд. № 7253

Ордена "Знак Почета"издательство Московского университета.
103009, Москва, ул. Б. Никитская, 5/7.
Отпечатано с готового оригинал-макета в ООО
"Типография ИПО профсоюзов Профиздат".
109044, Москва, Крутицкий вал, 18.

ЗБМ
К-189