ФАКУЛЬТЕТ
БИОИНЖЕНЕРИИ И
БИОИНФОРМАТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ

КОМБИНАТОРИКА

РАЙГОРОДСКИЙ
АНДРЕЙ МИХАЙЛОВИЧ

ФББ МГУ

БЛАГОДАРИМ ЗА ПОДГОТОВКУ КОНСПЕКТА
СТУДЕНТКУ ФАКУЛЬТЕТА ВМК МГУ
КОЛОДИЙ НАТАЛЬЮ АЛЕКСАНДРОВНУ

Содержание

Лекция 1

1.1. Рекомендуемая литература

В качестве основных учебников и задачников мы рекомендуем:

1) Виленкин Н. Я., Комбинаторика, Москва, Наука, 1969.

2) Райгородский А.М., Савватеев А.В., Шкредов И.Д., Комбинаторика: лекции для студентов факультета биоинженерии и биоинформатики МГУ, МАКС-пресс, Москва, 2005 г., 135 стр.

3) Алфутова Н. Б., Устинов А.В., Алгебра и теория чисел (сборник задач), Москва, МЦНМО, 2002.

4) Харари. Ф., Теория графов, Москва, Мир, 1973.

1.2. Основные правила комбинаторики. Принцип Дирихле

Комбинаторика – это наука о том как можно комбинировать различные объекты, как можно их сочетать. Это с одной стороны наука о том как посчитать количество комбинаций определенного типа, а с другой стороны наука о том как найти какую-то экстремальную комбинацию, т.е. комбинацию с какими-то оптимальными свойствами. Комбинировать можно что угодно, например, из группы студентов медицинского факультета можно выбрать группу людей которая будет заниматься продлением жизни человека до 800 лет или выбрать человека, который пойдет на дежурство. Описанные задачи – комбинаторные. Можно комбинировать символы некоторого алфавита, и в этом случае проявляется связь с такими объектами, как ДНК последовательности и т.д.

Рассмотрим основные правила комбинаторики. Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ – множество объектов, где a_i – некоторый объект при $i = 1, ..., n$. Например, A – совокупность студентов в аудитории, a_1 – первый студент в этой совокупности. $|A|$ – обозначает количество объектов в множестве A и называется *мощностью множества* A.

Правило сложения. *Пусть есть два множества объектов* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *и* $B = \{b_1, ..., b_m\}$, *тогда количество способов выбрать один объект из* A *или один объект из* B *равно* $n + m$.

Пример 1.1. Пусть множество A состоит из десяти цифр, а B – из 33 букв русского алфавита. Тогда в силу правила сложения мы можем взять одну цифру или одну букву 43 способами.

Правило умножения. *Пусть есть два множества объектов* $A = \{a_1, ..., a_n\}$ *и* $B = \{b_1, ..., b_m\}$, *тогда количество способов выбрать сперва один объект из* A, *а затем выбрать один объект из* B *равно* $n \cdot m$.

Рассмотрим правило умножения более подробно, а именно, для множеств $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и $B = \{b_1, ..., b_m\}$ перечислим все последовательные способы выбора:

$$\begin{array}{cccc} a_1b_1, & a_1b_2, & \ldots & a_1b_m, \\ a_2b_1, & a_2b_2, & \ldots & a_2b_m, \\ & & \ldots & \\ a_nb_1, & a_nb_2, & \ldots & a_nb_m. \end{array}$$

Непосредственным пересчетом убеждаемся, что в этом наборе $n \cdot m$ элементов.

Пример 1.2. Посчитаем количество автомобильных номеров. Сколько автомобильных номеров можно составить, если зафиксировать номер региона? Мы будем рассматривать именно номера вида

$$(a_1, b_2, b_3, b_4, a_5, a_6),$$

где a_i – буква из набора в 12 штук, b_j – цифра из набора $\{0, 1, ..., 9\}$, $i = 1, 5, 6$, $j = 2, 3, 4$. Тогда первой компоненте a_1 отвечает множество $A_1 = \{A, B, C, ..., X\}$ с мощностью $|A_1| = 12$, компоненте b_2 отвечает множество $A_2 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, компоненте b_3 отвечает множество $A_3 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, компоненте b_4 отвечает множество $A_4 = \{0, 1, 2, ..., 9\}$, компоненте a_5 отвечает множество $A_5 = A_1$, компоненте a_6 отвечает множество $A_6 = A_1$. Используя правило умножения получим, что количество автомобильных номеров равно $12 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 12$.

Принцип Дирихле. *Пусть есть n ящиков и $n+1$ кролик. Если рассадить всех кроликов по этим ящикам, то обязательно найдется ящик в котором не меньше двух кроликов.*

Пример 1.3. Рассмотрим утверждение: „Дан квадрат на плоскости со стороной 2. В этом квадрате произвольным образов выбирают 5 точек. Тогда, всегда найдутся 2 точки среди этих 5, расстояние между которыми не больше чем $\sqrt{2}$“. Докажем это утверждение. См. рисунок 1.1. Если мы хотим здесь применить принцип Дирихле, то мы должны полагать, что „кролики“это точки, этих „кроликов“пять, и, следовательно, „ящиков“четыре. Этими „ящиками“являются клетки (со стороной единица) на которые мы разбиваем наш квадрат, см. рисунок. В силу принципа Дирихле хотя бы 2 точки попадут в одну клетку. Расстояние между этими точками не может превышать длину диагонали клетки, которая равна $\sqrt{2}$ в силу теоремы Пифагора.

1.3. Сочетания, размещения и перестановки

Пусть $A = \{a_1, ..., a_n\}$ – множество объектов, число $k \leqslant n$ (k может быть нулем). Как можно извлечь из множества A ровно k объектов? Можно

1) извлекать эти объекты последовательно без возвращения, один за другим k раз;

2) извлекать с возвращением, а именно, извлечь один объект из множества A, вернуть обратно, извлечь следующий объект, вернуть его обратно и т.д. k раз. В этом случае мы получим слова, буквами которых являются наши объекты. Например, так мы можем получить слово ЖАБА если извлекаем 4 буквы с возвращением из русского алфавита;

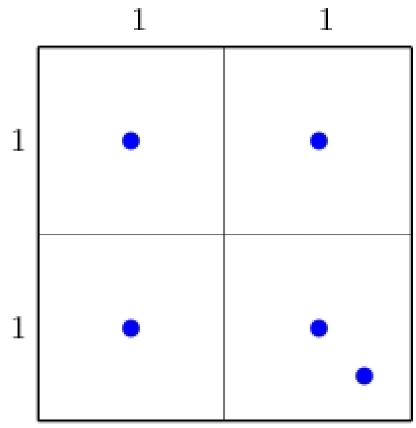


Рис. 1.1. Иллюстрация принципа Дирихле в примере 1.3.

3) извлекать без возвращения, сразу все k объектов, кучей без повторов (неупорядоченно);

4) извлекать неупорядоченно k объектов, которые могут повторятся. Примером такого извлечения будет следующая задача: пусть в магазине есть бесконечное количество лимонов, яблок и груш. Рассмотрим множество $A = \{$лимон, яблоко, груша $\}$. Мы хотим купить 5 фруктов. Каким числом способов мы соберем в авоську 5 фруктов? Т.к. порядок не важен, то это число будет равно числу способов извлечь неупорядоченно 5 фруктов из $A = \{$ лимон, яблоко, груша $\}$ с повторениями.

Перечисленным извлечениям соответствуют:

1) k-размещения без повторений;

2) k-размещения с повторениями;

3) k-сочетания без повторений;

4) k-сочетания с повторениями.

Разберем их подробнее. Предварительно заметим, что $\emptyset$ – обозначает пустое множество и полагается (здесь $n!$ читается n-факториал):

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1.$$

Соответственно четырем типам извлечений введем обозначения:

1) число k-размещений без повторений из n объектов обозначается A_n^k (читается „а из n по k“);

2) число k-размещений с повторениями из n объектов обозначается $\overline{A_n^k}$;

3) число k-сочетаний без повторений из n объектов обозначается C_n^k (читается „цэ из n по k", это обозначение придумал Паскаль в 17 веке, но сейчас в англоязычном мире принято обозначение $\binom{n}{k} = C_n^k$);

4) число k-сочетаний с повторениями из n объектов обозначается $\overline{C_n^k}$.

.

Теорема 1.1.

$$\overline{A_n^k} = n^k.$$

Доказательство. Возьмем n объектов $\{a_1, ..., a_n\}$. Мы хотим выбирать объект из этого множества и возвращать обратно и так k раз. Это действие можно представить как последовательный выбор объектов по одному из множеств

$$A_1 = \{a_1, ..., a_n\}, \quad A_2 = \{a_1, ..., a_n\}, \quad ..., \quad A_k = \{a_1, ..., a_n\}.$$

В силу правила умножения мы получим количество способов выбрать k объектов равным

$$\underbrace{n \cdot n \cdot ... \cdot n}_{k} = n^k.$$

■

Теорема 1.2.

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Доказательство. Выберем из $A = \{a_1, ..., a_n\}$ первый объект n способами, назад его не возвращаем, затем извлечем из оставшихся $n-1$ объекта второй объект $n-1$ способом, и т.д. вплоть до k-го объекта который мы извлечем $n-k+1$ числом способов. Применим правило умножения и получим, что действие состоящее в извлечении упорядочено без возвращения k объектов из n можно выполнить $n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)$ числом способов.

■

Определение 1.3.. *n-размещение без повторений из n объектов называется перестановкой.*

Пример 1.4. Пусть у нас есть 7 объектов { л, я, г, у, ш, к, а }. Мы можем последовательно выбирать из этих объектов 7 объектов и получить, например, „ялгушка "что и является перестановкой исходных объектов. Число перестановок, очевидно, равно $A_n^n = n!$ в силу теоремы 1.2.

Теорема 1.4.

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Доказательство. Из исходного набора объектов $\{a_1, ..., a_n\}$ образуем k штук сочетаний: первое сочетание – $\{a_1, ..., a_k\}$, и т.д., последнее сочетание – $\{a_{n-k+1}, ..., a_n\}$. Номер последнего сочетания по определению есть C_n^k. Затем мы каждое из полученных сочетаний упорядочиваем $k!$ числом способов и получаем размещения. Следовательно, число размещений – это с одной стороны A_n^k, а с другой стороны $C_n^k \cdot k!$. По этому мы получим утверждение нашей теоремы.

■

Лекция 2

2.1. Теорема о числе сочетаний с повторениями

Теорема 2.1.

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k.$$

Доказательство. Мы хотим установить взаимно однозначное соответствие между k-сочетаниями с повторениями из n объектов и k-сочетаниями без повторений из $n+k-1$ объектов.

На примере обсудим способ доказательства этой теоремы: пусть у нас есть число $n = 33$, русский алфавит { а, б, в, ..., ю, я }, число $k = 4$. Возьмем 4-сочетание с повторением из алфавита, например

$$\{ \text{ж, а, б, а} \} = \{\text{а, а, б, ж} \},$$

образуем для него „паспорт“вида

$$\underbrace{1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, ..., 0}_{36=33+4-1},$$

перебирая все буквы алфавита, выписывая нули и еденицы, где 1 означает, что буква есть, 0 обозначает перегородку между буквами, если буквы нет – то ничего не ставим. Отметим, что между „паспортами“и словами с повторениями есть взаимоoднозначное соответствие, ведь по „паспорту“мы можем востановить слово.

В общем случае, используя множество

$$\{a_1, ..., a_n\}$$

создаем k-сочетание с повторениями и затем, создаем для него „паспорт“вида

$$\underbrace{\underbrace{1, ..., 1}_{\text{количество } a_1}, 0, \underbrace{1, ..., 1}_{\text{количество } a_2}, 0, ..., 0, \underbrace{1, ..., 1}_{\text{количество } a_n}}_{n+k-1 \text{ цифр}},$$

так же как мы это делали в примере.

Поскольку мы установили взаимно однозначное соответствие между k-сочетаниями с повторениями из n объектов и k-сочетаниями без повторений из $n+k-1$ объектов (т.е. „паспортами“), получаем, что интересующее нас $\overline{C}_n^k$ равно количеству всех таких „паспортов“.

Каким числом способов мы можем создать „паспорт“в котором k единиц и $n-1$ нулей? Мы можем из $n+k-1$ позиций в векторе выбираем k позиций, на которые поставим 1, на оставшиеся места мы поставим 0. Сделать это можно C_{n+k-1}^k числом способов.

■

2.2. Бином Ньютона

Для степеней сумм мы можем расписать формулы:

$$\begin{aligned}
(x+y)^1 &= x+y, \\
(x+y)^2 &= x^2+y^2+2xy, \\
(x+y)^3 &= x^3+y^3+3x^2y+3y^2x, \\
(x+y)^4 &= x^4+y^4+4x^3y+6x^2y^2+4y^3x,
\end{aligned}$$

каким образом мы можем получить общую формулу для коэффициентов в разложении $(x+y)^n$?

Теорема 2.2. ***(Бином Ньютона)***

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k y^{n-k}$$

Доказательство. Очевидно,

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)...(x+y)}_{n},$$

и из каждой скобки мы должны взять или x или y. Пусть из k скобок взяли x, тогда из $n-k$ скобок взяли y. Когда перемножим эти переменные, получим слагаемое вида $x^k y^{n-k}$. Сколько таких слагаемых будет? А ровно столько сколько раз мы возьмем конкретные k скобок (из которых возьмем x) из n возможных. Это можно сделать C_n^k числом способов. Получаем, что в разложение $(x+y)^n$ входит слагаемое $C_n^k x^k y^{n-k}$ при конкретном k. Суммируя по k получим требуемое.

■

2.3. Комбинаторные тождества

Замечание 2.3. ***(Тождество 1)***

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

Доказательство. Расписав по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

правую и левую часть рассматриваемого равенства, получим верное тождество.

■

Замечание 2.4. ***(Тождество 2)***

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Доказательство. Нарисуем треугольник Паскаля (это бесконечная таблица коэффициентов, имеющая треугольную форму. В этом треугольнике на вершине и по бокам стоят единицы. Каждое число равно сумме двух расположенных над ним чисел. Строки треугольника симметричны относительно вертикальной оси.)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
&&&&&1&&&&& \\
&&&&1&&1&&&& \\
&&&1&&2&&1&&& \\
&&1&&3&&3&&1&& \\
&1&&4&&6&&4&&1& \\
1&&5&&10&&10&&5&&1
\end{array}$$

Бесконечная таблица биномиальных коэффициентов, имеющая треугольную форму, выгляди следующим образом:

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&C_0^0&&&& \\
&&&C_1^0&&C_1^1&&& \\
&&C_2^0&&C_2^1&&C_2^2&& \\
&C_3^0&&C_3^1&&C_3^2&&C_3^3& \\
C_4^0&&C_4^1&&C_4^2&&C_4^3&&C_4^4
\end{array}$$

Обоснование совпадения этих двух таблиц основано на тождестве 2, которое мы сейчас должны доказать.

1 способ доказательства.

Рассмотрим правую часть требуемого равенства:

$$\begin{aligned}
C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} &= \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \\
&= \frac{(n-1)!(n-k) + (n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.
\end{aligned}$$

2 способ доказательства.

Заметим, что любое k-сочетание из n объектов $\{a_1, ..., a_n\}$ либо содержит a_1 либо его не содержит. Следовательно, $C_n^k =$ число k-сочетаний содержащих a_1 плюс число k-сочетаний не содержащих a_1. Число k-сочетаний не содержащих a_1, очевидно, равно C_{n-1}^k. Число k-сочетаний содержащих a_1 равно C_{n-1}^{k-1}. Следовательно, верна теорема.

■

Просуммируем значения в строках треугольника Паскаля

$$\begin{array}{cccccccccccl}
&&&&&1&&&&&& \longrightarrow 1 = 2^0 \\
&&&&1&&1&&&&& \longrightarrow 2 = 2^1 \\
&&&1&&2&&1&&&& \longrightarrow 4 = 2^2 \\
&&1&&3&&3&&1&&& \longrightarrow 8 = 2^3 \\
&1&&4&&6&&4&&1&& \longrightarrow 16 = 2^4 \\
1&&5&&10&&10&&5&&1& \longrightarrow 32 = 2^5
\end{array}$$

и заметим закономерность – суммы равны степени двойки. Сформулируем и докажем это утверждение формально.

Замечание 2.5. ***(Тождество 3)***

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n.$$

Доказательство. 1 способ доказательства.

Используя бином Ньютона, получим

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k.$$

2 способ доказательства (комбинаторный).

Рассмотрим все последовательности длинны n из нулей и единиц (это n-размещение из двух объектов). Сколько таких последовательностей? Используя правило умножения получим 2^n. Кроме того, для k такого, что $0 \leqslant k \leqslant n$, число последовательностей с k единицами и $n-k$ нулями равно C_n^k.

■

Лекция 3

Просуммируем квадраты значений в строках треугольника Паскаля

$$\begin{array}{ccccccccc c}
 & & & & 1 & & & & & \longrightarrow 1 = C_0^0 \\
 & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow 2 = C_2^1 \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow 6 = C_4^2 \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow 20 = C_6^3 \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow 70 = C_8^4.
\end{array}$$

Теперь сформулируем и докажем подмеченную закономерность.

Замечание 3.1. ***(Тождество 4)***

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + ... + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n.$$

Доказательство. Комбинаторный способ доказательства.

Рассмотрим множество объектов:

$$\{a_1, ..., a_n, a_{n+1}, ..., a_{2n}\}.$$

Сколько в нем n-сочетаний без повторений? Очевидно, по определению, C_{2n}^n. Таким образом мы объяснили природу правой части требуемого равенства.

С другой стороны, рассмотрим число $i \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, и все n-сочетания без повторений, в каждое из которых входят ровно i объектов из $a_1, ..., a_n$. На рисунке представлено разбиение множества n-сочетаний без повторений на кусочки соответствующие различным i.

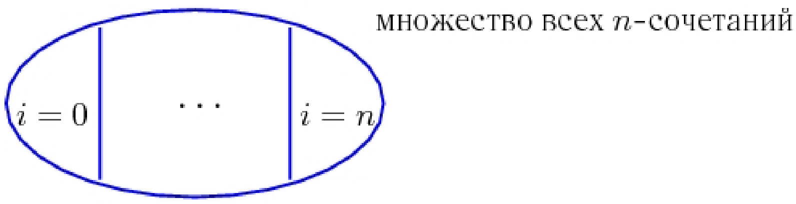


Рис. 3.1. Разбиение множества n-сочетаний без повторений на кусочки соответствующие различным i.

Количество таких сочетаний (при конкретном i) равно, по правилу умножения, $C_n^i C_n^{n-i}$. Действительно, если $i = 0$, то выбираем n-сочетание из $a_{n+1}, ..., a_{2n}$ количеством способов n. Если $i = 1$, то выбираем n-сочетание $n \cdot C_n^{n-1}$, где n – выбор одного из $a_1, ..., a_n$, а C_n^{n-1} – выбор $n - 1$ объекта из $a_{n+1}, ..., a_{2n}$ и т.д.

В силу рассуждений о рисунке, мы имеем равенство

$$C_{2n}^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i C_n^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (C_n^i)^2,$$

где последнее равенство имеет место в силу тождества 1. Что и требовалось доказать.

■

3.1. Полиномиальная формула

Комбинаторная задача. Рассмотрим слово КОМБИНАТОРИКА и будем переставлять буквы в этом слове. Сколько математических слов в этом случае получится? Ответ: $\frac{13!}{2!2!2!}$.

Докажем эту формулу. Перечислим все буквы указанного слова:

$$\text{К} - 2,\ \text{О} - 2,\ \text{М} - 1,\ \text{Б} - 1,\ \text{И} - 2,\ \text{Н} - 1,\ \text{А} - 2,\ \text{Т} - 1,\ \text{Р} - 1,$$

и представим, что мы набираем эти буквы в пустой вектор $\underbrace{(\cdot, \cdot, \cdot, ..., \cdot)}_{13}$ длинны 13.

Сперва выберем 2 места для буквы К, это можно сделать C_{13}^2 числом способов. Затем выберем 2 места для буквы О, это можно сделать C_{11}^2 числом способов. Дальнейший выбор мест для букв мы производим: C_9^1, C_8^1, C_7^2, C_5^1, C_4^2, C_2^1 и C_1^1 числом способов. Тогда общее действие состоящее в создании слова может быть выполнено

$$C_{13}^2 C_{11}^2 C_9^1 C_8^1 C_7^2 C_5^1 C_4^2 C_2^1 C_1^1$$

числом способов. Расписав число сочетаний по формуле $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$, получим верный ответ

$$C_{13}^2 C_{11}^2 C_9^1 C_8^1 C_7^2 C_5^1 C_4^2 C_2^1 C_1^1 = \frac{13!}{2!2!2!}.$$

Пусть у нас есть набор символов

$$a_1, ..., a_k,$$

где объектов $a_1 - n_1$ штук, объектов $a_2 - n_2$ штук,... объектов $a_k - n_k$ штук, и число $n = n_1 + ... + n_k$. $P(n_1, ..., n_k)$ – количество способов упорядочить наши n объектов и называется „полимиальный коэффициент“. Рассуждая как в задаче со словом КОМБИНАТОРИКА, получим, что верна следующая теорема:

Теорема 3.2.

$$P(n_1, ..., n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C^{n_k}_{\underbrace{n - n_1 - ... - n_{k-1}}_{=n_k}} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}.$$

Заметим, что для двух переменных n_1, n_2 полиномиальный коэффициент $P(n_1, n_2)$ превращается в биномиальный:

$$P(n_1, n_2) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} = \frac{n!}{n_1! n_2!} = C_n^{n_1}$$

Рассмотрим выражение $(x_1 + \cdots + x_k)^n$ похожее на бином Ньютона. Заметим, что

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = \underbrace{(x_1 + \cdots + x_k)(x_1 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + \cdots + x_k)}_{n},$$

где мы берем x_1 из n_1 скобок, x_2 из n_2 скобок,..., x_k из n_k скобок. При этом верно $n_1+...+n_k=n$, где $0 \leqslant n_1 \leqslant n$,..., $0 \leqslant n_k \leqslant n$. При данных конкретных $n_1,...,n_k$, удовлетворяющих выписаным ограничениям, количество способов осуществить выбор скобок из которых будут извлекаться соответствующие переменные равно

$$P(n_1,...,n_k) = C_n^{n_1} C_{n-n_1}^{n_2} \cdots C_{n-n_1-...-n_{k-1}}^{n_k}.$$

А значит, после приведения подобных слагаемых, $P(n_1,...,n_k)$ оказывается коэффициентом при выражении $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$, т.е. верна формула:

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = \sum_{\substack{0\leqslant n_1,...,n_k\leqslant n\\ n=n_1+...+n_k}} P(n_1,...,n_k)x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}. \tag{3.1}$$

Пример 3.1. Рассмотрим формулу (3.1) при конкретных значениях. При $n=3$, $k=3$ и условиях $n_1,n_2,n_3 \in N \cup \{0\}$, $n_1+n_2+n_3=3$ рассмотрим все наборы троек n_1,n_2,n_3:

3, 0, 0	2, 1, 0
0, 3, 0	1, 0, 2
0, 0, 3	0, 1, 2
1, 1, 1	2, 0, 1
1, 2, 0	0, 2, 1

Тогда, по формуле (3.1), имеем

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^3 &= P(3,0,0)x_1^3 + P(0,3,0)x_2^3 + P(0,0,3)x_3^3 + P(1,1,1)x_1x_2x_3 + \\ &+P(1,2,0)x_1x_2^2 + P(2,1,0)x_2x_1^2 + P(1,0,2)x_1x_3^2 + \\ &+P(0,1,2)x_2x_3^2 + P(2,0,1)x_1^2x_3 + P(0,2,1)x_2^2x_3.\end{aligned}$$

Вычислим полиномиальные коэффициенты:

$$\begin{aligned} &P(3,0,0)=1, \quad P(2,1,0)=3,\\ &P(0,3,0)=1, \quad P(1,0,2)=3,\\ &P(0,0,3)=1, \quad P(0,1,2)=3,\\ &P(1,1,1)=6, \quad P(2,0,1)=3,\\ &P(1,2,0)=3, \quad P(0,2,1)=3.\end{aligned}$$

Окончательно получим:

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3)^3 &= x_1^3+x_2^3+x_3^3+6x_1x_2x_3+3x_1x_2^2+\\ &+3x_2x_1^2+3x_1x_3^2+3x_2x_3^2+3x_1^2x_3+3x_2^2x_3.\end{aligned}$$

3.2. Полиномиальное тождество

Замечание 3.3. ***(Тождество 5)*** *Если при данных n и k сложить все числа $P(n_1, ..., n_k)$, где $n = n_1 + ... + n_k$, $0 \leqslant n_1 \leqslant n, ..., 0 \leqslant n_k \leqslant n$, то получится k^n, т.е.*

$$\sum_{\substack{0 \leqslant n_1, ..., n_k \leqslant n \\ n = n_1 + ... + n_k}} P(n_1, ..., n_k) = k^n.$$

Доказательство. Рассмотрим очевидное равенство

$$(\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{k})^n = k^n.$$

С другой стороны

$$(\underbrace{1 + 1 + ... + 1}_{k})^n = \sum_{\substack{0 \leqslant n_1, ..., n_k \leqslant n \\ n = n_1 + ... + n_k}} P(n_1, ..., n_k) 1^{n_1} 1^{n_2} \cdots 1^{n_k},$$

откуда получаем требуемое равенство.

■

Лекция 4

Замечание 4.1. ***(Тождество 6)***

$$C_{n+m}^{n} = \sum_{i=0}^{m} C_{n+m-i-1}^{n-1}.$$

Доказательство. Рассмотрим множество $A = \{a_1, ..., a_{n+1}\}$ и все возможные m-сочетания с повторениями из этого множества. $\overline{C}_{n+1}^{m}$ – количество таких сочетаний. Напомним, что в силу теоремы 2.1 верна формула:

$$\overline{C}_{n+1}^{m} = C_{n+1+m-1}^{m} = C_{n+m}^{m}.$$

Используя тождество 1, получим

$$\overline{C}_{n+1}^{m} = C_{n+m}^{n}.$$

С другой стороны в каждом из m-сочетаний с повторениями есть какое-то конкретное количество объектов a_1 и число всех m-сочетаний с повторениями можно посчитать как

$$\sum_{i=0}^{m} A(i),$$

где $A(i)$ – количество m-сочетаний с повторениями, в каждом из которых ровно i раз встречается a_1. Вычислим $A(i)$, для этого рассмотрим m-сочетание с повторениями, в котором ровно i раз встречается a_1:

$$\{\underbrace{a_1, a_1, ..., a_1}_{=i} \underbrace{\cdot, \cdot, ..., \cdot}_{=m-i}\},$$

где в $\underbrace{\cdot, \cdot, ..., \cdot}_{=m-i}$ нет a_1, поэтому, очевидно, $A(i)$ – количество $(m-i)$-сочетаний с повторениями из $\{a_2, ..., a_{n+1}\}$. Следовательно,

$$A(i) = \overline{C}_{n}^{m-i} = C_{n+m-i-1}^{m-i} = C_{n+m-i-1}^{n-1},$$

в силу теоремы 2.1 и тождества 1.

■

Выпишем несколько простых следствий полученного тождества.

Следствие 4.2. *При $n = 1$ получим*

$$1 + m = C_{1+m}^{1} = \sum_{i=0}^{m} C_{m-i}^{0} = \sum_{i=0}^{m} 1.$$

Следствие 4.3. *При $n = 2$ получим формулу суммы $m+1$ членов арифметической прогрессии:*

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2} = C^2_{2+m} = \sum_{i=0}^{m} C^1_{m-i+1} =$$
$$= \sum_{i=0}^{m} m - i + 1 = (m+1) + m + (m-1) + ... + 1.$$

Следствие 4.4. *При $n = 3$ получим*

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} = C^3_{3+m} = \sum_{i=0}^{m} C^2_{m-i+2} =$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + ... + \frac{2\cdot 1}{2}. \tag{4.1}$$

Интерпретировать в этом следствии сумму $\frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + ... + \frac{2\cdot 1}{2}$ можно как сумму пирамидок апельсинов, где $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ – количество апельсинов в пирамиде, у которой сбоку пирамиды лежат $m+1$ апельсин, $\frac{(m+1)m}{2}$ – количество апельсинов в пирамиде, у которой сбоку пирамиды лежат m апельсин, и т.д.

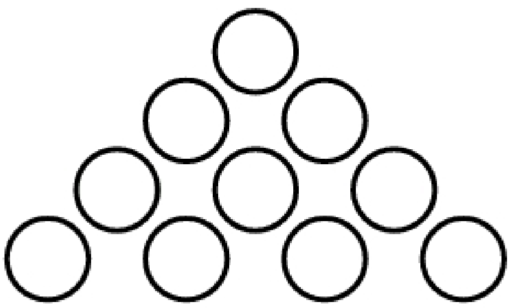


Рис. 4.1. Пирамида апельсинов.

Рассмотрим формулу (4.1) выделив в правой части квадраты:

$$\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{6} =$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)}{2} + \frac{(m+1)m}{2} + \frac{(m-1)m}{2} + ... + \frac{2\cdot 1}{2} =$$
$$= \frac{(m+1)^2 + (m+1)}{2} + \frac{m^2+m}{2} + \frac{(m-1)^2 + (m-1)}{2} + ... + \frac{1^2+1}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(1^2 + 2^2 + ... + (m+1)^2 + \underbrace{1 + 2 + ... + (m+1)}_{=\frac{(m+1)(m+2)}{2}}\right).$$

Откуда получим формулу для суммы квадратов

$$1^2 + 2^2 + ... + (m+1)^2 = \frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{3} - \frac{(m+1)(m+2)}{2} =$$
$$= \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}.$$

Перепишем получившуюся формулу для m слагаемых:

$$1^2 + 2^2 + ... + m^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}.$$

Следствие 4.5. *При $n = 4$ получим формулу для суммы кубов*

$$1^3 + 2^3 + ... + m^3 = \left(\frac{m(m+1)}{2}\right)^2.$$

Проверить полученную формулу читателю предоставляется самостоятельно.

Если мы хотим получить формулу для суммы $1^{10} + 2^{10} + ... + m^{10}$, то можно как и ранее использовать формулу (4.1) и все подобные формулы полученные при $n = 4, 5, ..., 11$ из формулы тождества 6. Но можно поступить иначе, а именно, нам известно, что формула будет иметь вид:

$$1^{10} + 2^{10} + ... + m^{10} = a_0 + a_1 m + a_2 m^2 + ... + a_{11} m^{11},$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, ..., a_{11}$ неизвестны. Для того, что бы найти эти коэффициенты, рассмотрим последовательно значения $m = 1, 2, ...$ и получим 12 уравнений, которые, в последствии, будет сложно решить.

$$\begin{aligned} 1 &= a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{11}, \\ 1025 &= a_0 + 2a_1 + 4a_2 + ... + 2048a_{11}, \\ 1^{10} + 2^{10} + 3^{10} &= a_0 + a_1 3 + a_2 3^2 + ... + a_{11} 3^{11}, \\ ... & \end{aligned}$$

Мы рассмотрели этот способ получения формулы для суммы $1^{10} + 2^{10} + ... + m^{10}$, что бы стало понятно, что использование тождества 6 – более простой путь.

4.1. Формула включений и исключений

Пример 4.1. Пусть у нас есть 50 человек, среди которых кто-то может знать английский, кто-то французский и кто-то немецкий язык (могут быть люди которые знают сразу три языка, могут быть те кто знают только один язык). Обозначим через N(а) – количество людей знающих английский язык (возможно, они знают и еще какой-то язык, помимо английского), N(ф) – количество людей знающих французский язык, N(н) – количество людей знающих немецкий язык. Так же, пусть нам известны N(а,ф), N(а,н) и N(ф,н) количества людей знающих пару языков, и известно количество людей знающих все три языка сразу – N(а,ф,н). Как посчитать

количество людей, которые не знают ни один из указанных языков?
Ответ: 50-N(а)-N(ф)-N(н)+N(а,ф)+N(а,н)+N(ф,н)-N(а,ф,н).

Пусть есть N объектов $a_1, ..., a_N$ и их свойства, которые мы обозначаем $\alpha_1, ..., \alpha_n$. Пусть даны количества объектов в нашем наборе, обладающие различными свойствами:
$N(\alpha_1), ..., N(\alpha_n)$ – количества объектов обладающих свойствами $\alpha_1, ..., \alpha_n$ соответственно (таких количеств всего n),
$N(\alpha_1, \alpha_2), ..., N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ – количества объектов обладающих двумя свойствами $(\alpha_1, \alpha_2), ..., (\alpha_{n-1}, \alpha_n)$ соответственно (таких количеств всего C_n^2),...
$N(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1})$, $N(\alpha_1, \alpha_3, ..., \alpha_n)$,..., $N(\alpha_2, ..., \alpha_n)$ – количества объектов обладающих $n-1$ свойством $(\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}), ..., (\alpha_2, ..., \alpha_n)$ соответственно (таких количеств всего $C_n^{n-1} = n$),
$N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – количество объектов обладающих n свойствами (таких количеств всего $C_n^n = 1$),
$N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)$ – количество объектов не обладающих ни одним из n свойств.

Теорема 4.6. ***Формула включений и исключений***

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n) &= N - N(\alpha_1) - ... - N(\alpha_n) + N(\alpha_1, \alpha_2) + ... + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) + ... \\ &+(-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n). \end{aligned}$$

Без доказательства.

Замечание 4.7. ***(Тождество 7)*** *Рассмотрим $A = \{a_1, ..., a_n\}$ и все m-размещения с повторениями из A, $m < n$. Таких размещений всего $N = n^m$. Объектами, к которым мы будем применять формулу включений и исключений будут эти N размещений. Размещение обладает свойством α_i, если элемент a_i не принадлежит ему. $N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n)$ – количество объектов не обладающих ни одним из n свойств. Очевидно,*

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n) &= 0, \\ N(\alpha_i) &= (n-1)^m, \\ N(\alpha_i, \alpha_j) &= (n-2)^m, \\ &... \\ N(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) &= (n-n)^m = 0, \end{aligned}$$

Тогда,

$$\begin{aligned} 0 &= N(\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_n) = C_n^0 n^m - C_n^1 (n-1)^m + C_n^2 (n-2)^m - ... \\ &+(-1)^{n-1}(n-(n-1))^m + (-1)^n (n-n)^m. \end{aligned}$$

Иначе перепишем эту формулу в виде:

$$0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k (n-k)^m.$$

Доказательство следует из формулы включений и исключений.

Замечание 4.8. ***(Тождество 8)***

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 0, & n \geqslant 1. \end{cases}$$

Доказательство. Применим бином Ньютона:

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + (-1))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (1)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = \\ &= C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + ... + (-1)^n C_n^n. \end{aligned}$$

■

Лекция 5

5.1. Перечисление циклических последовательностей

Пример 5.1. Сколько хороводов можно составить из 17 девушек? Хоровод это цикл с направлением обхода, см. рисунок:

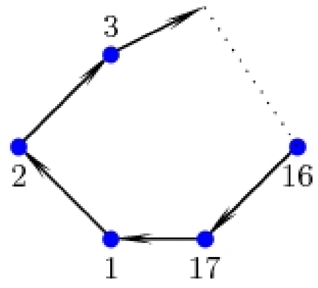


Рис. 5.1. Хоровод из 17 девушек.

Разомкнем цикл и получим очередь вида:

Рис. 5.2. Очередь из 17 девушек.

Упорядочить 17 девушек в очереди можно 17! числом способов. Мы можем рассмотреть 2 различные шеренги, которые при соединении в кольцо (каждая), дадут нам один и тот же хоровод, см. рисунок:

Рис. 5.3. Пример кольца из 17 девушек полученного из двух разных шеренг.

Получается, что из двух разных шеренг (очередей) мы получили один и тот же хоровод. Но шеренг дающих один и тот же хоровод ровно 17 (мы третью очередь начинаем с девушки №3, четвертую очередь с девушки №4 и т.д.). Таким образом число хороводов из 17 девушек равно $17!/17 = 16!$.

Пример 5.2.

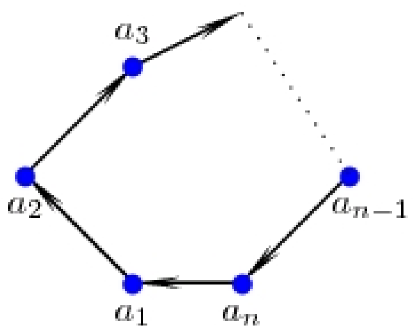


Рис. 5.4. Цикл с направлением обхода.

Пусть множество $X = \{b_1, ..., b_r\}$ – алфавит. Составим цикл с направлением обхода, где $a_i \in X$, см. рисунок 5.4. Найдем $T_r(n)$ равное количеству всех возможных циклических слов длинны n составленных из произвольных букв (с повторами) из алфавита X. Рассмотрим алфавит состоящий из 3-х букв, а именно, $X = \{$ C, O, H $\}$. Здесь $r = 3$. Возьмем $n = 4$, получим, например, слова-шеренги „СОСН“, „ОСНС“, „СНСО“и „НСОС“, образованные друг из друга сдвигом. Затем зациклим каждое из этих слов и получим один и тот же цикл.

Кажется, что будет верным написать $T_r(n) = \frac{3^4}{4}$, но это неправильно, т.к. можно при $r = 3$ и $n = 4$ образовать слово-шеренгу „СОСО “, которое при сдвиге образует еще одно слово „ОСОС “и дальнейшие попытки образовать слова с помощью сдвига приведут к уже имеющимся словам. Также при $r = 3$ и $n = 4$ можно образовать слово-шеренгу „СССС “, которое при сдвигах даст само себя. Отсюда мы делаем вывод, что формула для $T_r(n)$ представит собой некоторую сумму слогаемых.

Из приведенных нами построений мы видим, что слов-шеренг для рассмотренных трех случаев мы получили 4, 2 и 1 соответственно. Заметим, что эти числа являются делителями числа $n = 4$. Вспомним, что такое простое число. Простое число это число которое делится только на 1 и само себя. Важно, что при этом 1 не является простым числом по определению. Отступим пока от поиска формулы для $T_r(n)$ и рассмотрим формулу обращения Мёбиуса.

Теорема 5.1. ***(Основная теорема арифметики)*** *Пусть $n \in N$, $n \geqslant 2$. Тогда существуют какие-то простые числа $p_1, ..., p_s$ и существуют натуральные $k_1, ..., k_s$, такие, что имеет место представление:*

$$n = {p_1}^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}. \tag{5.1}$$

Более того, такое разложение единственно.

Разложение (5.1) называется каноническим. Доказательство не приводится.

Перечислим числа от 2 до 12 в виде произведений степеней простых чисел $2 = 2^1$, $3 = 3^1$, $4 = 2^2$, $5 = 5^1$, $6 = 2^1 \cdot 3^1$, $7 = 7^1$, $8 = 2^3$, $9 = 3^2$, $10 = 2^1 \cdot 5^1$, $11 = 11^1$, $12 = 2^2 \cdot 3^1$.

Анекдот. Теорема Ферма утверждает, что для любого натурального $n > 2$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых ненулевых числах x, y, z. Эта теорема была доказана только в 1995 году Эндрю Уайлсом с коллегами. До 1995 года ферматисты не имея достаточной математической культуры пытались доказать эту теорему, принося свои ошибочные доказательства в научные организации и университеты для демонстрации профессиональным математикам. Был выдающийся профессор – Наум Ильич Фельдман (1918 года рождения), который занимался диафантовыми уравнениями и вел еженедельный семинар по теории чисел. На один из этих семинаров (посвященный простым числам) пришел человек, который представился доцентом и по окончании семинара подошел к Н. И. Фельдману с вопросом: „У вас кто-нибудь диафинтовыми уравнениями занимается?"Н. И. Фельдман ответил: „Много чем занимаемся, а этим не довелось". Тогда представившийся доцентом сказал, что он нашел две пары различных простых чисел p_1, p_2 и q_1, q_2 которые перемножил и получил $p_1p_2 \neq q_1q_2$, что противоречит основной теореме арифметики. Надо отметить, что для некоторых числовых множеств (не в натуральных числах) эта теорема не верна, по этому Н. И. Фельдман ответил: „А в каком кольце?". На это представившийся доцентом сказал:„Что такое кольцо?". Анекдот закончен.

Почему единица не является простым числом? Потому, если бы мы считали 1 простым числом, то в разложении (5.1) основной теоремы арифметики можно было бы вписать единицу в любой степени, что нарушало бы единственность этого разложения.

5.2. Функция Мёбиуса. Формула обращения

Определение 5.2. ***(Функция Мёбиуса)*** *Функцией Мёбиуса называется функция вида*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ (-1)^s, & n = p_1^1 \cdot \ldots \cdot p_s^1, \\ 0, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{5.2}$$

для числа $n \in N$.

Представим несколько значений функции Мёбиуса: $\mu(1) = 1$, $\mu(2) = -1$, $\mu(3) = -1$, $\mu(4) = 0$, $\mu(5) = -1$, $\mu(6) = 1$, $\mu(7) = -1$, $\mu(8) = 0$, $\mu(9) = 0$, $\mu(10) = 1$, $\mu(11) = -1$, $\mu(12) = 0$.

Введем обозначение $d|n$ – читается „d делит n", аналогом введеного обозначения является широко используемое $n \,\vdots\, d$. Так же введем выражение

$$\sum_{d|n} f(d),$$

означающее сумму значений функции f по всем делителям числа n (включая 1 и n).

Пример. 5.3.

$$\sum_{d|12} f(d) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(6) + f(12).$$

Лемма 5.3.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 0, & n \geqslant 2, \end{cases}$$

Доказательство. Для $n = 1$ лемма очевидна, докажем её для $n \geqslant 2$. По основной теореме арифметики имеет место каноническое разложение:

$$n = {p_1}^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_s^{k_s}.$$

Тогда $d|n$ можно представить как

$$d = {p_1}^{\ell_1} \cdot p_2^{\ell_2} \cdot ... \cdot p_s^{\ell_s}, \tag{5.3}$$

где $0 \leqslant \ell_1 \leqslant k_1$,...,$0 \leqslant \ell_s \leqslant k_s$. Действительно, рассмотрим пример: $d|12$ (при каноническом разложении $12 = 2^2 \cdot 3^1$) можно представить как $d = 2^2 \cdot 3^1 = 12$; $d = 2^1 \cdot 3^1 = 6$; $d = 2^0 \cdot 3^1 = 3$; $d = 2^2 \cdot 3^0 = 4$; $d = 2^1 \cdot 3^0 = 2$; $d = 2^0 \cdot 3^0 = 1$.

Заметим, что $\mu(d) = 0$, если хотя бы одно $\ell_i \geqslant 2$ в разложении (5.3) в силу определения функции Мёбиуса. Следовательно, такое d не дает вклад в сумму $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$. Теперь в разложении $\sum\limits_{d|n} \mu(d)$ нас интересуют только слагаемые, в разложении (5.3) которых каждое ℓ_i равно либо нулю либо единице. Таких слагаемых ровно 2^s.

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + s \cdot (-1) + C_s^2 \cdot (-1)^2 + C_s^3 \cdot (-1)^3 + ... + C_s^s \cdot (-1)^s, \tag{5.4}$$

где второе слагаемое получается как произведение числа способов взять одну единицу и $s-1$ нулей в представлении $\ell_1, ..., \ell_s$ (т.е. s) на $\mu(p_i^1) = -1$ (где p_i соответствует ℓ_i равному 1). Третье слагаемое в формуле (5.4) получается как произведение числа способов взять две единицы и $s - 2$ нулей в представлении $\ell_1, ..., \ell_s$ (т.е. C_s^2) на $\mu(p_i^1 p_j^1) = (-1)^2$. Аналогично рассуждая получаем последнее слагаемое. Выражение (5.4) представляет собой знакопеременную сумму равную нулю при $s \geqslant 1$.

■

Теорема 5.4. ***(Формула обращения Мёбиуса)*** *Пусть есть функция $g(n)$ натурального аргумента n и функция $f(n) = \sum\limits_{d|n} g(d)$. Тогда*

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right).$$

Заметим, что для функции $g(n)$ натурального аргумента n верно так же представление

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) \cdot f(d),$$

так как $\frac{n}{d}$ является делителем числа n если делителем является число d.

Лекция 6

Пример.6.1. Рассмотрим теорему о формуле обращения Мёбиуса 5.4 в частном случае. Пусть $g(n) = 2^n$, $n = 12$, тогда $g(12) = 2^{12} = 4096$. Мы определяли в теореме 5.4 функцию

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d).$$

Поэтому

$$f(12) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^6 + 2^{12} = 4190.$$

Теорема 5.4, в данном частном случае, утверждает, что верно представление

$$\begin{aligned} g(12) &= \mu(1)f\left(\frac{12}{1}\right) + \mu(2)f\left(\frac{12}{2}\right) + \mu(3)f\left(\frac{12}{3}\right) + \mu(4)f\left(\frac{12}{4}\right) + \\ &+\mu(6)f\left(\frac{12}{6}\right) + \mu(12)f\left(\frac{12}{12}\right) = 4190 - 78 - 22 + 6 = 4096, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \mu(2) = -1, \quad \mu(3) = -1, \quad \mu(4) = 0, \quad \mu(6) = 1, \\ f(6) = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^6 = 78, \\ f(4) = 2^1 + 2^2 + 2^4 = 22, \\ f(2) = 2^1 + 2^2 = 6. \end{aligned}$$

6.1. Доказательство формулы обращения Мёбиуса

Используя определение функции Мёбиуса и лемму 5.3 докажем теорему 5.4 о формуле обращения Мёбиуса.

В формулировке теоремы 5.4 определена функции $f(n) = \sum\limits_{d|n} g(d)$. Тогда, очевидно,

$$f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d'), \tag{6.1}$$

подставим эту формулу (6.1) в выражение которое надо доказать:

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot f\left(\frac{n}{d}\right),$$

получим

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d')\right).$$

Рассмотрим при $n = 12$ подробнее функцию g:

$$
\begin{aligned}
g(12) &= \sum_{d|12} \mu(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{12}{d}} g(d') \right) = \\
&= \mu(1)(g(1)+g(2)+g(3)+g(4)+g(6)+g(12)) + \\
&\quad +\mu(2)(g(1)+g(2)+g(3)+g(6)) + \\
&\quad +\mu(3)(g(1)+g(2)+g(4)) + \mu(4)(g(1)+g(3)) + \\
&\quad +\mu(6)(g(1)+g(2)) + \mu(12)(g(1)) = \\
&= g(1)\left(\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(4)+\mu(6)+\mu(12)\right) + \\
&\quad +g(2)\left(\mu(1)+\mu(2)+\mu(3)+\mu(6)\right) + \\
&\quad +g(3)\left(\mu(1)+\mu(2)+\mu(4)\right) + g(4)\left(\mu(1)+\mu(3)\right) + \\
&\quad +g(6)\left(\mu(1)+\mu(2)\right) + g(12)\left(\mu(1)\right) = \\
&= \sum_{d|12} g(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{12}{d}} \mu(d') \right).
\end{aligned}
$$

Мы на примере, при $n = 12$, получили равенство

$$
g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d') \right) = \sum_{d|n} g(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right),
$$

докажем его формально, расписав двойную сумму в виде одинарной по парам (d, d') и поменяв местами d и d':

$$
\begin{aligned}
g(n) &= \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} g(d') \right) = \sum_{(d,d')|n:\ d\cdot d'|n} \mu(d)g(d') = \\
&= \sum_{(d,d')|n:\ d\cdot d'|n} \mu(d')g(d) = \sum_{d|n} g(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right).
\end{aligned}
$$

Так как n является делителем самого себя, рассмотрим $\sum\limits_{d|n} g(d) \cdot \left(\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right)$ отделив слагаемое с индексом $d = n$ и получим

$$
\sum_{d|n} g(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right) = g(n) \left(\sum_{d'|1} \mu(d') \right) + \sum_{d|n,\ d<n} g(d) \cdot \left(\sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') \right). \qquad (6.2)
$$

Первое слагаемое, в полученной сумме, в силу леммы 5.3, равно $g(n) \cdot 1$. Второе слагаемое равно нулю, т.к. $\sum\limits_{d'|\frac{n}{d}} \mu(d') = 0$ при $d < n$, в силу той же леммы. Таким образом вся сумма в формуле (6.2) равна $g(n)$, что и требовалось доказать.

■

6.2. Задача о циклических последовательностях и применение формулы обращения Мёбиуса

Рассмотрим задачу о циклических последовательностях, которую рассматривали ранее. Пусть у нас есть алфавит $X = \{b_1, ..., b_r\}$ и число $n \in N$, и нас интересуют все возможные зацикленные слова, вида представленного на рисунке 6.1.:

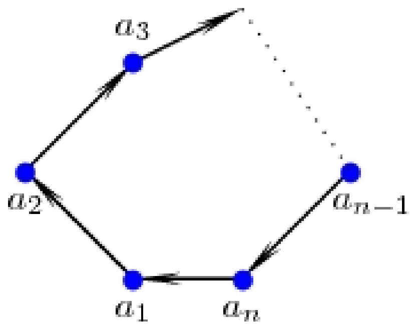


Рис. 6.1. Цикл с направлением обхода.

Обозначим через $T_r(n)$ – количество всех циклических слов длинны n составленных из букв алфавита X с повторами. Введем еще обозначения:

$a_1, a_2, ..., a_n$ – линейное слово, которое можно понимать как слово с направлением вида $a_1 \to a_2 \to ... \to a_n$.
$(a_1, a_2, ..., a_n)$ – циклическое слово, представленное на рисунке выше.

Линейные слова $COCH$, $OCHC$, $CHCO$, $HCOC$ при зацикливании превращаются в одно цклическое слово $(COCH) = (OCHC) = ...$ Здесь мы 4 линейных слова склеили в одно циклическое. Но может быть ситуация, когда мы 2 линейных слова склеим в одно циклическое: линейные слова $OCOC$ и $COCO$ склеиваются в $(OCOC)$.

Будем работать пока только с линейными словами. Сколько есть всего линейных слов? Очевидно, r^n.

Определение 6.1. *Циклическим сдвигом линейного слова $a_1, a_2, ..., a_n$ будем называть операцию, переводящую это линейное слово в слово $a_2, ..., a_n, a_1$.*

Пример.6.2. Для линейного слова $COCH$ имеем 4 циклических сдвига

$$COCH \to OCHC \to CHCO \to HCOC \to COCH.$$

Для линейного слова $COCO$ имеем 2 циклических сдвига

$$COCO \to OCOC \to COCO.$$

Для линейного слова $CCCC$ имеем 1 циклический сдвиг $CCCC \to CCCC$.

Линейное слово	Период линейного слова
$COCH$	$d = 4$
$COCO$	$d = 2$
$CCCC$	$d = 1$

Таблица 6.1. Примеры линейных слов и их периодов

Определение 6.2. *Период d линейного слова – это минимальное количество циклических сдвигов, переводящих его в само себя.*

Лемма 6.3. *Период d любого линейного слова длинны n является делителем числа n.*

Доказательство. Предположим, что d не является делителем числа n. Тогда разделим n на d с остатком r:

$$n = d \cdot k + r, \qquad 1 \leqslant r < d.$$

Произведем $d \cdot k$ циклических сдвигов линейного слова $a_1, a_2, ..., a_n$. С другой стороны, применим n циклических сдвигов линейного слова $a_1, a_2, ..., a_n$. Получим тоже слово. Учитывая остаток от деления r мы должны получить:

$$\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_n \\ a_2, ..., a_n, a_1 \\ ... \\ a_1, a_2, ..., a_n \end{array}\right\} d \\
\left.\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_n \\ a_2, ..., a_n, a_1 \\ ... \\ a_1, a_2, ..., a_n \end{array}\right\} d \\
... \\
\left.\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_n \\ a_2, ..., a_n, a_1 \\ ... \\ a_1, a_2, ..., a_n \end{array}\right\} d
\end{array}\right\} k \\
\left.\begin{array}{c} a_1, a_2, ..., a_n \\ ... \\ a_1, a_2, ..., a_n \end{array}\right] r
\end{array}\right] n$$

Получается, что за $r < d$ сдвигов слово перешло в себя, но d – по определению наименьшее число сдвигов, после которых слово переходит в себя. Мы получили противоречие, и, следовательно, наше предположение не верно. Таким образом d делит n, что и требовалось доказать.

■

Лемма 6.4. *Любое линейное слово длинны n и периода d имеет вид*

$$\underbrace{a_1, a_2, ..., a_d}_{\textit{1-й блок}}, \underbrace{a_1, a_2, ..., a_d}_{\textit{2-й блок}}, ..., \underbrace{a_1, a_2, ..., a_d}_{\frac{n}{d}\textit{-й блок}},$$

причем $a_1, a_2, ..., a_d$ – линейное слово у которого и длинна и период равны d.

Доказательство. Рассмотрим d сдвигов линейного слова

$$a_1, a_2, ..., a_n \;\rightarrow\; a_2, ..., a_n, a_1 \;\rightarrow\; \quad ... \quad \rightarrow\; \underbrace{a_{d+1}, ..., a_n, a_1, ..., a_d}_{a_1, a_2, ..., a_n},$$

где после d сдвигов должно образоваться исходное слово $a_1, a_2, ..., a_n$, т.е. есть совпадение линейного слова $a_1, a_2, ..., a_d$ со словом $a_{d+1}, a_{d+2}, ..., a_{d+d}$. Откуда и следует требуемое.

■

Напомним, что всего линейных слов длинны n из алфавита в r букв с повторами – r^n. Введем обозначение для всех делителей числа n:

$$d_1 = 1, \quad d_2, \quad ..., \quad d_s = n.$$

Пусть V_i – множество всех линейных слов длинны n и периода d_i. По лемме 6.3

$$r^n = |V_1| + |V_2| + ... + |V_s|.$$

Пусть W_i – множество всех линейных слов длинны d_i и периода d_i. По лемме 6.4 имеем совпадение мощностей V_i и W_i, т.е.

$$|V_i| = |W_i|.$$

Поэтому, имеем

$$r^n = |W_1| + |W_2| + ... + |W_s|. \tag{6.3}$$

Перейдем к рассмотрению циклических слов. Обозначим U_i – множество всех различных циклических слов которые можно составить из линейных слов из множества W_i. Мощности U_i и W_i соотносятся следующим образом:

$$d_i \cdot |U_i| = |W_i|. \tag{6.4}$$

Поясним, почему это верно. Слово принадлежащее W_i имеет вид $a_1, a_2, ..., a_{d_i}$, и поскольку d_i – период этого слова, то сдвиги представляют собой разные линейные слова и их d_i штук:

$$\left.\begin{matrix} a_1, a_2, ..., a_{d_i} \\ a_2, ..., a_{d_i}, a_1 \\ ... \\ a_{d_i}, a_1, ..., a_{d_i-1} \end{matrix}\right\} d_i \text{ разных линейных слов, т.к. } d_i \text{ – период.}$$

Но циклическое слово образованное из каждого из этих сдвинутых слов – одно.

В силу формул (6.4) и (6.3) получим

$$r^n = d_1|U_1| + d_2|U_2| + ... + d_s|U_s|.$$

Введем обозначение $M(d_i) = |U_i|$, тогда получим формулу

$$r^n = d_1M(d_1) + d_2M(d_2) + ... + d_sM(d_s).$$

Так как d_i – делитель числа n, то перепишем нашу формулу в виде:

$$r^n = \sum_{d|n} d \cdot M(d). \tag{6.5}$$

Введем обозначение $g(k) = kM(k)$, $f(n) = r^n$ тогда получим эквивалентную (6.5) формулу

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

которая в силу формулы обращения Мёбиуса (теорема 5.4) эквивалентна

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad nM(n) = \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}$$

что, т.к. $M(n) = M(d_s) = |U_s|$, эквивалентно

$$|U_s| = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}.$$

Полученная формула для $|U_s|$ есть количество циклических слов, которые образуются зацикливанием из линейных слов длинны n и периода n.

Но бывают еще циклические слова, отвечающие линейным словам той же длинны n и периода $d < n$. Конечно, таких слов с точности $M(d)$ штук. Откуда следует, что доказана теорема

Теорема 6.5.

$$T_r(n) = \sum_{d|n} M(d) = \sum_{d|n} \frac{1}{d} \left(\sum_{d'|d} \mu(d') r^{\frac{d}{d'}} \right).$$

Пример.6.3. Рассмотрим формулу теоремы 6.5 при $n = 12$, $r = 3$. Получим

$$\begin{aligned} T_3(12) \quad = \quad & \frac{1}{1}\left(\mu(1)3^{\frac{1}{1}}\right) + \frac{1}{2}\left(\mu(1)3^{\frac{2}{1}} + \mu(2)3^{\frac{2}{2}}\right) + \frac{1}{3}\left(\mu(1)3^{\frac{3}{1}} + \mu(3)3^{\frac{3}{3}}\right) + \\ & + \frac{1}{4}\left(\mu(1)3^{\frac{4}{1}} + \mu(2)3^{\frac{4}{2}} + \mu(4)3^{\frac{4}{4}}\right) + ... \end{aligned}$$

Лекция 7

7.1. Оценки для факториалов и чисел сочетания

Для дальнейшего изложения нам понадобится замечательный предел:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459045... \tag{7.1}$$

Пример 7.1. Как выгляди график функции C_{2n}^n, аргумента n? При $n=1$ имеем $C_{2n}^n = 2$, при $n=2$ имеем $C_{2n}^n = 6$, при $n=3$ имеем $C_{2n}^n = 15$, при $n=4$ имеем $C_{2n}^n = 70$. Дальнейшие результаты позволят нам оценить как растет эта функция.

Теорема 7.1.

$$C_{2n}^0 < C_{2n}^1 < ... < C_{2n}^n,$$

$$C_{2n}^n > C_{2n}^{n+1} > ... > C_{2n}^{2n}.$$

Доказательство. Вторая строчка является следствием первой в силу тождества 1 (а, именно, $C_n^k = C_n^{n-k}$). То что эта теорема верна, следует из треугольника Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Формально эта теорема доказывается так: при $k \leqslant n-1$, рассмотрим отношение

$$\frac{C_{2n}^k}{C_{2n}^{k+1}} = \frac{(2n)!}{(2n-k)!k!}\frac{(2n-k-1)!(k+1)!}{(2n)!} = \frac{k+1}{2n-k} \leqslant$$

$$\underbrace{\leqslant}_{\text{т.к.}k\leqslant n-1} \frac{n}{2n-k} \underbrace{\leqslant}_{\text{т.к.}k<n} \frac{n}{2n-n} = 1,$$

откуда мы получаем первую цепочку неравенств.

■

Теорема 7.2.

$$1) \qquad C_{2n}^n < 2^{2n},$$

$$2) \qquad C_{2n}^n > \frac{2^{2n}}{2n+1}.$$

Доказательство. В силу тождества 3 (замечание 2.5), имеет место равенство

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k = 2^{2n}, \tag{7.2}$$

в котором, очевидно, каждое слагаемое меньше суммы. По этому верно первое утверждение $C_{2n}^n < 2^{2n}$.

В силу теоремы 7.1 C_{2n}^n – самое большое слагаемое в сумме (7.2). Следовательно, в силу (7.2)

$$2^{2n} = C_{2n}^0 + ... + C_{2n}^{2n} < \underbrace{C_{2n}^n + ... + C_{2n}^n}_{2n+1} = (2n+1)C_{2n}^n,$$

откуда получим второе неравенство теоремы.

■

Теорема 7.3.

$$n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Легко можно получить менее удачное неравенство

$$n! \geqslant \left(\frac{n}{2}\right)^{n/2},$$

в силу $n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot \underbrace{\frac{n}{2} \cdot \left(\frac{n}{2}+1\right) \cdot ... \cdot n}_{\geqslant \frac{n}{2} \text{ слагаемых}}.$

Доказательство теоремы 7.3 следует из предела (7.1) и принципа математической индукции. При $n = 1$ неравенство принимает вид $1! \geqslant \left(\frac{1}{e}\right)^1$, которое, очевидно, верно. Предположим, что при фиксированном n неравенство теоремы выполняется, докажем его при $n+1$, т.е., что верно

$$(n+1)! \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{(n+1)}.$$

Из предположения следует, что

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1),$$

и тогда нам надо доказать, что

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Заметим свойство замечательного предела (7.1):

$$e \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

перепишем его в виде

$$e \geqslant \frac{(1+n)^n}{n^n},$$

домножим на n^n:

$$en^n \geqslant (1+n)^n,$$

домножим на $(n+1)$:

$$e(n+1)n^n \geqslant (n+1)^{n+1},$$

получим, поделив на e^{n+1},

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

что и требовалось доказать.

■

7.2. Формула Стирлинга и асимптотическое равенство для C_{2n}^n

Дадим понятие асимптотики. *Пусть есть функция $f(n) \neq 0$, где $n \in N$, и есть функция $g(n) \neq 0$. Будем говорить, что f асимптотически равна g (обозначают $f \sim g$), если*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1.$$

Пример 7.2. Приведем пример асимптотически равных функций:
1) $f(n) = n$, $g(n) = n+1$,
2) $f(n) = n^2$, $g(n) = n^2+n$.
Надо понимать, что если функции асимптотически равны, то это не значит, что разность этих функций стремится к 0. Во втором примере $|f-g| = n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Теорема 7.4. ***Формула Стирлинга.***

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Без доказательства.

В силу этой теоремы 7.4 имеем

$$C_{2n}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi(2n)}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2} = \frac{\sqrt{4\pi n}2^{2n}}{2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

Следовательно, верна теорема.

Теорема 7.5.

$$C_{2n}^n \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}.$$

7.3. Рекуррентные соотношения в комбинаторике. Разбиение чисел на слагаемые

Пример 7.3. Пусть дано число $n \in N$ и мы хотим представить его в виде суммы натуральных слогаемых:

$$n = x_1 + ... + x_t, \quad x_i \in N$$

Приведем два класса задач связанных с поиском таких разложений:

1) Задача о взвешивании помидора.
   Пусть у нас есть помидор весом 500 гр., гири весом 5 гр., 10 гр., 20 гр., 50 гр. (каждого веса в неограниченном количестве) и весы. Каким числом способов мы можем взвесить помидор используя гири?
   Очевидно, мы должны получить представление

   $$n = 500 = x_1 + ... + x_t, \quad x_i \in \{5, 10, 20, 50\},$$

   где порядок слагаемых не имеет значения.
   В этом случае мы имеем не упорядоченные разбиения.

2) Задача о попойке.
   Пусть требуется выпить 500 гр. водки (или другого спиртного, в перирасчете на водку) и есть рюмка вместимостью 50 мл. (полагаем, что гр. равны мл.) Количество водки – бесконечно, но так же есть портвейн крепость которого составляет 2/5 от водочного (т.е. если будем пить портвейн, то рюмка будет составлять 20 гр. в водочном эквиваленте). Есть пиво „О“, крепость которого составляет 1/5 от водки (тогда рюмка этого пива содержит 10 гр. водки) и пиво „Ж“крепость которого составляет 1/10 (тогда рюмка этого пива содержит 5 гр. водки). Очевидно, мы должны получить представление для этого случая

   $$n = 500 = x_1 + ... + x_t, \quad x_i \in \{5, 10, 20, 50\},$$

   где порядок слагаемых важен!
   В этом случае мы имеем упорядоченные разбиения.

Теперь сформулируем задачу в общем виде. Будем использовать натуральные числа n и $n_1, ..., n_k$ вместо веса требуемой выпитой водки и весов видов алкоголя в перирасчете на водку (т.е. 5,10,20 и 50). Пусть $f(n; n_1, ..., n_k)$ – количество упорядоченных разбиений n на слагаемые $x_1, ..., x_t$ где $x_i \in \{n_1, ..., n_k\}$.

Теорема 7.6. *Верна рекуррентная формула*

$$\begin{aligned} f(n; n_1, ..., n_k) &= f(n - n_1; n_1, ..., n_k) + f(n - n_2; n_1, ..., n_k) + ... \\ &\quad ... + f(n - n_k; n_1, ..., n_k). \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное разбиение $n = x_1 + ... + x_t$. Здесь есть k случаев, а именно:

$$x_1 = n_1; \quad x_1 = n_2; \quad ... \quad x_1 = n_k.$$

1) Рассмотрим первый случай – $x_1 = n_1$, тогда имеет место представление $n - n_1 = ...$, и количество вариантов разложения справа в этом равенстве на $n_1, ..., n_k$ равно по определению $f(n - n_1; n_1, ..., n_k)$ – количеству упорядоченных разбиений $n - n_1$ на слагаемые $n_1, ..., n_k$.

2) Рассмотрим второй случай – $x_1 = n_2$, тогда имеет место представление $n - n_2 = ...$, и количество вариантов разложения справа в этом равенстве на $n_1, ..., n_k$ равно по определению $f(n - n_2; n_1, ..., n_k)$ – количеству упорядоченных разбиений $n - n_2$ на слагаемые $n_1, ..., n_k$.

■

Рассмотрим подробнее начальные условия нашей задачи, применив доказанную теорему (в третьей строчке):

$$
\begin{aligned}
f(0; n_1, ..., n_k) &= 1, \\
f(-n; n_1, ..., n_k) &= 0, \\
f(500; 5, 10, 20, 50) &= f(100; 1, 2, 4, 10) = \\
&= f(99; ...) + f(98; ...) + f(96; ...) + f(90; ...),
\end{aligned}
$$

можно применять рекуррентную формулу нашей теоремы к слагаемым в последней формуле, а именно:

$$
\begin{aligned}
f(99; 1, 2, 4, 10) &= f(98; ...) + f(97; ...) + f(95; ...) + f(89; ...), \\
f(98; 1, 2, 4, 10) &= ...
\end{aligned}
$$

и так далее, применяя рекуррентную формулу прийдем к значениям $f(0; n_1, ..., n_k)$ и $f(-n; n_1, ..., n_k)$ которые нам известны. Заметим, что вычислить $f(1; n_1, ..., n_k)$ мы можем используя рекуррентную формулу

$$f(1; 1, 2, 4, 10) = f(0; 1, 2, 4, 10) + 0 = 1.$$

Аналогично, $f(2; 1, 2, 4, 10) = 2$.

Лекция 8

8.1. Разбиение чисел на слагаемые (продолжение)

Напомним, что $f(n;n_1,...,n_k)$ – количество способов представить n в виде суммы упорядоченных слагаемых $x_1,...,x_t$ где $x_i \in \{n_1,...,n_k\}$ и начальные условия:

$$\begin{aligned} f(0;n_1,...,n_k) &= 1, \\ f(-n;n_1,...,n_k) &= 0, \end{aligned}$$

Пусть функция $\varphi(n) = f(n;1,2,3,...,n)$ – есть количество способов представить n в виде суммы упорядоченных всех натуральных слагаемых $1,2,3,...,n$.

Пример 8.1. Перечислим все способы представлений для $n = 1,2,3,4$ (количества способов равны $\varphi(n)$):

$$n=1 \quad 1=1$$

$$n=2 \quad \left.\begin{array}{l} 2=1+1 \\ 2=2 \end{array}\right\} = 2 \text{ способа}$$

$$n=3 \quad \left.\begin{array}{l} 3=3 \\ 3=1+2 \\ 3=2+1 \\ 3=1+1+1 \end{array}\right\} = 4 \text{ способа}$$

$$n=4 \quad \left.\begin{array}{l} 4=4 \\ 4=1+3 \\ 4=3+1 \\ 4=2+2 \\ 4=1+1+2 \\ 4=1+2+1 \\ 4=2+1+1 \\ 4=1+1+1+1 \end{array}\right\} = 8 \text{ способов}$$

Сформулируем следствие к теореме 7.6

Следствие 8.1.

$$\varphi(n) = 2^{n-1}. \tag{8.1}$$

Доказательство. Применим метод математической индукции по n. Для базы индукции рассмотрим случаи приведенные в таблице примера 8.1. а, именно, $n = 1,2,3,4$. Теперь предположим, что при всех $k \leqslant n$ формула (8.1) верна, и докажем её при $n+1$, т.е. $\varphi(n+1) = 2^n$. В силу теоремы 7.6 и предположения имеем

$$\begin{aligned}
\varphi(n+1) &= f(n+1; 1,2,3,...,n+1) = \\
&= f(n;1,2,3,...,n,n+1) + f(n-1;1,2,3,...,n,n+1) + ... \\
&\quad ... + f(1;1,2,3,...,n,n+1) + f(0;1,2,3,...,n,n+1) = \\
&= f(n;1,2,3,...,n) + f(n-1;1,2,3,...,n-1) + ... + f(1;1) + 1 = \\
&= \varphi(n) + \varphi(n-1) + ... + \varphi(1) + 1 = \\
&= \underbrace{2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2^0}_{\text{геом. прогрессия, } q=2} + 1,
\end{aligned}$$

используя формулу суммы n членов геометрической прогрессии $\{1, q, q^2, ..., q^n\}$ вида

$$S_n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1},$$

получим

$$\varphi(n+1) = \frac{2^n - 1}{2-1} + 1 = 2^n,$$

что и требовалось доказать.

■

8.1.1. Замечание о сумме бесконечно убывающей прогрессии. Парадокс Ахилеса

Замечание. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\{1, q, q^2, ...\}$ с $q < 1$ равна $\frac{1}{1-q}$, что позволяет решить парадокс Ахилеса и черепахи: Ахилес находится позади черепахи на расстоянии в 1 метр. За одну секунду он приближается к черепахе на пол метра, затем, за пол секунды он приближается на четверть метра, затем за четверть секунды он приближается на 1/8 метра и так далее до бесконечности. Догонит ли Ахилес черепаху?
Ответ: Да, догонит, за 2 секунды, т.к. по формуле для суммы бесконечно убывающей прогрессии пройденный путь равен $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ...\right) = 1$.

8.1.2. Разбиение чисел на слагаемые в неупорядоченном случае

Пусть $F(n; n_1, ..., n_k)$ – количество способов представить n в виде суммы неупорядоченных слагаемых, величина каждого из которых $\in \{n_1, ..., n_k\}$.

Заметим, что в этом случае, представления $4 = 3+1$ и $4 = 1+3$ дают количество способов равное 1, т.е. эти разложения для нас теперь совпадают.

Теорема 8.2. *Верна рекуррентная формула*

$$F(n; n_1, ..., n_k) = F(n - n_1; n_1, ..., n_k) + F(n; n_2, ..., n_k).$$

Доказательство. Пусть имеет место представление $n = x_1 + ... + x_t$. Так как наши представления в виде сумм теперь неупорядочены, то мы не можем говорить о первом слагаемом в таких суммах, но мы можем рассматривать представление $n = x_1 + ... + x_t$ как представление в котором либо есть слагаемое величины n_1, либо нет.

Если в представлении $n = x_1 + ... + x_t$ есть n_1, то получаем, что $F(n; n_1, ..., n_k) = F(n - n_1; n_1, ..., n_k)$; если в представлении нет n_1, то получаем, что $F(n; n_1, ..., n_k) = F(n; n_2, ..., n_k)$, откуда следует утверждение теоремы.

■

Укажем начальные условия для рекуррентной формулы в теореме 8.2:

$$\begin{aligned} F(0; n_1, ..., n_k) &= 1, \\ F(-n; n_1, ..., n_k) &= 0, \\ F(n; \emptyset) &= 0. \end{aligned}$$

Пусть функция $p(n) = F(n; 1, 2, 3, ..., n)$ – есть количество способов представить n в виде суммы неупорядоченных натуральных слагаемых $1, 2, 3, ..., n$.

Пример 8.2. Перечислим все способы представлений для $n = 1, 2, 3, 4$ (количества способов равны $p(n)$):

$$n = 1 \quad 1 = 1, \text{ тогда } p(1) = 1$$

$$n = 2 \quad \left.\begin{matrix} 2 = 1 + 1 \\ 2 = 2 \end{matrix}\right\} = p(2) = 2 \text{ способа}$$

$$n = 3 \quad \left.\begin{matrix} 3 = 3 \\ 3 = 1 + 2 \\ 3 = 1 + 1 + 1 \end{matrix}\right\} = p(3) = 3 \text{ способа}$$

$$n = 4 \quad \left.\begin{matrix} 4 = 4 \\ 4 = 1 + 3 \\ 4 = 2 + 2 \\ 4 = 1 + 1 + 2 \\ 4 = 1 + 1 + 1 + 1 \end{matrix}\right\} = p(4) = 5 \text{ способов}$$

Исторический экскурс. Английские математики Харди, Литтлвуд и индиец Рамануджан (самородок, получавший все свои результаты без доказательств, угадывая) работали вместе над формулой для $p(n) = F(n; 1, 2, 3, ..., n)$.

Отметим гениальность Рамануджана историей: как-то Харди и Литтлвуд пришлив больницу к Рамануджану и сказали:„мы видели номер машины 1729, какое скучное число“, на что Рамануджан им ответил: „нет, вы не правы, это первое самое маленькое число которое можно представить двумя способами в виде суммы кубов, а именно, $1729 = 10^3 + 9^3$ и $1729 = 1^3 + 12^3$“.

Одним из результатов их работы стала следующая теорема.

Теорема 8.3. ***(Харди и Рамануджана)*** *Верна асимптотическая формула*

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{2/3}\sqrt{n}}.$$

Доказательство проводить не будем, отметим только, что Харди и Рамануджан доказали ее сперва в виде

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}.$$

8.2. Диаграммная техника для работы с неупорядоченными разбиениями

Эта техника была придумана задолго до 20 века Эйлером и Юнгом.

Пусть у нас есть некоторое „помидорное“разбиение (для которого не важен порядок в сумме):

$$n = x_1 + ... + x_t,$$

где мы будем считать каноническим порядок, при котором верно $x_1 \leqslant x_2 ... \leqslant x_t$. Т.е., например, $4 = 1+1+2$ – каноническое представление. Каноническое представление мы можем нарисовать в виде диаграммы (из горошин):

$$\left.\begin{array}{l}
\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet}_{x_1} \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{x_3} \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet}_{x_t}
\end{array}\right\} = n$$

Множество всех „помидорных“разбиений взаимно однозначно соответствует множеству всех диаграмм.

Теорема 8.4. *Количество всех неупорядоченных разбиений числа n на не более k слагаемых равно количеству неупорядоченных разбиений числа $n + k$ на ровно k слагаемых.*

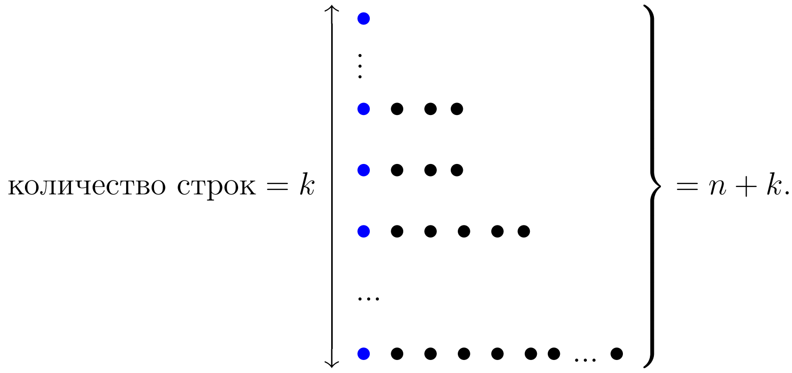
Доказательство. Рассмотрим неупорядоченные разбиения числа n на не более k слагаемых в виде

$$n = x_1 + ... + x_t, \quad t \leqslant k, \quad x_i \in N,$$

и изобразим диаграмму, отвечающую этому разложению:

$$\text{количество строк} = t \leqslant k \;\Big\updownarrow \left.\begin{array}{l}
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\
... \\
\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\bullet\ ...\ \bullet
\end{array}\right\} = n = x_1 + ... + x_t.$$

Возьмем эту диаграмму и дорисуем слева столбец высотой k горошин, получим диаграмму:



Полученная диаграмма соответствует неупорядоченному разбиению числа $n+k$ на ровно k слагаемых. В обратную сторону переход очевиден (достаточно отбросить крайний левый столбец). Таким образом мы доказали теорему.

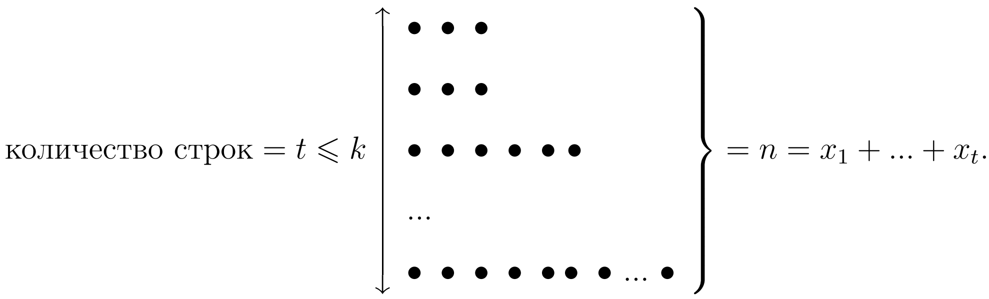
■

Теорема 8.5. *Количество всех неупорядоченных разбиений числа n на не более k слагаемых равно количеству неупорядоченных разбиений числа $n+\frac{k(k+1)}{2}$ на ровно k различных слагаемых.*

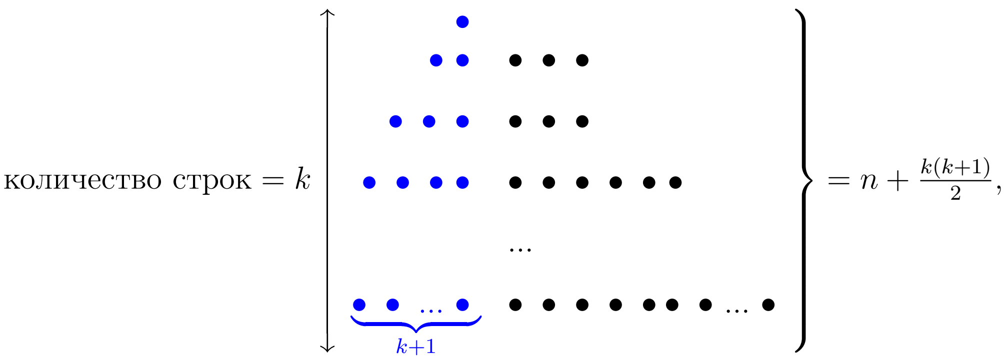
Доказательство. Рассмотрим неупорядоченные разбиения числа n на не более k слагаемых в виде

$$n = x_1 + ... + x_t, \quad t \leqslant k, \quad x_i \in N,$$

и изобразим диаграмму, отвечающую этому разложению:



Добавим слева прямоугольный треугольник высоты k строк с основанием в $k+1$ столбцов, получим диаграмму:



которая соответствует неупорядоченному разбиению числа $n + \frac{k(k+1)}{2}$ на ровно k различных слагаемых. Таким образом мы доказали теорему.

■

Лекция 9

9.1. Диаграммная техника для работы с неупорядоченными разбиениями (продолжение)

Теорема 9.1. *Количество всех неупорядоченных разбиений числа n на не более k слагаемых равно количеству неупорядоченных разбиений числа n на слагаемые, величина каждого из которых не превосходит k.*

Доказательство. Отметим,что неупорядоченное разбиение числа n на не более k слагаемых, имеет вид:

$$n = x_1 + ... + x_t, \quad t \leqslant k, \tag{9.1}$$

а неупорядоченное разбиение числа n на слагаемые, величина каждого из которых не превосходит k, имеет вид:

$$n = x_1 + ... + x_s, \quad \forall i \ \ x_i \leqslant k. \tag{9.2}$$

Для разбиения (9.1) мы имеем диаграмму вида:

$$\text{количество строк} = t \leqslant k \left\updownarrow \begin{array}{l} \underbrace{\bullet \ \bullet \ \bullet}_{x_1} \\ \underbrace{\bullet \ \bullet \ \bullet}_{x_2} \\ \underbrace{\bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet}_{x_3} \\ \dots \\ \underbrace{\bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \dots \bullet}_{x_t} \end{array} \right\} = n.$$

Мы хотим перевернуть эту диаграмму на $90°$, рассмотрим такой поворот на частном примере с более простой диаграммой:

$$\begin{array}{l} \bullet \ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \\ \bullet \ \bullet \ \bullet \ \bullet \end{array}$$

Тогда поворот диаграммы на $90°$ для разбиения (9.1) имеет примерно вид (при этом длинна каждой строчки не больше чем k):

$$\left.\begin{array}{ccccc}
\bullet & \bullet & & \dots & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \\
 & & & \dots & \\
 & & & \dots & \bullet \\
 & & & \dots & \bullet \\
\bullet & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\
x_t & x_{t-1} & x_{t-2} & \dots & x_1
\end{array}\right\} = n.$$

По этому у нас получилась диаграмма отвечающая неупорядоченному разбиению числа n на слагаемые, величина каждого из которых не превосходит k представленного формулой (9.2). Теорема доказана.

■

9.2. Задача Эйлера

Рассмотрим бесконечное произведение скобок:

$$\begin{aligned}
&(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots = (1-x-x^2+x^3)(1-x^3)(1-x^4)\cdots = \\
&= (1-x-x^2+x^4+x^5-x^6)(1-x^4)(1-x^5)\cdots = \\
&= (1-x-x^2+2x^5-x^8-x^9+x^{10})(1-x^5)\cdots = \\
&= (1-x-x^2+x^5-x^8-x^9-x^{10}+x^6+x^7+x^{13}+x^{14}-x^{15})(1-x^6)\cdots = \\
&= 1-x-x^2+x^5 \pm ... \qquad (9.3)
\end{aligned}$$

Как могло появиться в (9.3) выражение x^n в результате раскрытия скобок?
Ответ: конечно, только как произведение выражений вида $(-x^{k_i})$ т.е.,

$$\pm x^n = (-x^{k_1})(-x^{k_2})\cdots(-x^{k_t}), \quad \text{где знак } \pm = (-1)^t, \quad n = k_1 + k_2 + ... + k_t,$$

причем, индексы $\{k_1, k_2, ..., k_t\}$ следует рассматривать как неупорядоченные наборы („помидорная“задача) и все k_i – различные. Затем мы такие числа $\pm x^n$ еще складываем.

Пусть $n \in N$, определим числа:

1) $n_{\text{чёт}}$ – количество „помидорных“(неупорядоченных) разбиений числа n на чётное число различных слагаемых (т.е. в представлении $\{k_1, k_2, ..., k_t\}$ число t – чётное);

2) $n_{\text{неч}}$ – количество „помидорных“(неупорядоченных) разбиений числа n на нечётное число различных слагаемых.

Коэффициент при x^n равен, очевидно, $n_{\text{чёт}} - n_{\text{неч}}$.

Теорема 9.2. ***(Эйлера)*** *Пусть $n \neq \frac{3k^2 \pm k}{2}$ ни при каком натуральном k. Тогда*

$$n_{\text{чёт}} - n_{\text{неч}} = 0.$$

Если же $n = \frac{3k^2 \pm k}{2}$, то

$$n_{\text{чёт}} - n_{\text{неч}} = (-1)^k.$$

Доказательство не приводится.

Рассмотрим значения коэффициентов при разных k:

1) пусть $k = 0$ тогда $\frac{3k^2 \pm k}{2} = 0$ и, следовательно (в силу теоремы 9.2 Эйлера), коэффициент при x^0 равен 1,

2) пусть $k = 1$ тогда $\frac{3k^2 \pm k}{2} = 1$ или 2 и, следовательно, коэффициенты при x и x^2 равны -1,

3) пусть $k = 2$ тогда $\frac{3k^2 \pm k}{2} = 5$ или 7 и, следовательно, коэффициенты при x^5 и x^7 равны 1.

9.3. Числа Фибоначчи. Задача о размножении кроликов

В 1209 году монах Фибоначчи (Леонардо Пизанский) издал математическую книгу Liber abaci. Эта книга состоит из 15 глав и содержит почти все арифметические и алгебраические сведения того времени, изложенные с исключительной полнотой и глубиной. В XII главе приводятся задачи на суммирование рядов — арифметической и геометрической прогрессий, ряда квадратов и, впервые в истории математики, возвратного ряда, приводящего к последовательности так называемых чисел Фибоначчи. Леонардо впервые в Европе использовал отрицательные числа.

Задача о размножении кроликов. В начале времен есть пара кроликов всегда готовых к размножению. Кролики живут вечно. Каждое первое число месяца пара кроликов приносит приплод, и этот приплод состоит из двух кроликов (разнополых). Новорожденные кролики становятся взрослыми ровно через 2 месяца и начинают размножаться так же как их родители.

Рис. 9.1. Кролики задачи Фибоначчи.

Тогда мы можем расписать (таблица 9.1.) количество кроликов на первое число каждого месяца (здесь • изображает кролика):

Дата	Кол-во кроликов	Кол-во пар кроликов
1 января	• • ••	2
1 февраля	• • • • ••	3
1 марта	• • • • • • • • • ••	5
1 апреля	•...•	8

Таблица 9.1. Количество кроликов по месяцам.

Обозначим через F_n (число Фибоначчи) – количество пар кроликов в n месяце. Нами, на примере с кроликами (см. таблицу выше), доказано утверждение:

Замечание 9.3.

$$\begin{aligned} F_n &= F_{n-1} + F_{n-2}, \\ F_0 &= 1, \\ F_1 &= 2. \end{aligned}$$

Легко получить следующее следствие:

Следствие 9.4.

$$F_n \geqslant 2^{n/2}.$$

Доказательство. Применим метод математической индукции. Пусть $n = 0$, тогда в силу замечания 9.3 $F_0 = 1$, с другой стороны $2^{n/2} = 2^0 = 1$, и, следовательно, неравенство выполняется. Теперь предположим, что при $k \leqslant n$ неравенство выполняется, т.е. $F_k \geqslant 2^{k/2}$. Докажем это неравенство при $n+1$, т.е., что выполняется

$$F_{n+1} \geqslant 2^{(n+1)/2}.$$

Действительно,

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geqslant 2^{n/2} + 2^{(n-1)/2} > 2^{(n-1)/2} + 2^{(n-1)/2} = 2^{(n+1)/2}.$$

■

Оценим количество кроликов в задаче на момент – 810 лет. Очевидно, 810 лет = 9720 месяцев. В силу доказанного следствия количество пар кроликов больше чем $2^{4860} = 10^{4860 \cdot lg2} = 10^{4860 \cdot 0,3} \cong 10^{1460}$.

Будем считать, что кролики имеют очень маленькие размеры, а именно, пусть радиус кролика равен 10^{-13} см. Тогда объем одного кролика равен примерно 10^{-40} см^3. Объем видимой вселенной равен 10^{84} см^3, и если всех полученных кроликов, а именно 10^{1460} пар кроликов умножить на объем кролика, то расплодившиеся за 810 лет кролики заполнят всю видимую вселенную.

9.4. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами. Соотношения 2-го порядка (числа Фибоначчи)

Определение 9.5. *Последовательность чисел* $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ *удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению 2-го порядка с коэффициентами* $a_0, a_1, a_2 \in R$ *если для любого* $n = 0, 1, 2, ...$

$$a_2 \cdot y_{n+2} + a_1 \cdot y_{n+1} + a_0 \cdot y_n = 0, \tag{9.4}$$

другими словами, верно

$$y_{n+2} = -\frac{a_1}{a_2} y_{n+1} - \frac{a_0}{a_2} y_n.$$

В силу замечания 9.3 числа Фибоначчи удовлетворяют определению линейного рекуррентного соотношения 2-го порядка, т.е. $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$, с коэффициентами $a_2 = 1$, $a_1 = -1$, $a_0 = -1$.

Лекция 10

10.1. Соотношения 2-го порядка. Явная формула для чисел Фибоначчи

Составим квадратное уравнение с коэффициентами определения 9.5, т.е. *характеристическое уравнение* $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, решим его и обозначим корни λ_1, λ_2.

Теорема 10.1. *Пусть $\lambda_1 \neq \lambda_2$, тогда выполнено:*

1) для любых c_1, c_2 последовательность

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$$

удовлетворяет (9.4);

2) если последовательность y_n удовлетворяет соотношению (9.4), то существуют такие c_1, c_2, что $y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

Общий комментарий. Если выполняется рекуррентное соотношение вида

$$F_{n+1} = F_{n+1} + F_n,$$

но начальные условия не такие как в замечании 9.3 (а, например, $F_0 = -1$, $F_1 = e/\pi$), то получающаяся у нас последовательность F_n – не последовательность чисел Фибоначчи.

Последовательности рассматриваемые в теореме 10.1 – не обязательно последовательности чисел Фибоначчи.

Применим теорему 10.1 для чисел Фибоначчи. Нам известно, что для чисел Фибоначчи выполняется соотношение

$$F_{n+1} - F_{n+1} - F_n = 0, \tag{10.1}$$

следовательно коэффициенты определения 9.5 равны

$$a_2 = 1,\ a_1 = a_0 = -1,$$

откуда квадратное уравнение с этими коэффициентами примет вид $x^2 - x - 1 = 0$. Корни этого уравнения равны

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

В силу теоремы 10.1 последовательность

$$F_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

удовлетворяет условию (10.1). Кроме того, для чисел Фибоначчи выполняются начальные условия $F_0 = 1$, $F_1 = 2$, поэтому получим систему уравнений:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2, \end{cases}$$

решение которой имеет вид

$$c_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}.$$

Таким образом мы получили явную формулу для чисел Фибоначчи:

$$F_n = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{\sqrt{5}-3}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Докажем теорему 10.1.

1) Зафиксируем произвольные c_1, c_2, рассмотрим последовательность

$$y_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n,$$

и проверим, удовлетворяет ли она условию $a_2 \cdot y_{n+2} + a_1 \cdot y_{n+1} + a_0 \cdot y_n = 0$. Перепишем левую часть этого условия, учитывая представление для y_n, в виде:

$$a_2 \cdot \left(c_1\lambda_1^{n+2} + c_2\lambda_2^{n+2}\right) + a_1 \cdot \left(c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1}\right) + a_0 \cdot \left(c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n\right) =$$
$$= c_1\lambda_1^n \left(\underbrace{a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0}_{=0,\text{ если } \lambda_1 \text{ корень}}\right) + c_2\lambda_2^n \left(\underbrace{a_2\lambda_2^2 + a_1\lambda_2 + a_0}_{=0,\text{ если } \lambda_2 \text{ корень}}\right) = 0.$$

Теперь понятно откуда появляется *характеристическое уравнение*

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0.$$

Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть дана последовательность $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ удовлетворяющая условию рекурсии $a_2 \cdot y_{n+2} + a_1 \cdot y_{n+1} + a_0 \cdot y_n = 0$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = y_0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 = y_1, \end{cases}$$

поскольку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, эта система имеет единственное решение (очевидно, но можно воспользоваться теорией матриц и заметить, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ \lambda_1, & \lambda_2 \end{pmatrix}$ имеет определитель равный $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ и, следовательно, система имеет единственное решение). Обозначим это решение c_1^*, c_2^*.

Рассмотрим последовательность

$$y_n^* = c_1^*\lambda_1^n + c_2^*\lambda_2^n.$$

Согласно первому пункту теоремы, который мы только что доказали: y_n^* удовлетворяет рекурсии $a_2 \cdot y_{n+2}^* + a_1 \cdot y_{n+1}^* + a_0 \cdot y_n^* = 0$. По определению y_n^* получим:

$$\begin{cases} y_0^* = c_1^* + c_2^* = y_0, \\ y_1^* = c_1^*\lambda_1 + c_2^*\lambda_2 = y_1, \end{cases}$$

Таким образом мы получили:

- совпадают начальные условия для последовательностей y_n^* и y_n, т.е. $y_0^* = y_0$, $y_1^* = y_1$,
- совпадают условия рекурсии для последовательностей y_n^* и y_n.

Следовательно, эти последовательности совпадают, т.е. $y_n = y_n^* = c_1^*\lambda_1^n + c_2^*\lambda_2^n$. Мы доказали вторую часть теоремы.

■

Теорема 10.2. *Пусть корни характеристического уравнения совпадают, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2$, тогда выполнено:*

1) для любых c_1, c_2 последовательность

$$y_n = (c_1 n + c_2)\lambda_1^n$$

удовлетворяет рекурсии (9.4);

2) если последовательность y_n удовлетворяет соотношению рекурсии (9.4), то существуют такие c_1, c_2, что $y_n = (c_1 n + c_2)\lambda_1^n$.

Доказательство. 1) Фиксируем произвольные c_1, c_2, рассмотрим последовательность

$$y_n = (c_1 n + c_2)\lambda_1^n,$$

и проверим, удовлетворяет ли она рекурсии $a_2 \cdot y_{n+2} + a_1 \cdot y_{n+1} + a_0 \cdot y_n = 0$.

Перепишем левую часть этого условия, учитывая представление для y_n, в виде:

$$a_2 \cdot (c_1(n+2) + c_2)\lambda_1^{n+2} + a_1 \cdot (c_1(n+1) + c_2)\lambda_1^{n+1} + a_0 \cdot (c_1 n + c_2)\lambda_1^n =$$
$$= c_1 n\lambda_1^n \left(\underbrace{a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0}_{=0,\ \text{если } \lambda_1 \text{ корень}} \right) + c_2\lambda_1^n \left(\underbrace{a_2\lambda_1^2 + a_1\lambda_1 + a_0}_{=0,\ \text{если } \lambda_1 \text{ корень}} \right) +$$
$$+ c_1\lambda_1^{n+1}(2a_2\lambda_1 + a_1) = 0.$$

Последнее слагаемое в получившемся разложении равно нулю. Для того что бы это показать рассмотрим квадратное уравнение с корнями $\lambda_1 = \lambda_2$:

$$a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_2(x - \lambda_1)^2 = a_2x^2 - 2a_2\lambda_1 x + a_2\lambda_1^2,$$

получим равенство коэффициентов $a_1 = -2a_2\lambda_1$, следовательно, $a_1 + 2a_2\lambda_1 = 0$. Первая часть теоремы доказана.

2) Пусть дана последовательность $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ удовлетворяющая условию рекурсии $a_2 \cdot y_{n+2} + a_1 \cdot y_{n+1} + a_0 \cdot y_n = 0$. Составим систему (используя $y_n = (c_1 n + c_2)\lambda_1^n$ при $n = 0, 1$)

$$\begin{cases} c_2 = y_0, \\ (c_1 + c_2)\lambda_1 = y_1, \end{cases}$$

и эта система имеет единственное решение. Обозначим это решение c_1^*, c_2^*.

Рассмотрим последовательность

$$y_n^* = (c_1^* n + c_2^*)\lambda_1^n.$$

Согласно первому пункту теоремы, который мы только что доказали: y_n^* удовлетворяет рекурсии $a_2 \cdot y_{n+2}^* + a_1 \cdot y_{n+1}^* + a_0 \cdot y_n^* = 0$. По определению y_n^* получим:

$$y_0^* = y_0, \quad y_1^* = y_1.$$

Следовательно, эти последовательности совпадают, т.е. для любого n имеем $y_n = y_n^* = (c_1^* n + c_2^*)\lambda_1^n$. Мы доказали вторую часть теоремы.

■

10.2. Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами произвольного порядка

Определение 10.3. *Будем говорить, что последовательность $y_0, y_1, ..., y_n, ...$ удовлетворяет линейному рекуррентному соотношению порядка k, если*

$$a_k y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + ... + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n = 0, \quad a_k \neq 0,\ a_0 \neq 0. \tag{10.2}$$

Составляем харрактеристическое уравнение

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0 \tag{10.3}$$

и ищем корни. Приведем известную теорему:

Теорема 10.4. ***Основная теорема алгебры.*** *Верно представление*

$$a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0 = a_k (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_k),$$

где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – комплексные и называются корнями.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ – корни найденные нами для (10.3), *обозначим r число различных чисел среди $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ и эти числа обозначим через $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_r$.*

Обозначим через k_1 кратность корня μ_1 (т.е. сколько раз встречается μ_1 среди $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$), и т.д., k_r – кратность корня μ_r.

Обозначим $P_d(n)$ – произвольный многочлен от переменной n, степени не больше чем d:

$$P_d(n) = c_d n^d + c_{d-1} n^{d-1} + ... + c_1 n + c_0.$$

Теорема 10.5.

1) для любых многочленов $P_{k_1-1}(n), ..., P_{k_r-1}(n)$ последовательность:

$$y_n = P_{k_1-1}(n)\mu_1^n + ... + P_{k_r-1}(n)\mu_r^n$$

удовлетворяет (10.2);

2) если y_n удовлетворяет (10.2), то существуют многочлены $P_{k_1-1}(n), ..., P_{k_r-1}(n)$ такие, что верно

$$y_n = P_{k_1-1}(n)\mu_1^n + ... + P_{k_r-1}(n)\mu_r^n.$$

Без доказательства.

Если мы рассмотрим условия теоремы 10.2 (первая часть), то применительно к последней теореме мы получим:

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \mu_1 = \lambda_1, \quad r = 1, \quad k_1 = 2,$$

следовательно, в силу последней теоремы (первая часть) имеем:

$$y_n = P_1(n) \cdot \mu_1^n,$$

где, по определению имеем $P_1(n) = c_1 n + c_2$. Таким образом мы получили результат теоремы 10.2 используя последнюю теорему.

Лекция 11

11.1. Выравнивание последовательностей

Пусть есть алфавит X и 2 слова (последовательности букв из X):

$$a_1a_2...a_n, \qquad b_1b_2...b_m.$$

Рассмотрим, для примера, слова:

кролик, икра,

легко видеть совпадения – это „кр“и „ик“. Компьютер обнаруживает эти совпадения выписывая одно слово над другим, и сдвигая одно из них, до совпадения частей слов, и дописывая „0“(будем этот символ называть „гэб“) например так:

кролик00
0000икра

таким образом, в частности, происходит „выравнивание слов“. Можно рассмотреть выравнивание вида:

кр0ол0ик00
00и00к00ра

где „0“под „0“не имеет смысла писать. В абстрактном случае, для слов $a_1a_2...a_n$ и $b_1b_2...b_m$, выравнивание выглядит как запись вида:

$$\begin{matrix} a_1^*a_2^* & ... & a_L^* \\ b_1^*b_2^* & ... & b_L^* \end{matrix}$$

где $a_i^* \in \{a_1, a_2, ..., a_n, 0\}$, $b_i^* \in \{b_1, b_2, ..., b_m, 0\}$ и мы запрещаем „0“под „0“. Заметим так же, что должны выполняться условия $L \leqslant n + m$ и $L \geqslant max\{n, m\}$.

Обозначим количество всех возможных выравниваний как $f(n, m)$

Теорема 11.1.

$$f(n, m) = f(n - 1, m) + f(n, m - 1) + f(n - 1, m - 1).$$

Пример 11.1. Пусть есть два слова: a_1 и b_1, $n = 1, m = 1$. Сколько выравниваний есть в таком случае? Очевидно три, их можно представить подробнее:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0a_1 \\ b_10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_10 \\ 0b_1 \end{pmatrix}$$

Таким образом мы доказали, что $f(1, 1) = 3$. Используя результат теоремы 11.1 имеем равенство

$$f(1, 1) = f(1, 0) + f(0, 1) + f(0, 0),$$

причем $f(1, 0) = 1$, так как в этом случае мы имеем выравнивание вида

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и мы принимаем решение, что $f(0,0)=1$, так как $f(1,1)=3$, $f(1,0)=f(0,1)=1$.

Докажем теорему 11.1.

Множество всех выравниваний разобъем на три части: первая часть состоит из всех выравниваний, у которых последний столбец имеет вид $\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \end{pmatrix}$, вторая часть состоит из всех выравниваний, у которых последний столбец имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ b_m \end{pmatrix}$, в третьей части выравнивания, у которых последний столбец имеет вид $\begin{pmatrix} a_n \\ b_m \end{pmatrix}$. Сколько выравниваний в каждом из этих трех случаев? Очевидно,

1) выравниваний оканчивающихся столбцом вида $\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \end{pmatrix}$ всего $f(n-1,m)$ (мы рассматриваем выравнивание полученное из исходного отбрасыванием последнего столбца),

2) выравниваний оканчивающихся столбцом вида $\begin{pmatrix} 0 \\ b_m \end{pmatrix}$ всего $f(n,m-1)$,

3) выравниваний оканчивающихся столбцом вида $\begin{pmatrix} a_n \\ b_m \end{pmatrix}$ всего $f(n-1,m-1)$.

Следовательно, теорема доказана.

■

Точная формулировка следующего свойства приведена в книге *Райгородский А.М., Савватеев А.В., Шкредов И.Д., Комбинаторика: лекции для студентов факультета биоинженерии и биоинформатики МГУ, МАКС-пресс, Москва, 2005 г.*

Следствие 11.2.

$$f(n,n) \sim \sqrt{n}\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n\pm 1}.$$

Из этого следствия получим, что $f(1000,1000) \approx 10^{757}$.

11.2. Сокращение перебора. Отношение эквивалентности

Определение 11.3. *Пусть V – множество объектов (возможно бесконечное). Будем говорить, что на этом множестве введено отношение эквивалентности (между некоторыми парами его элементов), обозначаемое $x \sim y$, где $x,y \in V$, если выполнены следующие условия:*

1) для любого $x \in V$ имеем $x \sim x$ (рефлексивность);

2) для любых $x,y \in V$, имеем: если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность);

3) для любых $x,y,z \in V$, если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Пример 11.2.

1) Пусть $V = N$ и полагаем $x \sim y$ если $x = y$. Тогда условия последнего определения выполняются:
   а) $x = x$ для любого $x \in N$,
   б) для любых $x, y \in N$, имеем: если $x = y$, то $y = x$,
   в) для любых $x, y, z \in N$, если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$.

   Т.е. мы получили, что равенство является отношением эквивалентности.

2) Пусть $V = N$ и полагаем $x \sim y$ тогда и только тогда когда 3 делит $x - y$ (будем использовать обозначение $3|(x-y)$) . Тогда
   а) $x = x$ для любого $x \in N$,
   б) для любых $x, y \in N$, имеем: если $x \sim y$, то $y \sim x$,
   в) для любых $x, y, z \in N$, если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

   Т.е. мы получили, что делимость $3|(x-y)$ является отношением эквивалентности.

3) Пусть V – множество всех функций натурального аргумента, не равных нулю, и функции f, g асимптотически равны, т.е. $f \sim g$, в соответствии с определением в параграфе 7.1. Тогда
   а) $f = f$ для любого $f \in V$,
   б) для любых $f, g \in V$, имеем: если $f \sim g$, то $g \sim f$,
   в) для любых $f, g, h \in V$, если $f \sim g$ и $g \sim h$ (т.е. $\frac{f(n)}{g(n)} \to 1$ и $\frac{g(n)}{h(n)} \to 1$ при $n \to \infty$), то $f \sim h$ (т.е. $\frac{f(n)}{h(n)} \to 1$ при $n \to \infty$).

   Т.е. мы получили, что асимтотическое равенство функций является отношением эквивалентности.

4) Приведем пример отношения, которое не является отношением эквивалентности. Пусть $V = N$ и полагаем $x \sim y$ тогда и только тогда когда $x + y$ делится на 3. Очевидно, что условие рефлексивности для этого отношения не выполняется, действительно, если мы возьмем $x = 2$, то $2 \nsim 2$, т.к. 4 не делится на 3. Т.е. мы получили, что делимость $x + y$ на 3 не является отношением эквивалентности.

Теорема 11.4. ***(Основная теорема математики – шутка)*** *Если на некотором множестве V задано отношение эквивалентности, то множество V разбивается на непересекающиеся части:*

$$V = V_1 \sqcup V_2 \sqcup \ldots$$

так что для любого i и любых $x, y \in V_i$ имеем $x \sim y$, но для любых i, j и любых $x \in V_i$, $y \in V_j$ имеем $x \nsim y$.

V_i называется классом эквивалентности.

Пример 11.3.

1) Пусть $V = N$ и полагаем $x \sim y$ если $x = y$. Тогда $V_i = \{i\}$ и

$$V = \{1\} \sqcup \{2\} \sqcup \{3\} \sqcup ...$$

2) Пусть $V = N$ и полагаем $x \sim y$ тогда и только тогда когда 3 делит $x - y$. Тогда

$$V = \{3k,\ k = 1, 2, ...\} \sqcup \{3k + 1,\ k = 1, 2, ...\} \sqcup \{3k + 2,\ k = 1, 2, ...\}.$$

Теперь понятно, что мы можем с помощью компьютера перебирать не все выравнивания, а только брать представителей классов V_1, V_2,... отношений эквивалентности и, таким образом, сократить счет до перебора этих классов V_1, V_2,...

11.3. Отношение эквивалентности на множестве выравниваний

Понятно, что если у нас есть перестановки вида

$$\begin{pmatrix} 0a_1 \\ b_1 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_1 0 \\ 0b_1 \end{pmatrix}$$

то естественно считать, что между ними выполняется отношение эквивалентности.

Определение 11.5. *Рассмотрим выравнивание:*

$$\begin{matrix} a_1^* a_2^* & ... & a_L^* \\ b_1^* b_2^* & ... & b_L^* \end{matrix}$$

Если где-то в этом выравнивании есть $\begin{pmatrix} a_i^* 0 \\ 0 b_j^* \end{pmatrix}$, *то мы определяем операцию перестановки этих столбцов, которая приводит нас к новому выравниванию.*

Пример 11.4. Определенная операция перестановки столбцов выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} ab00 \\ 00ab \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a0b0 \\ 0a0b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0ab0 \\ a00b \end{pmatrix} \to ...$$

Понятно, что можно считать все выравнивания в получившейся цепочке удовлетворяющими отношению эквивалентности.

Определение 11.6. *Два выравнивания эквивалентны, если могут быть получены друг из друга цепочкой операций введенных в определении 11.5.*

Для введенного нами отношения эквивалетности выравниваний выполняются условия рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Определение 11.7. $g(n, m)$ *– число классов эквивалентных выравниваний.*

Мы ранее (в параграфе 11.1.) показали, что $f(1000, 1000) \approx 10^{757}$. На сколько $g(1000, 1000)$ меньше этого значения?

Теорема 11.8.

$$g(n, m) = g(n-1, m) + g(n, m-1).$$

Доказательство. Пусть W – множество всех классов эквивалентности. Тогда $|W| = g(n, m)$. Введем обозначения:

- W_1 – множество классов эквивалентности, где последний столбик имеет вид $\begin{pmatrix} a_n \\ 0 \end{pmatrix}$.
- W_2 – множество классов, где последний столбик имеет вид $\begin{pmatrix} 0 \\ b_m \end{pmatrix}$.
- W_3 – множество классов, где последний столбик имеет вид $\begin{pmatrix} a_n \\ b_m \end{pmatrix}$.

Заметим, что $W_1 \cap W_2 = W_4$ – множество выравниваний, у которых два последних столбца имеют вид $\begin{pmatrix} a_n 0 \\ 0 b_m \end{pmatrix}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} g(n, m) &= |W| = \underbrace{|W_1|}_{g(n-1,m)} + \underbrace{|W_2|}_{g(n,m-1)} + \underbrace{|W_3|}_{g(n-1,m-1)} - \underbrace{|W_4|}_{g(n-1,m-1)} = \\ &= g(n-1, m) + g(n, m-1). \end{aligned}$$

Теорема доказана.

■

Лекция 12

12.1. Отношение эквивалентности на множестве выравниваний (продолжение)

Сформулируем следствие к теореме 11.8:

Следствие 12.1.

$$g(n,m) = C_{n+m}^n = C_{n+m}^m.$$

Доказательство. Используем метод математической индукции по n и m. Рассмотрим случай $n = 0$, и вычислим $g(0,m)$ отвечающее выравниванию

$$\begin{pmatrix} 0 & ... & 0 \\ b_1 & ... & b_m \end{pmatrix}.$$

Поэтому, $g(0,m) = 1 = C_{0+m}^0$. Аналогично, $g(n,0) = 1 = C_{n+0}^n$.

Предположим, что для любого n и всех $k \leqslant m-1$ доказано, что $g(n,k) = C_{n+k}^k$. Также, предположим, что для любого m и $k \leqslant n-1$ доказано, что $g(k,m) = C_{m+k}^m$. Рассмотрим, применив теорему 11.8 и предположение индукции:

$$g(n,m) = g(n-1,m) + g(n,m-1) = C_{n-1+m}^{n-1} + C_{n+m-1}^{m-1} = C_{n-1+m}^{n-1} + C_{n+m-1}^{n},$$

далее используя второе тождество $C_a^b = C_{a-1}^b + C_{a-1}^{b-1}$, получим:

$$g(n,m) = C_{n-1+m}^{n-1} + C_{n+m-1}^{n} = C_{n+m}^n.$$

Что и требовалось доказать.

■

Ранее, в параграфе 11.1., нами было получено приближение $f(1000,1000) \approx 10^{757}$, сможем ли мы как-то оценить $g(1000,1000) = C_{2000}^{1000}$, используя, например, оценку $\frac{2^{2n}}{2n+1} < C_{2n}^n < 2^{2n}$ (из теоремы 7.2)?

Действительно, получаем оценки $10^{600}/2001 < g(1000,1000) < 10^{600}$.

Пример 12.1. Рассмотрим

$$\begin{aligned}(1-x)^n(1+x)^n &= \left(C_n^0 1^0(-x)^n + C_n^1 1^1 (-x)^{n-1} + ... + C_n^n 1^n (-x)^0\right)\cdot \\ &\cdot \left(C_n^0 1^0 x^n + C_n^1 1^1 x^{n-1} + ... + C_n^n 1^n x^0\right) = \\ &= ... + (...)x^m + ..., \quad 0 \leqslant m \leqslant 2n,\end{aligned}$$

где коэффициент при x^m можно представить в виде $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_n^{m-k}$ если $m-k \leqslant n$, и равен 0, если $m-k > n$.

С другой стороны

$$(1-x)^n(1+x)^n = (1-x^2)^n = ... + (...)x^m + ..., \quad 0 \leqslant m \leqslant 2n,$$

и, очевидно, если m – нечетное, то коэффициент при нем равен 0. Следовательно, в силу предыдущих рассуждений,

$$0 = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k C_n^{m-k}, \quad \text{при нечетном } m.$$

12.2. Техника формальных степенных рядов

В школьном курсе математики изучаются такие понятия как геометрическая прогрессия, сумма n членов геометрической прогессии и сумма бесконечно убывающей прогрессии:

$$1 + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

$$\text{если } |q| < 1, \text{ то } 1 + q^2 + q^3 + ... + q^n + ... = \frac{1}{1 - q}.$$

Студенты, конечно знают как делятся многочлены на многочлены. Если заданы два многочлена $f(x)$ и $\varphi(x)$, то всегда существуют многочлены $q(x)$ и $r(x)$ такие, что $f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$, причем степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или $r(x) = 0$. При этом $f(x)$ называется делимым, а $\varphi(x)$ делителем. Если же мы хотим, чтобы деление выполнялось без остатка, то придется допустить в качестве частного не только многочлены, но и бесконечные степенные ряды. Для получения частного надо расположить многочлены по возрастающим степеням x и делить „уголком“, начиная с младших членов. Рассмотрим деление 1 в столбик на $1 - x$ (не полагая ничего о x):

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1 - x \\ \cline{2-2} \underline{1 - x} & 1 + x^2 + x^3 + ... \\ \quad\quad x & \\ \quad\quad \underline{x - x^2} & \\ \quad\quad\quad\quad ... & \end{array}$$

Ясно, что процесс деления никогда не закончится (так же как обращение 1/3 в бесконечную десятичную дробь). С помощью индукции легко убедиться, что все коэффициенты равны единице. По этому в качестве частного получается бесконечный ряд:

$$1 + x^2 + x^3 + ...x^n + ...$$

Здесь мы ввели формальную операцию „деления в столбик“, не рассматривая условия на x и „забыв“о математическом анализе. И эта формальная операция чудесным образом привела нас к знакомому выражению .

Вообще, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ два многочлена:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + ... + a_n x^n, \\ \varphi(x) &= b_0 + ... + b_m x^m, \end{aligned}$$

причем, свободный член b_0 многочлена $\varphi(x)$ отличен от нуля, т.е. $b_0 \neq 0$, то при делении $f(x)$ на $\varphi(x)$ получается бесконечный ряд

$$c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k + ...$$

Например, если взять многочлены $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + x + 3$, $\varphi(x) = x^2 - x + 1$, то при новом способе деления получаем

$$
\begin{array}{r|l}
3 \quad + x - 2x^2 + 6x^3 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2}
\underline{3 - 3x + 3x^2 \qquad} & 3 + 4x - x^2 + x^3 + 2x^4 + ... \\
4x - 5x^2 + 6x^3 & \\
\underline{4x - 4x^2 + 4x^3} & \\
... &
\end{array}
$$

Такая же картина будет наблюдаться во всех случаях, когда $b_0 \neq 0$ и $r(x) \neq 0$. Лишь в случае, когда $f(x)$ делится без остатка на $\varphi(x)$, ряд $c_0 + c_1 x + ... + c_k x^k + ...$ обрывается и мы получаем многочлен.

Перейдем теперь к действиям над степенными рядами. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ разложены в степенные ряды:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + ... + a_n x^n + ..., \\
\varphi(x) &= b_0 + ... + b_m x^m + ...,
\end{aligned}
$$

Посмотрим как разлагается в степенной ряд произведение функций $f(x)$ и $\varphi(x)$. Мы имеем

$$
f(x)\varphi(x) = (a_0 + ... + a_n x^n + ...)(b_0 + ... + b_m x^m + ...), \tag{12.1}
$$

Оказывается, что в правой части равенства (12.1) можно почленно перемножить (мы опускаем доказательство этого утверждения). Найдем ряд получающийся после почленного перемножения. Свободный член этого ряда равен $a_0 b_0$. Члены, содержащие x получаются дважды: при умножении a_0 на $b_1 x$ и при умножении $a_1 x$ на b_0. Они дают:

$$
a_0 b_1 x + a_1 b_0 x = (a_0 b_1 + a_1 b_0)x.
$$

Точно так же вычисляем члены, содержащие x^2:

$$
a_0 b_2 x^2 + a_1 b_1 x^2 + a_2 b_0 x^2 = (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2.
$$

Вообще коэффициент при x^n имеет вид:

$$
a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_k b_{n-k} + ... + a_n b_0.
$$

Таким образом,

$$
\begin{aligned}
f(x)\varphi(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + ... \\
&\quad ... + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + ... + a_k b_{n-k} + ... + a_n b_0)x^n + ...
\end{aligned}
$$

Правая часть получившейся формулы называется произведением рядов $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Пример 12.2. Сейчас мы приведем тождество, которое можно доказать на основе таких же формальных операций деления многочленов и произведения рядов. Можно представить выражение $\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x}\right)^2$ таким образом:

$$
\left(\frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x}\right)^2 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{1+x}\right)^2,
$$

а, можно таким:

$$\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2.$$

Рассмотрим вторую формулу, формально раскрыв скобки:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2=\\&=(1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}+...)\\&(1+x^2+x^4+x^6+...+x^{2n}+...)=\\&=1+2x^2+3x^4+4x^6+...+(n+1)x^{2n}+...\end{aligned}\tag{12.2}$$

Теперь рассмотрим первую формулу:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1+x}\right)^2=\left(\frac{1}{1-x}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{1+x}\right)^2=\\&=(1+x+x^2+x^3+...+x^n+...)^2\\&(1-x+x^2-x^3+...+(-1)^nx^n+...)^2=\\&=(1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...)\\&(1-2x+3x^2+...+(-1)^n(n+1)x^n+...)=\\&=...+(A)x^m+...,\end{aligned}\tag{12.3}$$

где выражение для (A) имеет вид

$$\begin{aligned}&(A)=1(-1)^m(m+1)+2(-1)^{m-1}m+3(-1)^{m-2}(m-1)+...+(m+1)1=\\&=\sum_{k=0}^{m}(k+1)(-1)^{m-k}(m+1-k).\end{aligned}$$

Формулы (12.2) и (12.3) совпадают, следовательно, совпадают коэффициенты при одних и тех же степенях x. В формуле (12.2) нет слагаемых с нечетными степенями x, откуда делаем вывод:

$$\sum_{k=0}^{m}(k+1)(-1)^{m-k}(m+1-k)=\begin{cases}0, & \text{если } m=2\ell+1,\\ \ell+1, & \text{если } m=2\ell.\end{cases}$$

Таким образом, мы реализовали идею, что можно формально перемножать не только многочлены (как в примере 12.1.) но и бесконечные ряды, получившиеся формально, и получать интересные тождества.

Лекция 13

13.1. Введение в графы

Пусть V – некоторое конечное множество объектов. Будем называть его множеством вершин (англ. vertex) графа. Но граф появится только после того, как мы договоримся что-то считать ребрами. Пусть ребра (англ. edge) образуют множество E, где E – некоторое множество пар вершин, и эти пары мы будем называть ребрами. Графом G будем называть пару множеств $G = (V, E)$.

Пример 13.1.

1) Пусть вершины графа это люди в некоторой аудитории. Легко их разделить на пары в соответствии с партами, за которыми они сидят. По этому мы определяем ребро как пару людей сидящих за одной партой.

   За некоторыми партами студенты сидят по одиночке, не образуя пару. Получается, что не все люди принадлежат ребрам в этой аудитории. На рисунке этот граф будет выглядеть следующим образом:

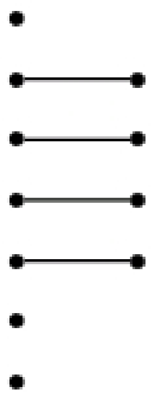


Рис. 13.1. Пример графа построенного по студентам в аудитории.

   Изобразить один и тот же граф можно большим числом способов, например наш граф можно изобразить как набор пересекающихся отрезков, а не аккуратно расположенных, как у нас на рисунке.

2) Пусть множество V – вершины графа, – люди в аудитории на лекции, на которую они пришли в первые. Будем говорить, что двое образуют ребро (элемент множества E), если они знакомы до прихода на эту лекцию. Тогда пара (V, E) образует граф.

3) Пусть множество V состоит из людей в некоторой аудитории.

Будем говорить, что двое образуют ребро (элемент множества E), если один из них списывает у другого. Понятно, что этот граф будет отличатся от предыдущего тем, что он направленный (правильно говорить – ориентированный), т.к. первый списывает у второго, и не всегда наоборот.

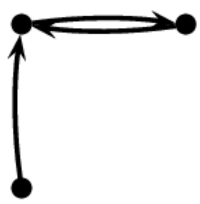


Рис. 13.2. Пример ориентированного графа.

4) **Кёнигсбергские мосты.**

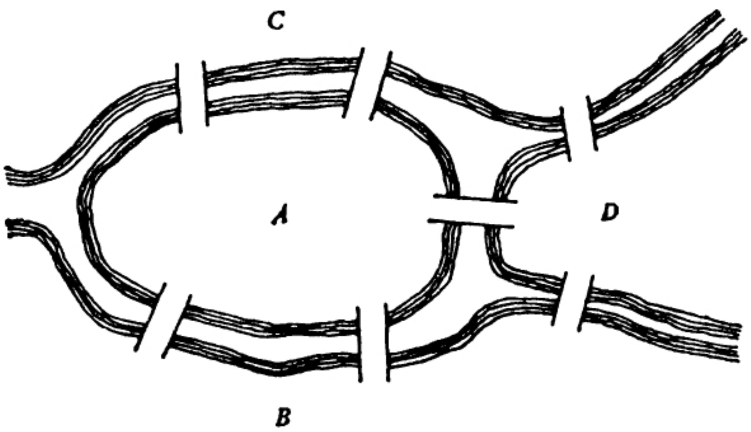


Рис. 13.3. Парк в городе Кёнигсберге, 1736 г.

На представленном рисунке изображены два острова по середине реки – A, D и берега реки – C, B. Так же есть 7 мостов соединяющих острова и берега (см. рисунок). Вопрос: можно ли найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту?

Образуем граф: пусть вершины, это части суши, а ребра – мосты. Тогда получим наш граф на рисунке 13.4.

Получившийся граф (рис. 13.4.) отличается от 1),2) и 3) случаев нашего примера, тем, что у него есть кратные ребра (т.е. повторяющиеся и без взаимообратного направления). Такой граф называют „мультиграф“.

5) **Веб-граф.** Пусть вершины – сайты в Интернете. Ребра – это гиперссылки с сайта на сайт. Понятно, что сайт может ссылаться сам на себя (в этом случае появляется петля на рисунке графа в точке отвечающей сайту ссылающемуся на самого себя). Рисунок для такого графа представлен на Рис 13.5.

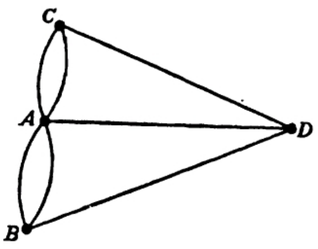


Рис. 13.4. Граф к задаче о кёнигсбергских мостах.

Рис. 13.5. Пример графа с петлями.

Стрелочки, две или больше, направленные в одну сторону между двумя точками, считаем кратными. Если есть два взаимообратных ребра (между двумя вершинами), то такие ребра кратными не считаются.

Представленные в примере 13.1. первый и второй случаи называются простыми, обыкновенными графами, а третий случай – ориентированый граф.

Термин „псевдограф“используется когда появляются петли (т.е. 5 случай примера 13.1.). „Псевдо-мульти-ориентированный граф“– это Веб-граф описанный выше.

Орграф – это ориентированный граф (сокращение).

13.2. Ребра графа, маршруты в графах

Для обозначения ребра используется перечисление вершин $(x, y) \in E$ его образующих. В псевдографе есть петли (по определению), которые записываются как (x, x). Для обыкновенного графа имеет место равенство $(x, y) = (y, x)$, т.к. нет ориентации ребра. Для ориентированого графа $(x, y) \neq (y, x)$.

Определение 13.1. *Маршрутом в графе (обыкновенном или мультиграфе) называется последовательность следующего вида:*

$$v_1 e_1 v_2 e_2 v_3 e_3 \ldots e_n v_{n+1},$$

где v_i – вершина графа, $e_i = (v_i, v_{i+1})$ – ребро графа, $i = 1, 2, ..., n + 1$, n – любое натуральное число.

В маршруте можно многократно проходить одно и то же ребро или вершину.

Определение 13.2.
1) Маршрут в графе называется замкнутым,если $v_1 = v_{n+1}$.
2) Циклом называется такой замкнутый маршрут, в котором все ребра различны.
3) Если в цикле все вершины разные, кроме v_1 и v_{n+1}, то такой цикл называется простым.

Любой выпуклый многогранник представляет собой простой цикл.

Определение 13.3.
1) Если в незамкнутом маршруте все ребра разные, то он называется цепью или путем.
2) Если в незамкнутом маршруте все вершины разные, то он называется простой цепью или простым путем.

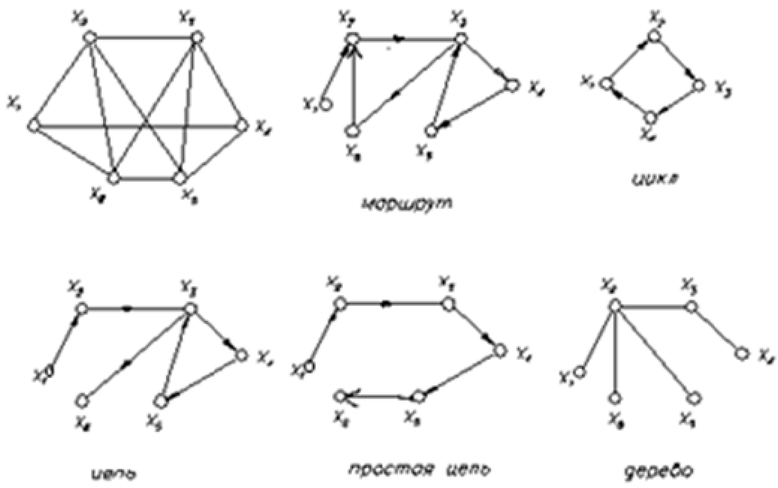


Рис. 13.6. Примеры графов.

Определение 13.4. *Граф называется связным, если любые две его вершины соединены простой цепью.*

Ранее в параграфе 11.2., мы вводили отношение эквивалентности определением 11.3, теперь, заметим, что можно определить отношение эквивалентности вершин $x \sim y$ как наличие между ними простой цепи.

Заметим, что отношение эквивалентности $x \sim x$ вовсе не требует наличие петли, ведь цепь вида $v_1 v_2$ хоть и вырождена, но существует. Проверка условий определения 11.3 показывает, что введеное нами отношение действительно является отношением эквивалентности. Следовательно, мы можем воспользоваться теоремой 11.4 и рассматривать классы эквивалентности порожденные нашим отношением, которые мы будем называть компонентами связности графа. Фактически, компонентами связаности являются связанные кусочки графа, не имеющие между собой ребер, т.е. изолированые.

Если граф связен, то у него одна компонента связности – он сам.

Определение 13.5. *1) Для неориентированых графов. Степень вершины обозначается* $deg\, v$ *и означает число ребер в которое входит эта вершина. Петля добавляет к значению* $deg\, v$ *двойку, в отличие от ребра.*
2) Для ориентированых графов есть два типа степени вершины: $indeg\, v$ $outdeg\, v$ *– входящая и исходящая степень, соответственно. Так же для ориентированного графа имеет место определение общей степени вершины формулой:*

$$deg\, v = indeg\, v + outdeg\, v.$$

Легко доказать следующее замечание, полагая, что $|E|$ – количество ребер в графе.

Замечание 13.6.

$$\sum_{v \in V} deg\, v = 2|E|.$$

Полный граф – это граф в котором проведены все возможные ребра. Полного мультиграфа не бывает.

Задачи.

1) Если у графа K_n имеется n вершин и он полный, то сколько у него ребер? Ответ: C_n^2.

2) Пусть у нас имеется n человек, т.е. $V = \{1, 2, ..., n\}$. Сколько графов, в том числе полных, мы можем построить на этих людях (вершинах)? Ответ: $2^{C_n^2}$.

Определение 13.7. *Два графа* $G = (V_1, E_1)$,$H = (V_2, E_2)$ *изоморфны (обозначается* $G \cong H$*), если между их множествами вершин существует взаимнооднозначное соответствие, сохраняющее смежность, т.е. существует перенумерация* $\varphi :\ V_1 \to V_2$ *такая, что* $(x, y) \in E_1$ *тогда и только тогда, когда* $(\varphi(x), \varphi(y)) \in E_2$.

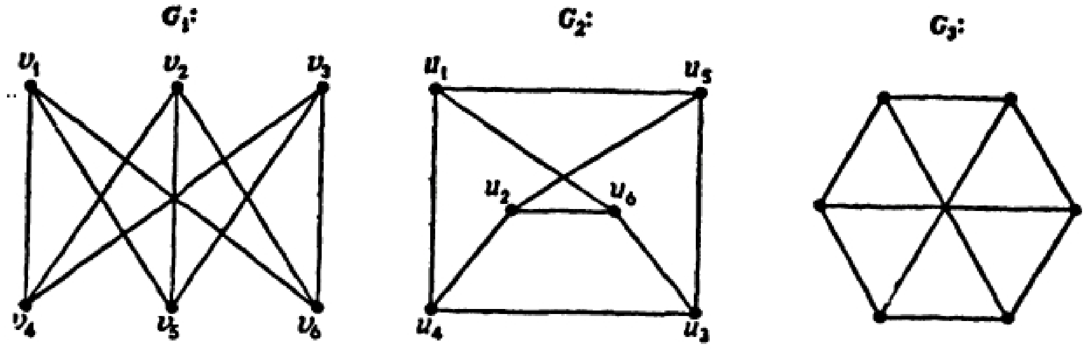


Рис. 13.7. Пример изоморфных графов.

Например, G_1 и G_2 на рисунке 13.7. изоморфны при соответствии $v_i \leftrightarrow u_i$ и граф G_3 изоморфен каждому из них. Очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах.

Лекция 14

14.1. Задача о кёнигсбергских мостах и эйлеровы графы

Пусть есть два острова по середине реки – A, D и берега реки – C, B. Так же есть 7 мостов соединяющих острова и берега (см. рисунок из части 4 примера 13.1. параграфа 13.1). Вопрос: можно ли найти маршрут прохождения всех четырех частей суши, который начинался бы с любой из них, кончался бы на этой же части и ровно один раз проходил по каждому мосту?

Образуем граф: пусть вершины, это части суши, а ребра – мосты. Тогда получим рисунок нашего графа в виде:

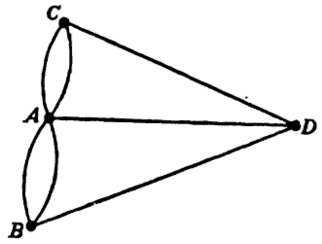


Рис. 14.1. Граф к задаче о кёнигсбергских мостах.

Эйлер решил эту задачу, определив понятие графа и выполнив постановку задачи для него.

Определение 14.1. *Если в графе присутствует цикл проходящий по всем вершинам, а так же по всем ребрам ровно по одному разу, то такой граф называется эйлеров. Соответствующий цикл то же называется эйлеров.*

Из определения следует, что эйлеров граф является связным.

Теорема 14.2. *Для связного графа G следующие утверждения эквивалентны:*

1) *граф G эйлеров,*
2) *все вершины графа G имеют четную степень,*
3) *множество ребер графа G разбивается на попарно непересекающиеся по ребрам простые циклы.*

Доказательство. Будем доказывать четыре утверждения 1)→2)→3)→1).
Из 1) докажем 2), предположив, что граф G эйлеров, значит в нем есть эйлеров цикл. Тогда при прохождении каждой вершины в нашем графе по этому циклу мы добавляем к степени этой вершины двойку. Поскольку каждое ребро проходится лишь один раз, степень нашей вершины будет четной.
Докажем, что из 2) следует 3). Пусть у нас есть вершина v с нулевой степенью, тогда тривиально получаем 3).

Рассмотрим случай когда степень вершины v_1 хотя бы 2, т.е. $deg\, v_1 \geqslant 2$. Тогда существует вершина v_2 соединенная ребром с v_1, далее существует вершина v_3 соединенная ребром с v_2 и т.д. При этом v_3 может быть соединена либо с v_1, либо с какой-то вершиной v_4. v_4 в свою очередь может быть соединена либо с v_1, либо с какой-то вершиной v_5. Получается, что т.к. число ребер конечно, на каком-то шаге мы найдем простой цикл (иначе, вершина v_1 с нечетной степенью, что противоречит предположению). Проведенные рассуждения проиллюстрированы на рисунке 14.2.

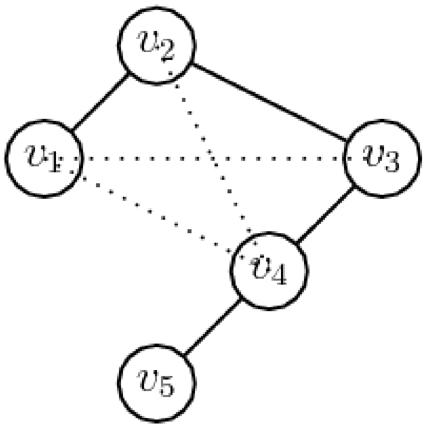


Рис. 14.2. Поиск простого цикла

Допустим, мы нашли один простой цикл, удалим его ребра из нашего графа G. После этого останется граф, степень которого чётная. Возможно, после такой процедуры у нас останутся изолированные вершины, их мы то же удалим. Повторим эту процедуру с получившимся графом, и т.д. Так как количество ребер в нашем графе конечно, то этот процесс закончится и у нас останется пустой граф, на каком-то конечном шаге.

Получается, что множество ребер графа G разбивается на простые циклы (которые мы удаляли), а попарно непересекающимися по ребрам они будут, т.к. каждое ребро мы удаляем один раз.

Докажем, что из 3) следует 1). Т.е. мы должны доказать, что если множество ребер графа G разбивается на попарно непересекающиеся по ребрам простые циклы, то в таком графе найдется эйлеров цикл.

Доказательство проведем по методу математической индукции, по числу n простых циклов в графе G:

- Пусть наш граф представляет собой один простой цикл. Понятно, что этот цикл образует эйлеров граф. Мы получили требуемое (т.е. обосновали базу математической индукции).
- Теперь предположим, что любой граф, множество ребер которого допускает такое разбиение на попарно непересекающиеся по ребрам простые циклы в количестве n, является эйлеровым.

Рассмотрим граф, множество ребер которого представимо в виде разбиения на $n+1$ цикл, указанным образом. Выделим в нем один простой цикл. Удалим его ребра и наш исходный граф распадется на какие-то компоненты связности. Количество простых циклов оставшихся в любой из компонент не более чем n. Тогда, по нашему предположению, в любой компоненте существует эйлеров цикл.

Вернем в граф удаленный простой цикл и начнем его обходить. Как только мы встречаем вершину v_i, общую для этого цикла и одной из компонент связности, мы проходим по эйлерову циклу в данной компоненте, возвращаемся в вершину v_i. Продолжаем обход. Таким образом, получим, что верно 1).

Теорема доказана.

■

14.2. Эйлеровы графы и деревья

Определение 14.3. *Связный граф без циклов (ациклический) называется деревом.*

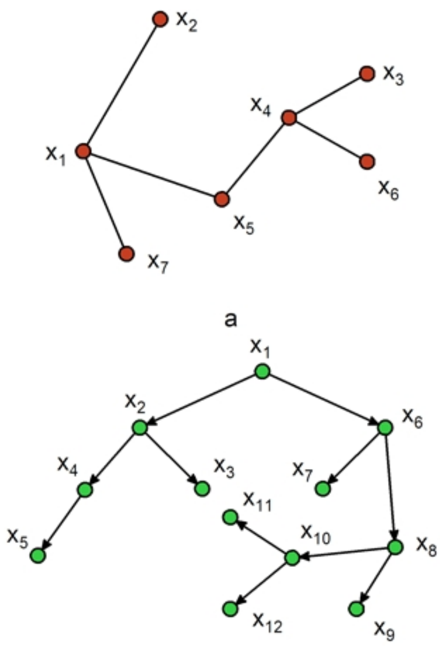


Рис. 14.3. Примеры деревьев.

Теорема 14.4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) граф G – дерево,

2) в графе G между двумя любыми вершинами существует единственная простая цепь,

3) граф G связный, у которого число ребер на 1 меньше чем число вершин, т.е. $|V| - 1 = |E|$,

4) G – ациклический граф и $|V| - 1 = |E|$.

Доказательство. Будем доказывать пять утверждений 1)→2)→3)→4)→1).
Из 1) докажем 2), предположив, что граф G – дерево, тогда по определению G – связный граф без циклов. Поэтому между двумя любыми вершинами существует простая цепь. Предположим, что простых цепей больше чем 1. Но тогда у нас образуется цикл, что противоречит ацикличности G.

Докажем, что из 2) следует 3). Связность очевидна, она следует из существования единственной простой цепи между любыми двумя вершинами.

Докажем формулу $|V| - 1 = |E|$ методом математической индукции:

- База индукции. Предположим, что вершина одна. Это дерево и $|V| - 1 = |E|$, т.к. $|V| = 1$, $|E| = 0$. если в графе вершин две, то получим $|V| = 2$, $|E| = 1$ и, следовательно, равенство выполняется.

- Пусть для графа на n вершинах формула $|V| - 1 = |E|$ верна. Рассмотрим граф на $n + 1$ вершину. Рассмотрим в нем две соседние вершины v и w. Эти вершины соединены простой цепью. Эта простая цепь единственна.

  Удалим ребро (v, w), получится ровно две компоненты связности. Докажем это от обратного, полагая, что компонента связности осталась одна. Но тогда вершины лежат в этой компоненте, и, в то же время, существует еще одна простая цепь помимо удаленного ребра (v, w). Мы получили противоречие.

  Пусть получилось более двух компонент связности, после удаления ребра (v, w). Тогда существует компонента которая не содержит v и w. Вернем ребро (v, w), тогда получим, что эта компонента не связана ни с одной из получившихся. Получаем, что в графе есть вершины, не связанные простой цепью.

  Таким образом, при удалении ребра (v, w) получается ровно 2 компоненты связности.

  Обозначим получившиеся компоненты связности G_v и G_w с количеством вершин n_v, n_w, соответственно и количеством ребер e_v и e_w, соответсовенно. Очевидно, $n_v \leqslant n$, т.к. в графе G ровно $n+1$ вершина и компонента G_v не содержит, по крайней мере, вершину w. Аналогично, $n_w \leqslant n$. Тогда по предположению индукции имеем:

  $$e_v = n_v - 1, \quad e_w = n_w - 1.$$

  Кроме того,

  $$n_v + n_w = n + 1, \quad |E| = e_v + e_w + 1.$$

  Получим

  $$|E| = n_v - 1 + n_w - 1 + 1 = n = |V| - 1.$$

Не доказано, что из 3) следует 4) и из 4) следует 1). Теорема доказана не до конца.

■

Лекция 15

15.1. Теорема об эквивалентности определений дерева

Продолжим доказывать теорему 14.4. Докажем, что из 3) следует 4) и из 4) следует 1):

- Пусть верно 3), т.е. G – связный и $|E| = |V| - 1$, докажем, что G – ациклический. Предположим противное, пусть в G существует цикл. Если существует цикл, то он простой. Простой цикл представлен на рисунке

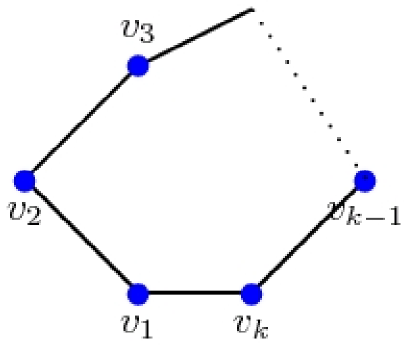


Рис. 15.1. Простой цикл.

И существуют вершины $w_1, w_2, ..., w_{n-k}$ не входящие в этот цикл. Поскольку наш граф связный, то для любой вершины w_i, $i = 1, 2, ..., n-k$ существует маршрут к циклу $v_1, ..., v_k$. Для вершины w_i выберем кратчайший из всех маршрутов. Рассмотрим первое ребро в каждом из маршрутов. Докажем, что они все различны. Пусть вершины w_i и w_j соединены между собой одним ребром, и от каждого из w_i, w_j к циклу $v_1, ..., v_k$ ведет ℓ_1 и ℓ_2 ребер, соответственно.

1) Пусть $\ell_1 = \ell_2$, тогда для вершины w_i кратчайший маршрут имеет длину $1 + \ell_2$, но $\ell_1 < 1 + \ell_2$, т.е. мы получили противоречие.
2) Пусть $\ell_1 < \ell_2$, тогда для вершины w_i кратчайший маршрут имеет длину $1 + \ell_2 > \ell_1$, т.е. получили противоречие.

В цикле длинны k имеем k ребер. Для вершины w_i имеем уникальное начальное ребро в маршруте. В сумме имеем $k + n - k = n$ ребер. Но изначально мы предполагали что ребер $n - 1$. Мы получили противоречие.

- Пусть верно 4) т.е. граф G ациклический и $|E| = |V| - 1$, докажем 1). Нам надо показать, что G ациклический связный граф. Предположим, что у графа G есть k компонент связности. Нам надо получить, что $k = 1$. Обозначим компоненты $G_1, ..., G_k$. Пусть мощность множества вершин i компоненты равна $|G_i| = n_i$, $i = 1, ..., k$. Каждая компонента – связный ациклический граф, тогда воспользуемся доказанными импликациями 1)→2)→3), т.е. в каждой компоненте G_i, $i = 1, ..., k$ имеется ребер $e_i = n_i - 1$. Посчитаем число ребер в G, зная, что $n_1 + ... + n_k = n$. Суммируем ребра в компонентах и получаем:

$$(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + ... + (n_k - 1) = (n_1 + n_2 + ... + n_k) - k = n - k,$$

по условию ребер $n - 1$, следовательно,

$$n - k = n - 1 \quad \Longrightarrow \quad k = 1,$$

т.е. у нас получилась одна компонента связности.

15.2. Некоторые определения графов

Определение 15.1. *Граф на n вершинах называется полным, если между любыми двумя вершинами проведено ребро. Обозначается K_n.*

В полном графе имеется C_n^2 ребер.

Определение 15.2. *1) Любой подграф T графа G, который содержит все его вершины и является деревом, называется остовным деревом графа G.*
2) Листом (висячей, концевой вершиной) называется любая вершина степени 1 в дереве.

Определение 15.3. *Граф называется помеченным (пронумерованным), если любые его две вершины отмечаются пометками.*

Задача. Сколько существует остовых деревьев у полного помеченного графа K_n?
Решение. Обозначим число остовых деревьев через t_n, тогда:

- при $n = 1$ имеем одно остовое дерево,
- при $n = 2$ имеем $t_2 = 1$,
- при $n = 3$ имеем $t_3 = 3$ и эти деревья изоморфны между собой (см. рисунок 15.2.),

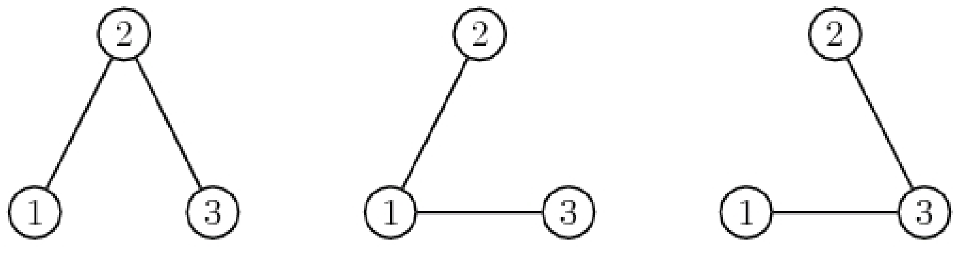


Рис. 15.2. Изоморфные между собой деревья на 3 вершинах.

- при $n = 4$ имеем $t_4 = 16$, см. рисунок ниже,

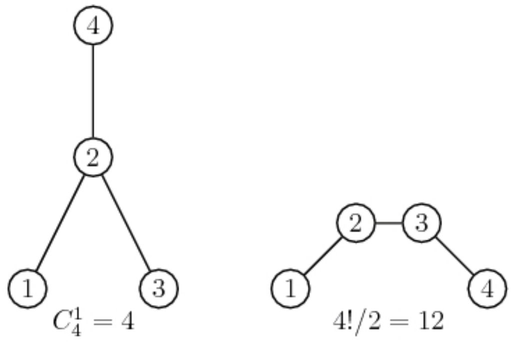


Рис. 15.3. Деревья на 4 вершинах.

- при $n = 5$ имеем $t_5 = 125$.

В приведенных нами вычислениях можно заметить закономерность, которая приводится в следующей теореме

Теорема 15.4. ***(Кели).*** *Число остовых деревьев в полном помеченном графе K_n равно $t_n = n^{n-2}$.*

15.3. Доказательство Прюфера

Приведем доказательство Прюфера теоремы Кели.

Рассмотрим множество вершин $V = \{1, 2, ..., n\}$. Поставим в соответствие каждому остовному дереву размещение с повоторениями. Размещаем n объектов по $n - 2$ позициям.

Напомним, определение биекции: биекция – это во-первых отображение, во-вторых иньекция (т.е. образы двух различных элементов не пересекаются), в-третьих сюрьекция (т.е. у любого элемента есть прообраз).

Рассмотрим дерево T. Его вершины занумерованы $\{1, 2, ..., n\}$, выберем лист из этого списка вершин с наименьшим номером. Пусть лист имеет номер b_1.

Найдем ребро $e_1 = (a_1, b_1)$, где a_1 – единственная вершина соединенная с b_1 ребром. Запишем вершину a_1 в код Прюфера (размещение). Удалим из дерева вершину b_1 и ребро, a_1 – остается. Полученный граф так же будет деревом, назовем его T_1, $V_1 = V \setminus b_1$.

Продолжим этот процесс, найдем висячую вершину b_2 с наименьшим номером, оставшимся в списке вершин. Получим дерево T_2, удалив вершину b_2, записав в код Прюфера связанную с ней вершину a_2 и т.д. В конце останется одно ребро $e_{n-1} = (a_{n-1}, b_{n-1})$, и в коде Прюфера получим $\sigma(T) = [a_1, ..., a_{n-2}]$.

Рассмотрим проведенную нами процедуру образования кода Прюфера на примере (рисунок 15.4. с графом смотри на следующей странице):

1) ищем висячую вершину с наименьшим номером. Это 2. Эта вершина соединина с вершиной 7, следовательно записываем код Прюфера $\sigma(T = [7])$,

2) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 4. Она соединена с 1. Пишем код $\sigma(T) = [7, 1]$,

3) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 5. Она соединена с 11. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11]$,

4) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 8. Она соединена с 11. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11]$,

5) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 9. Она соединена с 1. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1]$,

6) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 1. Она соединена с 7. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1, 7]$,

7) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 7. Она соединена с 3. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1, 7, 3]$,

8) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 3. Она соединена с 6. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1, 7, 3, 6]$,

9) ищем следующую висячую вершину с наименьшим номером. Это 6. Она соединена с 11. Получаем код $\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1, 7, 3, 6, 11]$. У нас осталось одно ребро и на этом процедура заканчивается.

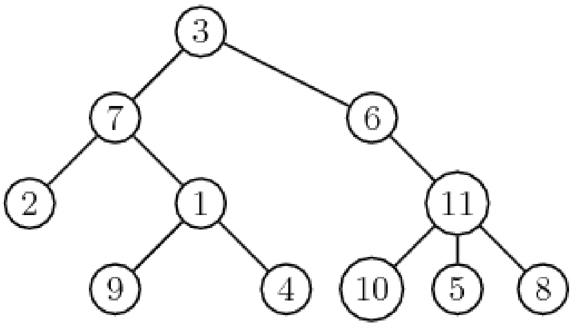


Рис. 15.4. Пример графа для процедуры образования кода Прюфера.

Заметим, что в коде Прюфера каждая вершина a_i повторяется $deg\, a_i - 1$ раз.

Мы построили отображение (запись кода Прюфера), для которого надо доказать, что оно является биекцией. Докажем сначала, что это построение иньективно. Коды различных остовных деревьев T_1 и T_2 различны. Доказательство будем проводить используя математическую индукцию:

- База. Пусть $n = 3$, тогда, очевидно, код Прюфера состоит из одной вершины и коды в различных случаях вида графа – разные (см. первый рисунок в параграфе 15.2).

- 1) Предположим, что коды Прюфера остовных деревьев на $n - 1$ вершине – различны. Рассмотрим два дерева T_1 и T_2 на одних и тех же вершинах с кодами Прюфера $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$, соответственно. Если первая висячая вершина

T_1 отличается от первой висячей вершины T_2, то коды $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$ различны. Действительно, пусть, без ограничения общности, висячая вершина T_1 имеет меньший номер, чем висячая в T_2. Тогда, висячая вершина в T_1 не встречается в коде Прюфера $\sigma(T_1)$, но вершина с этим номером встретится в коде $\sigma(T_2)$.

2) Если первые висячие вершины T_1 и T_2 совпадают, но вершины, с которыми они соединены – различны, то коды $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$ будут различны.

3) Если первые висячие вершины в T_1 и T_2 совпадают, и вершины, с которыми они соединены совпадают тоже, то совпадают первые элементы в кодах Прюфера $\sigma(T_1)$ и $\sigma(T_2)$. Запишем коды для T_1 и T_2 в виде:

$$\sigma(T_1) = [a_1, ..., a_{n-2}], \qquad \sigma(T_2) = [\widetilde{a}_1, ..., \widetilde{a}_{n-2}].$$

Отбросим одинаковую висячую вершину, образовав T_1' и T_2' и, тогда коды Прюфера для этих новых деревьев будут иметь вид:

$$\sigma(T_1') = [a_2, ..., a_{n-2}], \qquad \sigma(T_2') = [\widetilde{a}_2, ..., \widetilde{a}_{n-2}].$$

По предположению индукции $\sigma(T_1')$ отличен от $\sigma(T_2')$.

Мы доказали, что наше построение иньективно.

Рассматривая последний рисунок (граф), мы получили код Прюфера вида

$$\sigma(T) = [7, 1, 11, 11, 1, 7, 3, 6, 11].$$

Попробуем по этому коду восстановить вид графа. Так как в коде 9 чисел, то в графе $9 + 2 = 11$ вершин. Выпишем все номера вершин нашего дерева:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11,$$

и глядя на этот список найдем те номера, которые не встречаются в $\sigma(T)$.

1) Первый такой номер – 2, рисуем висячую вершину с номером 2 и соединяем ребром с вершиной номером 7 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$).

2) Следующий такой номер – 4, рисуем висячую вершину с номером 4 и соединяем ребром с вершиной с номером 1 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7).

3) Следующий такой номер – 5, рисуем висячую вершину с номером 5 и соединяем ребром с вершиной с номером 11 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1).

4) Следующий такой номер – 8, рисуем висячую вершину с номером 8 и соединяем ребром с вершиной с номером 11 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11).

5) Следующий такой номер – 9, рисуем висячую вершину с номером 9 и соединяем ребром с вершиной с номером 1 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11,11).

6) Следующий такой номер – 1, рисуем висячую вершину с номером 1 и соединяем ребром с вершиной с номером 7 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11,11,1).

7) Следующий такой номер – 7, рисуем висячую вершину с номером 7 и соединяем ребром с вершиной с номером 3 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11,11,1,7).

8) Следующий такой номер – 3, рисуем висячую вершину с номером 3 и соединяем ребром с вершиной с номером 6 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11,11,1,7,3).

9) Следующий такой номер – 6, рисуем висячую вершину с номером 6 и соединяем ребром с вершиной с номером 11 (так, как это первый номер в $\sigma(T)$, после вычеркивания 7,1,11,11,1,7,3,6).

10) В списке номеров вершин остаются 10 и 11, соединяем их в ребро. Дерево построено.

Теперь мы формально будем доказывать сурьективность нашего построения (т.е., что каждому коду Прюфера соответствует дерево). Доказательство будем проводить используя математическую индукцию:

- База индукции. Пусть $n = 3$, длина кода $n - 2 = 1$, тогда мы получаем три варианта дерева на трех вершинах, в зависимости от вида кода Прюфера (их может быть 3).

- Пусть при $n - 1$ для кода Прюфера существует дерево. Докажем при n для кода существует дерево. Рассмотрим код длины $n - 2$:

$$\sigma = [a_1, ..., a_{n-2}],$$

вершины в этом случае запишем как

$$1, 2, 3, ..., n.$$

Найдем в списке вершин $1, ..., n$ номер, который не встречается в коде σ, обозначим этот номер через b_1. Удалим из кода a_1. По предположению индукции для $\sigma' = [a_2, ..., a_{n-2}]$ существует дерево T_1 соответствующее этому коду; оно не содержит вершину b_1. Соединим вершину b_1 и a_1, получим искомое дерево T, цикла не возникнет, т.к. b_1 не содержалась в дереве T_1.

Доказательство Прюфера закончено.

Заметим, что если код Прюфера имеет вид

$$\sigma = [a_1, ..., a_{n-2}],$$

то таких кодов всего n^{n-2}.

ФАКУЛЬТЕТ
БИОИНЖЕНЕРИИ И
БИОИНФОРМАТИКИ
МГУ ИМЕНИ
М.В. ЛОМОНОСОВА

teach-in
ЛЕКЦИИ УЧЕНЫХ МГУ